

解 答 速 報

東海大学医学部 数学

2020年 2月 2日実施

- 1
- (1) a は正の定数とする. $y = -x^2 + 2ax + 2a$ の値が 2 になることがあるが, 3 になることはない. このとき, a の値の範囲は である.
- (2) 2つの円 $(x - \sqrt{t})^2 + (y - 3)^2 = 1$ と $x^2 + (y - t)^2 = 9$ は $t =$ のとき外接する.
- (3) $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24} =$.
- (4) 次の式を因数分解しなさい. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 =$.
- (5) 自然数 $n^3 + 100$ が $n + 10$ で割り切れるような最大の自然数 n は である.
- (6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(\int_0^x x^4 e^{2t} dt - \int_0^2 16e^{2t} dt \right) =$.

【解説】

(1) $y = -(x - a)^2 + a^2 + 2a$

軸が $x = a$ ($a > 0$) の 2 次関数であるから, 条件は

$$2 \leq a^2 + 2a < 3$$

$$2 \leq a^2 + 2a \text{ より, } a \leq -1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3} \leq a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a^2 + 2a < 3 \text{ より, } -3 < a < 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

よって, ①②および $a > 0$ の共通範囲を考えて

$$-1 + \sqrt{3} \leq a < 1.$$

(2) 2円の中心間距離が2円の半径の和と等しくなるので

$$\sqrt{(\sqrt{t} - 0)^2 + (3 - t)^2} = 1 + 3$$

整理して, $t^2 - 5t - 7 = 0 \iff t = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}$ を得るので, $t > 0$ より

$$t = \frac{5 + \sqrt{53}}{2}.$$

(3) $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24} = \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{\pi}{24} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ より, 加法定理を用いて

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

(4) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$$= 3(b + c)a^2 + 3(b + c)^2a + 3bc(b + c)$$

$$= 3(b + c)\{a^2 + (b + c)a + bc\}$$

$$= 3(b + c)(a + b)(a + c) = 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

(5) n^3+100 を $n+10$ で割り算すると

$$\frac{n^3+100}{n+10} = n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n+10}$$

よって、 n^3+100 を $n+10$ で割り切れるとき、 $n+10$ は 900 の(正の)約数であるので、求める最大の自然数 n は $n=890$.

(6) $F(x) = \int_0^x x^4 e^{2t} dt$ とおくと、 $\int_0^2 16e^{2t} dt = F(2)$ であるので

$$(\text{与式}) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = F'(2)$$

ここで、 $F(x) = x^4 \int_0^x e^{2t} dt$ より

$$F'(x) = 4x^3 \int_0^x e^{2t} dt + x^4 e^{2x}$$

よって

$$F'(2) = 32 \int_0^2 e^{2t} dt + 16e^4 = 32 \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^2 + 16e^4 = 16(2e^4 - 1) .$$

2

(1) 方程式 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 1$ の解を $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ とおく. このとき, $\alpha =$ であり,

$$\int_1^{\alpha} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \text{イ} \alpha + \text{ウ}$$

である. ただし, , には有理数を入れなさい.

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} \log_y(x^2 + y - 4) < \log_y(x - y + 2) \\ 1 < y \end{cases}$$

の表す領域を D とする. 以下の空欄には α を用いないこと.

(i) 直線 $x = a$ と D が共有点をもつような定数 a の値の範囲は である.

(ii) 直線 $y = b$ と D が共有点をもつような定数 b の値の範囲は である.

(iii) D と D の境界線を合わせた図形の面積は

$$\text{カ} \sqrt{\text{キ}} + \text{ク} \sqrt{\text{ケ}} + \text{コ}$$

である. ただし, , , には有理数, , にはできるだけ小さい自然数を入れなさい. ただし, < とする.

(iv) 点 $P(x, y)$ が領域 D を動くとき, $x + y = k$ とおくと, k の値の範囲は である.

(3) 不等式 $\log_y(x^2 + y - 4) < \log_y(x - y + 2)$ の表す領域を D' とおく. 点 $P(x, y)$ が領域 D' を動くとき,

$x + y = k$ とおくと, k の値の範囲は である.

【解説】

(1) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0$ より, $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

$\alpha > \beta$ より, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

また, $\alpha^2 - \alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha + 4$ より

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(\alpha + 4) = \alpha^2 + 4\alpha = (\alpha + 4) + 4\alpha = 5\alpha + 4$$

であるので

$$\begin{aligned} \int_1^{\alpha} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \right) dx &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 2x \right]_1^{\alpha} \\ &= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{4}\alpha^2 + 2\alpha - \frac{25}{12} \\ &= -\frac{1}{6}(5\alpha + 4) + \frac{1}{4}(\alpha + 4) + 2\alpha - \frac{25}{12} \\ &= \frac{17}{12}\alpha - \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

(2) 真数条件より

$$x^2 + y - 4 > 0, \quad x - y + 2 > 0 \quad \therefore y > -x^2 + 4, \quad y < x + 2 \quad \dots \text{①}$$

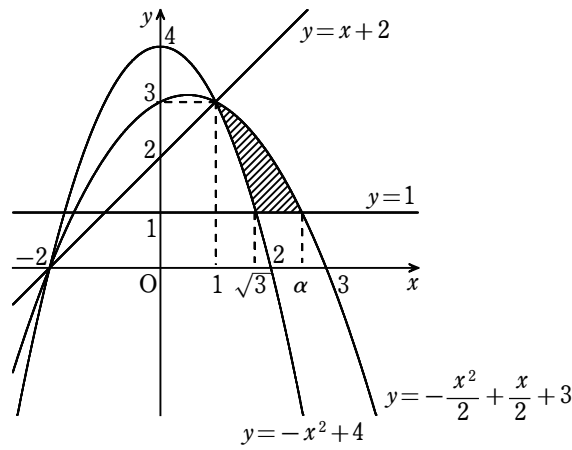
また, $y > 1$ \dots ② より

$$\log_y(x^2 + y - 4) < \log_y(x - y + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y - 4 < x - y + 2$$

$$\Leftrightarrow y < -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 3 \quad \dots \text{③}$$

① ~ ③ を図示すると, 下図の斜線部分を得る. (ただし, 境界は含まない.)



(i) 上図より, $1 < a < \alpha \quad \therefore 1 < a < \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

(ii) 上図より, $1 < b < 3$.

(iii) 上図より, 求める面積は

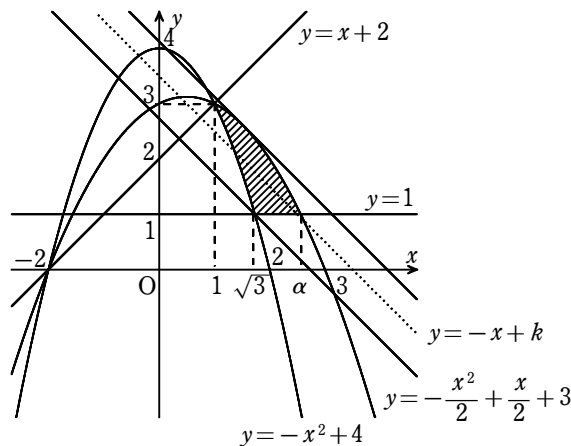
$$\begin{aligned} & \int_1^\alpha \left\{ \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 3 \right) - 1 \right\} dx - \int_1^{\sqrt{3}} \{ (-x^2 + 4) - 1 \} dx \\ &= \frac{17}{12} \alpha - \frac{7}{4} - \left[-\frac{x^3}{3} + 3x \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{17}{12} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{2} - \frac{7}{4} - 2\sqrt{3} + \frac{8}{3} \\ &= -2\sqrt{3} + \frac{17}{24}\sqrt{17} + \frac{13}{8}. \end{aligned}$$

(iv) $x + y = k$ が $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 3$ と接するときの k の値を求めると, $k = \frac{33}{8}$

また, $x + y = k$ が $(\sqrt{3}, 1)$ を通るとき k の値を求めると, $k = 1 + \sqrt{3}$

よって, 下図より

$$1 + \sqrt{3} < k < \frac{33}{8}.$$



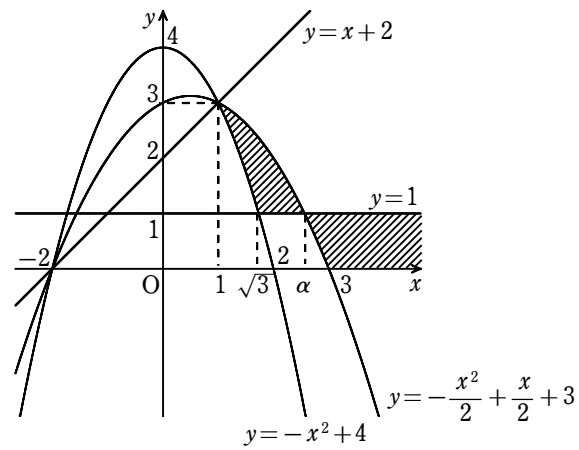
(3) (2) の $y > 1$ の場合に加え, $0 < y < 1 \dots \textcircled{4}$ を考える. このとき,

$$\log_y(x^2 + y - 4) < \log_y(x - y + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y - 4 > x - y + 2$$

$$\Leftrightarrow y > -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 3 \quad \dots \textcircled{5}$$

したがって、①②③または①④⑤を図示すると、下図の斜線部分を得る。(ただし、境界は含まない。)



よって、(2)(iv) 同様に考えると

$$k > 1 + \sqrt{3} .$$

3

n を 3 以上の自然数とする. 左から順に 1 番から n 番までの番号がついたイスが並んでいる. 各イスには人が一人ずつ座っていて, 最初に k 番の椅子に座っていた人を k 番さんとよぶ.

1 番と 2 番のイスに座っている人がじゃんけんを行い, 勝った方が 1 番のイスに, 負けた方が n 番のイスに座り, それ以外の人は 1 つ左のイスに座る. 引き分けのときは誰も移動しない. この試行を 1 回とし, 試行を繰り返す.

(1) $n = 3$ で, 2 回の試行を終えたときを考える.

(i) 左から 3 番さん, 2 番さん, 1 番さんの順で座っている確率は である.

(ii) 1 番さんが 2 番さんより左に座っている確率は である.

(2) $n - 1$ 回の試行を終えたとき, n 番さんが 1 番のイスに座っている確率は である.

(3) n 回の試行を終えたとき, n 番さんが 1 番のイスに座っている確率は である.

(4) n 回の試行を終えたとき, n 番さんが n 番のイスに座っている確率は である.

(5) $n - 1$ 回の試行を終えたとき, 全ての人が最初と同じ椅子に座っている確率は である.

(6) n 回の試行を終えたとき, 全ての人が最初と同じイスに座っている確率は である.

座っている人の番号を左から順に書き並べた並びを考える. たとえば $n = 3$ のときの最初の状態を $(1, 2, 3)$ と表す.

また, 1 回の試行で, 1 番のイスに座っている人が勝つことを \circ で, 2 番のイスに座っている人が勝つことを \bullet で, 引き分けのことを \triangle で表すこととする.

(1) $n = 3$ で 2 回の試行を終えたとき, 起こりうる場合を考えると以下ようになる.

$$(1, 2, 3) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ (1, 3, 2) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ (1, 2, 3) \\ \bullet (3, 2, 1) \\ \triangle (1, 3, 2) \end{array} \right. \\ \bullet (2, 3, 1) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ (2, 1, 3) \\ \bullet (3, 1, 2) \\ \triangle (2, 3, 1) \end{array} \right. \\ \triangle (1, 2, 3) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ (1, 3, 2) \\ \bullet (2, 3, 1) \\ \triangle (1, 2, 3) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(i) $(3, 2, 1)$ となる確率は $\frac{1}{9}$.

(ii) 1 番さんが 2 番さんより左に座っている確率は $\frac{5}{9}$.

(2) $n - 2$ 回目の試行を終えたとき, n 番さんは, 左から 2 番目以降のイスに座る. $n - 1$ 回目に 1 番のイスに座るためには, $n - 2$ 回目の試行を終えたときに n 番さんが 2 番のイスに座っている必要がある. すなわち, $n - 2$ 回目までに引き分けはない. さらに $n - 1$ 回目に 1 番のイスに座っている人が負けるとき, n 番さんは 1 番のイスに座る.

$$(1, 2, 3, \dots, n) \longrightarrow \circ \text{ または } \bullet (\diamond, \diamond, \diamond, \dots, n-1, n, \diamond)$$

$$\longrightarrow \circ \text{ または } \bullet (\diamond, \diamond, \diamond, \dots, n, \diamond, \diamond)$$

...

$$\longrightarrow \circ \text{ または } \bullet (\diamond, n, \diamond, \dots, \diamond, \diamond, \diamond)$$

$$\longrightarrow \bullet (n, \diamond, \diamond, \dots, \diamond, \diamond, \diamond)$$

したがって, 求める確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$.

(3) $n - 1$ 回目の試行を終えたとき, n 番さんが左から 2 番目のイスに座るのは, $n - 1$ 回の試行のうち, 1 回が引き分けで, 残り $n - 2$ 回が勝敗がついた場合であるから,

$${}_{n-1}C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{(n-1) \cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}}$$

この場合では、 n 回目に n 番さんが勝つと 1 番のイスに座ることになるので、

$$\frac{(n-1) \cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(n-1) \cdot 2^{n-2}}{3^n}.$$

また、 $n-1$ 回目の試行を終えたとき n 番さんが 1 番のイスに座る確率は、(2) より $\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$. このとき n 回目に n 番さ

んが勝つか引き分けると 1 番のイスに座ることになるので、

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

よって、

$$\frac{(n-1) \cdot 2^{n-2}}{3^n} + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{(n+1) \cdot 2^{n-2}}{3^n}.$$

(4) n 回目の試行を終えたとき、 n 番さんが n 番のイスに座る場合は、

$n-1$ 回目に、(ア) n 番のイスにいたとき、(イ) 1 番のイスにいたとき、(ウ) 2 番のイスにいたとき
のいずれかである。

(ア) n 回ともに引き分けになるとき、または、 $n-2$ 回目までは勝敗がつき $n-1$ 回目で n 番さんが負けて n 回目で引き分けになるときなので、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{n-2} + 1}{3^n}.$$

(イ) n 回目の試行で n 番さんが負けるので、(2) を利用して、

$$\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{n-2}}{3^n}.$$

(ウ) $n-1$ 回目までの間に、1 回引き分けがあり、残り $n-2$ 回が勝敗がついた場合である。このとき n 回目の試行で n 番さんが負けるので、(3) を利用して、

$$\frac{(n-1) \cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(n-1) \cdot 2^{n-2}}{3^n}.$$

(ア)~(ウ) より、

$$\frac{2^{n-2} + 1}{3^n} + \frac{2^{n-2}}{3^n} + \frac{(n-1) \cdot 2^{n-2}}{3^n} = \frac{(n+1) \cdot 2^{n-2} + 1}{3^n}.$$

(5) $n-1$ 回の試行を終えたとき、全ての人が最初のイスに座っているのは、

(ア) すべての人が動かないとき、(イ) 1 番の人が動かず、他の人が動くとき
のいずれかである。

(ア) $n-1$ 回すべてが引き分けのとき、(イ) 1 番の人が勝ち続けるときの確率を考えればよく、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3^{n-1}}.$$

(6) n 回の試行を終えたとき、全ての人が最初のイスに座っているのは、

(ア) すべての人が動かないとき、(イ) 1 番の人が動かず、他の人が動くとき、(ウ) すべての人が動くとき
のいずれかである。

(ア) n 回すべてが引き分けのとき

(イ) n 回のうち、1 回は引き分けで、残り $n-1$ 回は 1 番の人が勝つとき

(ウ) n 回すべてが、2 番のイスに座る人が勝つとき

の確率を考えればよく、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{n+2}{3^n}.$$

【講評】※ () は難易度を表している。

① (易)

小問集合。どれも方針は立てやすいが、計算の手法を見誤ると計算量が増えるだろう。時間も十分にあるので、ここは完答したい。

② (標準)

前半の積分計算は易しいが計算が煩雑。(2)以降は真数条件を利用した対数の不等式だが、領域が正確に求まれば、その先は易しい。見慣れない不等式で戸惑った生徒もいただろう。領域が描けるかどうかで大きく差がついたと思われる。

③ (標準)

席替えによる場合の数の問題。(1)は素直に教え上げればよく、問題の設定をしっかりと読めれば、場合分けも少なく完答が望めるだろう。しかし、ルールの把握ができなければ、ほとんど得点は取れない。大きく差がつく問題であろう。解説を見れば易しいと感じるだろうが、試験会場の緊張感の中で、すべての場合を漏れなく考えるのはなかなか難しいだろう。

全体として、方針は立ちやすい。また、計算量もそれほど多くなく、70分という試験時間を考えれば、合格ラインは高めだろう。一次合格は65%は欲しい。

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せは YMS ☎03-3370-0410 まで

☎ 03-3370-0410

受付時間 8~20時 土日祝可
<https://yms.ne.jp/>
 東京都渋谷区代々木 1-37-14



☎ 0120-146-156

携帯からOK 受付時間 9~21時 土日祝可
<https://www.mebio.co.jp/>
 大阪市中央区石町2-3-12ベルヴォア天満橋