# 日本医科大学（前期）　数学

2020年 2月 2日実施

[Ｉ] 以下の文章の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ．

実数の定数 $a$，$b$ $(a>0)$ に対して，２次関数 $f(x)=3ax^2+2x+b$ が

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0,\qquad \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=6$$

を満たすとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$b=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\pi},$$

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},$$

$$\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\pi}-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\pi^{\boxed{\text{シ}}}}$$

であることを用いれば，定積分

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2dx$$

が最小となる定数 $p$，$q$ の値は $p=\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}-\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}\,\pi^{\boxed{\text{テ}}}}$，$q=\boxed{\text{ト}}$ となる．

【解説】

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_0^1(3ax^2+b)dx=2(a+b)$$

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=2\int_0^1\{9a^2x^4+(6ab+4)x^2+b^2\}dx=2\left(\frac{9}{5}a^2+2ab+\frac{4}{3}+b^2\right)$$

したがって，

$$a+b=0\quad\cdots①,\qquad \frac{9}{5}a^2+2ab+\frac{4}{3}+b^2=3\quad\cdots②$$

② より，　$27a^2+30ab+15b^2=25 \iff 15(a+b)^2+12a^2=25$

① を代入して $a^2=\dfrac{25}{12}$ となり，$a>0$ より $a=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

また，$b=-a=-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ である．

$$\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+\cos\pi x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$I=\displaystyle\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ において，$x=\dfrac{2}{\pi}t$ と置換すると，

$$I=\frac{8}{\pi^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,dt=\frac{8}{\pi^3}\Big[t^2\sin t+2\cos t-2\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^3}$$

$J=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2 dx$ において，$p=\frac{\pi}{2}r$，$q=\frac{\pi}{2}s$ とおくと，

$$J=\frac{\pi^2}{4}\int_{-1}^{1}\left\{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(rf(x)+s)\right\}^2 dx$$

$$\frac{4}{\pi^2}J=\int_{-1}^{1}\left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+r^2\{f(x)\}^2+s^2-2rf(x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-2s\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+2rsf(x)\right]dx$$

これまでの計算結果を用いると，

$$\frac{4}{\pi^2}J=1+6r^2+2s^2-4r\int_0^1(3ax^2-a)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx-\frac{8}{\pi}s+0$$

$$=1+6r^2+2s^2-4ar\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right)-\frac{8}{\pi}s$$

$$=6r^2-4ar\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right)+2s^2-\frac{8}{\pi}s+1$$

$$=6\left\{r-\frac{a}{3}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right)\right\}^2+2\left(s-\frac{2}{\pi}\right)^2+(\text{定数})$$

したがって，$J$ が最小となる条件は，

$$r=\frac{a}{3}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{18}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right),\qquad s=\frac{2}{\pi}$$

$p=\frac{\pi}{2}r$，$q=\frac{\pi}{2}s$ に代入して，

$$p=\frac{5\sqrt{3}}{9}-\frac{20\sqrt{3}}{3\pi^2},\qquad q=1$$

［Ⅱ］ O を原点とする $xyz$ 空間において以下の各問いに答えよ.

問1　点$\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$を通り，ベクトル$\vec{n}=(-2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3})$に垂直な平面$\alpha$の方程式を求めよ.

問2　ベクトル$(0,\ 0,\ 1)$と問1の$\vec{n}$とのなす角$\theta$を求めよ.

問3　連立不等式$z \geqq 0$，$x^2+y^2+z^2 \leqq 9$で表される図形を，問1の平面$\alpha$によって2つの部分に分割するとき，点$(0,\ 0,\ 3)$を含む部分の体積を求めよ.

【解説】

問1　点A$\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$を通り，$\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\ \sqrt{5}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$に垂直な平面$\alpha$上の点をP$(x,\ y,\ z)$とおけば，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$より，$2x-\sqrt{5}\,y-\sqrt{3}\,z=0$.

問2　$\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$とおき，$\vec{d}$と$\vec{n}$なす角を$\theta\,(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$とおく．$|\vec{n}|=2\sqrt{3}$であるから，

$$\cos\theta=\frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}||\vec{n}|}=\frac{1}{2}.$$

したがって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$より，$\theta=60^\circ$.

問3　$z \geqq 0$，$x^2+y^2+z^2 \leqq 9$で表される半球体を平面$\alpha$で切るとき，平面$z=0$と$\alpha$とのなす角は，問2より$60^\circ$である.

すなわち，求める立体の体積は，半径3の球体を3分割したものであり，

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3\times\frac{1}{3}=12\pi.$$

［Ⅲ］ 正の実数 $t$, $k$ に対して，座標平面上の点 $\mathrm{T}_t(k)$ を次で定める．

$$\mathrm{T}_t(k)=\left(\frac{k}{1+t^2k^2},\ \frac{tk^2}{1+t^2k^2}\right)$$

また，各 $k$ に対して， $t$ が正の実数全体を動くときの点 $\mathrm{T}_t(k)$ の描く曲線を $C(k)$ とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問１ 次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に適する 数または式を解答欄に記入せよ．答えのみでよい．

$C(k)$ は点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ を中心とする，半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の一部である．

問２ 各 $t$ に対して， 点 $\mathrm{T}_t\left(\frac{1}{2}\right)$ における $C\left(\frac{1}{2}\right)$ の法線を $l_1(t)$， 点 $\mathrm{T}_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $l_2(t)$ とする．このとき， 2 直線 $l_1(t)$， $l_2(t)$ の方程式をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．

問３ 問２の２直線 $l_1(t)$， $l_2(t)$ の交点 $\mathrm{P}(t)$ の座標を求めよ．答えのみでよい．

問４ $t$ が正の実数全体を動くとき，問３で定めた点 $\mathrm{P}(t)$ が描く曲線は， $x$ 軸上に２つの焦点をもつ楕円の一部であることを示し，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さをそれぞれ求めよ．

【解説】

$$\mathrm{T}_t(k)=\left(\frac{k}{1+t^2k^2},\ \frac{tk^2}{1+t^2k^2}\right)$$

問１ $x=\dfrac{k}{1+t^2k^2}$ …①，$y=\dfrac{tk^2}{1+t^2k^2}$ を用いて，$t>0$，$k>0$ より，

$$y=tkx \iff t=\frac{y}{kx}$$

これを ① に代入し整理すると，

$$x=\frac{k}{1+\left(\frac{y}{kx}\right)^2k^2} \iff x^2+y^2-kx=0 \iff \left(x-\frac{k}{2}\right)^2+y^2=\frac{k^2}{4}.$$

したがって，$C(k)$ は点 $\left(\frac{k}{2},\ 0\right)$ を中心とし，半径 $\frac{k}{2}$ の円の一部である．

問２ $C(k)$ の中心を $\mathrm{A}(k)$ とおく．

$k=\frac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$ は $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$，$\mathrm{T}_t\left(\frac{1}{2}\right)$ は $\left(\frac{2}{4+t^2},\frac{t}{4+t^2}\right)$ であり，点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$ と点 $\mathrm{T}_t\left(\frac{1}{2}\right)$ を結ぶ直線が求める法線なので，これを求めて

$$l_1(t):\ 4tx-(4-t^2)y-t=0.$$

また，$k=1$ のとき，$\mathrm{A}(1)$ は $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$， $\mathrm{T}_t(1)$ は $\left(\frac{1}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2}\right)$ であり，点 $\mathrm{A}(1)$ と点 $\mathrm{T}_t(1)$ を結ぶ直線が 求める法線なので，これを求めて

$$l_2(t):\ 2tx-(1-t^2)y-t=0\ .$$

問３ 問２の２直線の交点を求めると，$\left(\frac{3}{2(t^2+2)},\ \frac{t}{t^2+2}\right)$ である．

問４ $x=\dfrac{3}{2(t^2+2)}$，$y=\dfrac{t}{t^2+2}$ とおく．点 $(x,\ y)$ が存在する図形の方程式は，２式より，

$$y=\frac{2x}{3}\cdot t \iff t=\frac{3y}{2x}$$

これを第１式に代入し，

$$x=\frac{3}{2\left\{\left(\frac{3y}{2x}\right)^2+2\right\}} \iff 8x^2-6x+9y^2=0 \iff \frac{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{9}{64}}+\frac{y^2}{\frac{1}{8}}=1.$$

したがって求める方程式は楕円であり，その焦点の座標は$\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$.

長軸の長さは$\frac{3}{4}$．短軸の長さは$\frac{\sqrt{2}}{2}$である.

［Ⅳ］ 初期時刻0で白球が3個あり，以下の規則で定まる確率に従って球の色が白から黒，または黒から白に変化するものとする．以下では，各時刻 $n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots)$ での白球の個数を $w(n)$，黒球の個数を $b(n)$ と表し $(w(n)+b(n)=3)$，また，実数 $x$ は $0<x<1$ を満たすとする．

規則1：$w(n)=3$ または $w(n)=2$ であるとき，時刻 $n$ での各白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{1}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{2}{3}$ の確率で白球のままである．また，時刻 $n$ での黒球は時刻 $n+1$ では確率 $x$ で白球となり，確率 $1-x$ で黒球のままである．

規則2：$w(n)=1$ であるとき，時刻 $n$ での白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{2}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{1}{3}$ の確率で白球のままである．また，時刻 $n$ での各黒球は時刻 $n+1$ では確率1で黒球のままである．

規則3：$w(n)=0$ であるとき，時刻 $n$ での各黒球は時刻 $n+1$ では確率1で黒球のままである．

各時刻 $n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，$w(n)=3$ である確率を $p_n$，$w(n)=2$ である確率を $q_n$，$w(n)=1$ である確率を $r_n$ とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問1 $p_1$，$q_1$ をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．

問2 次の連立漸化式が成り立つように，$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$ に適する，$n$ に無関係な数または式を解答欄に記入せよ．導出過程についても説明せよ．

$$\begin{cases} p_{n+1}=\boxed{\text{ア}}\,p_n+\boxed{\text{イ}}\,q_n \\ q_{n+1}=\boxed{\text{ウ}}\,p_n+\boxed{\text{エ}}\,q_n \end{cases} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

問3 次の連立漸化式が成り立つような実数 $\alpha,\ \beta$（ただし，$\alpha<\beta$）の組を求め，$x$ を用いて表せ．答えのみでよい．

$$\begin{cases} p_{n+2}-(\alpha+\beta)p_{n+1}+\alpha\beta p_n=0 \\ q_{n+2}-(\alpha+\beta)q_{n+1}+\alpha\beta q_n=0 \end{cases} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

問4 数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ の一般項を関数 $F(x),\ G(x),\ H(x),\ I(x)$ を用いて

$$\begin{cases} p_n=F(x)\alpha^n+G(x)\beta^n \\ q_n=H(x)\alpha^n+I(x)\beta^n \end{cases} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表したとき，$F(x),\ G(x),\ H(x),\ I(x)$ を $x$ の関数としてそれぞれ具体的に求めよ．答えのみでよい．

問5 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$ が存在し，かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}<1$ が成り立つための $x$ に対する必要十分条件を求めよ．

【解説】

問1 $p_1$ は白球3個すべてが白球のままである確率なので，$p_1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$．

また，$q_1$ は白球3個のうち1個が黒球に変化し，2個は白球のままなので，$q_1={}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$．

問2 $w(n+1)=3$ となるのは，

ア） $w(n)=3$ のとき，白球3個すべてが白球のままとなる … $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

イ） $w(n)=2$ のとき，黒球1個が白球に変化し，白球2個は白球のままとなる … $x\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}x$

ときである．

また，$w(n+1)=2$ となるのは，

ウ） $w(n)=3$ のとき，いずれか1個の白球が黒球に変化する … ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$

エ） $w(n)=2$ のとき，どの球の色も変化しない，または，白球2個のうち1個が黒球に変化し，黒球1個は白球に変化する … $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2(1-x)+{}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot x=\dfrac{4}{9}$

ときである．

よって，それぞれ互いに排反であるから

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{8}{27}p_n+\dfrac{4}{9}xq_n \\ q_{n+1}=\dfrac{4}{9}p_n+\dfrac{4}{9}q_n \end{cases}.$$

問3　問2第1式より，

$$\frac{4}{9}q_n=\frac{1}{x}p_{n+1}-\frac{8}{27x}p_n\ ,\quad q_{n+1}=\frac{9}{4x}p_{n+2}-\frac{2}{3x}p_{n+1}$$

であるので，第2式に代入して

$$\frac{9}{4x}p_{n+2}-\frac{2}{3x}p_{n+1}=\frac{4}{9}p_n+\frac{1}{x}p_{n+1}-\frac{8}{27x}p_n$$

整理して

$$243p_{n+2}-180p_{n+1}+(-48x+32)p_n=0$$

$\alpha,\beta$ は特性方程式 $243x^2-180x+(-48x+32)=0$ の2解である．解の公式を用いて

$$x=\frac{10\pm2\sqrt{36x+1}}{27}$$

が得られる．よって，$\alpha<\beta$ より

$$\alpha=\frac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}\ ,\quad \beta=\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}.$$

問4　問3を変形して $p_n,q_n$ に関してそれぞれ

$$\begin{cases} p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n) \\ p_{n+2}-\beta p_{n+1}=\alpha(p_{n+1}-\beta p_n) \end{cases}\quad\cdots①$$

$$\begin{cases} q_{n+2}-\alpha q_{n+1}=\beta(q_{n+1}-\alpha q_n) \\ q_{n+2}-\beta q_{n+1}=\alpha(q_{n+1}-qp_n) \end{cases}\quad\cdots②$$

が得られる．①について

$$\begin{cases} p_{n+1}-\alpha p_n=\beta^n(p_1-\alpha p_0) \\ p_{n+1}-\beta p_n=\alpha^n(p_1-\beta p_0) \end{cases}$$

となるので，辺々引いて，$\alpha\fallingdotseq\beta$ に注意して

$$p_n=\frac{\beta^n(p_1-\alpha p_0)-\alpha^n(p_1-\beta p_0)}{\beta-\alpha}$$

したがって，問2の $\alpha,\beta$ および $p_0=1,\ p_1=\dfrac{8}{27}$ を代入して

$$p_n=\frac{\beta^n\left(\dfrac{8}{27}-\dfrac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}\cdot1\right)-\alpha^n\left(\dfrac{8}{27}-\dfrac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}\cdot1\right)}{\dfrac{4\sqrt{36x+1}}{27}}$$

$$=\frac{\sqrt{36x+1}+1}{2\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}\beta^n$$

よって，

$$F(x)=\frac{\sqrt{36x+1}+1}{2\sqrt{36x+1}}\ ,\quad G(x)=\frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}.$$

続いて，②について，①と同様にして

$$q_n=-\frac{3}{\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\frac{3}{\sqrt{36x+1}}\beta^n$$

よって

$$H(x)=-\frac{3}{\sqrt{36x+1}}\ ,\quad I(x)=\frac{3}{\sqrt{36x+1}}.$$

問5　$w(n+1)=1$ となるのは，

オ）　$w(n)=3$ のとき，白球 3 個のうち 2 つが黒球に変化し，1 個は白球のままとなる　…　${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

カ）　$w(n)=2$ のとき，白球 2 個のうち 1 つが黒球に変化し，1 個は白球のままとなり，黒球 1 個は黒球のままとなる場合と，白球 2 個がともに黒球に変化し，黒球 1 個が白球に変化する場合とがある

…　${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1-x)+\left(\frac{1}{3}\right)^2x=\frac{4-3x}{9}$

キ）　$w(n)=1$ のとき，白球 1 個は白球のままであり，黒球 2 個もともに黒球のままとなる　…　$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot1^2=\frac{1}{3}$

ときである．

よって，それぞれ互いに排反であるから，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+\frac{4-3x}{9}q_n+\frac{2}{9}p_n.$$

問 4 より，$q_n=H(x)\alpha^n+I(x)\beta^n$，$p_n=F(x)\alpha^n+G(x)\beta^n$ であるから，これを用いて，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+\left\{\frac{4-3x}{9}H(x)+\frac{2}{9}F(x)\right\}\alpha^n+\left\{\frac{4-3x}{9}I(x)+\frac{2}{9}G(x)\right\}\beta^n.$$

と表せるので，$\frac{4-3x}{9}H(x)+\frac{2}{9}F(x)=J$，$\frac{4-3x}{9}I(x)+\frac{2}{9}G(x)=K$ とおく．すなわち，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+J\alpha^n+K\beta^n.\quad\cdots③$$

ここで，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$，$a_n=r_n+s\cdot J\alpha^n+t\cdot K\beta^n$ を満たすような実数 $(s,\ t)$ を定める．2 式から

$$r_{n+1}+s\cdot J\alpha^{n+1}+t\cdot K\beta^{n+1}=\frac{1}{3}(r_n+s\cdot J\alpha^n+t\cdot K\beta^n).$$

$$\iff r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+s\left(\frac{1}{3}-\alpha\right)\cdot J\alpha^n+t\left(\frac{1}{3}-\beta\right)\cdot K\beta^n.\quad\cdots④$$

③ と ④ が一致するので，$s=\frac{3}{1-3\alpha}$，$t=\frac{3}{1-3\beta}$ である．このとき，$a_0=r_0+s\cdot J+t\cdot K=s\cdot J+t\cdot K$ より，

$$a_n=(s\cdot J+t\cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n.\quad\iff\quad r_n=(s\cdot J+t\cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n-s\cdot J\alpha^n-t\cdot K\beta^n.$$

したがって，

$$\frac{r_n}{q_n}=\frac{(s\cdot J+t\cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n-s\cdot J\alpha^n-t\cdot K\beta^n}{H(x)\alpha^n+I(x)\beta^n}.$$

ここで，$|\alpha|<\beta$ であり，$0<x<1$ から，

$$\beta=\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}>\frac{10+2\cdot1}{27}>\frac{1}{3}.$$

したがって，$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<1$，$\left|\frac{1}{3\beta}\right|<1$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(s\cdot J+t\cdot K)\left(\frac{1}{3\beta}\right)^n-s\cdot J\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-t\cdot K}{H(x)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+I(x)}=-\frac{t\cdot K}{I(x)}.$$

極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$ が存在し，かつ $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}<1$ が成り立つための必要十分条件は，

$$0<x<1\quad\text{かつ}\quad-\frac{t\cdot K}{I(x)}<1$$

である．

$$-\frac{t\cdot K}{I(x)}=\frac{-\frac{3}{1-3\beta}\left\{\frac{4-3x}{9}I(x)+\frac{2}{9}G(x)\right\}}{I(x)}=\frac{-\frac{3}{1-3\beta}\left(\frac{4-3x}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{36x+1}}+\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}\right)}{\frac{3}{\sqrt{36x+1}}}<1.$$

$$\iff\frac{4-3x}{3}+\frac{\sqrt{36x+1}-1}{9}<3\cdot\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}-1.$$

$$\Longleftrightarrow\ 10-9x<\sqrt{36x+1}.$$

$0<x<1$ であるから

$$(10-9x)^2<36x+1 \text{ かつ } 0<x<1.$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{4-\sqrt{5}}{3}<x<\frac{4+\sqrt{5}}{3} \text{ かつ } 0<x<1.$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{4-\sqrt{5}}{3}<x<1.$$

【補足】

確率漸化式を立てる問題では，もれなく重複なく漸化式を立てるために，先にすべての場合を求めておいた方が安全.

$w(n)=3$ のとき

（ⅰ） 3 個の白球がすべて白球になるとき　$w(n+1)=3$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

（ⅱ） 3 個の白球のうち 2 個が白球のまま，1 個が黒球となるとき　$w(n+1)=2$.

$${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}.$$

（ⅲ） 3 個の白球のうち 1 個が白球のまま，2 個が黒球となるとき　$w(n+1)=1$.

$${}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}.$$

（ⅳ） 3 個の白球がすべて黒球になるとき　$w(n+1)=0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

$w(n)=2$ のとき

（ⅴ） 黒球 1 個が白球に変化し，白球 2 個は白球のままとなるとき　$w(n+1)=3$

$$x\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}x.$$

（ⅵ） どの球の色も変化しない，または，白球 2 個のうち 1 個が黒球に変化し，黒球 1 個は白球に変化するとき　$w(n+1)=2$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2(1-x)+{}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdot x=\frac{4}{9}.$$

（ⅶ） 白球 2 個のうち 1 個が黒球に変化し黒球はそのままとなる，または，すべての球が変化するとき　$w(n+1)=1$.

$${}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1-x)+\left(\frac{1}{3}\right)^2x=\frac{4-3x}{9}.$$

（ⅷ） すべての球が黒球に変化するとき　$w(n+1)=0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2(1-x)=\frac{1-x}{9}.$$

$w(n)=1$ のとき

（ⅸ） すべての球の色が変化しないとき　$w(n+1)=1$.

$$\frac{1}{3}\cdot 1^2=\frac{1}{3}.$$

（ⅹ） すべての球が黒球に変化するとき　$w(n+1)=0$.

$$\frac{2}{3}\cdot 1^2=\frac{2}{3}.$$

$w(n)=0$ のとき

（xi） すべての球がそのままのとき　$w(n+1)=0$.

$$1^3=1.$$

これらの遷移を表にまとめると次のようになる.

| | $w(n)=3$ | $w(n)=2$ | $w(n)=1$ | $w(n)=0$ |
|---|---|---|---|---|
| $w(n+1)=3$ | $\dfrac{8}{27}$ | $\dfrac{4x}{9}$ | 0 | 0 |
| $w(n+1)=2$ | $\dfrac{12}{27}$ | $\dfrac{4}{9}$ | 0 | 0 |
| $w(n+1)=1$ | $\dfrac{6}{27}$ | $\dfrac{4-3x}{9}$ | $\dfrac{1}{3}$ | 0 |
| $w(n+1)=0$ | $\dfrac{1}{27}$ | $\dfrac{1-x}{9}$ | $\dfrac{2}{3}$ | 1 |
| 計 | 1 | 1 | 1 | 1 |

この表において，縦に並べた確率の和は必ず 1 であり，横に考えると漸化式が立つので，

$$p_{n+1}=\frac{8}{27}p_n+\frac{4x}{9}q_n.$$

$$q_{n+1}=\frac{4}{9}p_n+\frac{4}{9}q_n.$$

$$r_{n+1}=\frac{2}{9}p_n+\frac{4-3x}{9}q_n+\frac{1}{3}r_n.$$

このように漏れなく漸化式を立てることができる．

【講評】※（　）は難易度を表している．

$\boxed{1}$（標準）

途中までは，素直に計算するだけの平易な問題であるが，最後の部分だけがかなり煩雑になり，正解にたどり着くまでに時間が掛かる．ここで，時間を大幅に使ってしまった受験生も多かったと考えられる．

$\boxed{2}$（標準）

問 1，問 2 は空間の平面の方程式に関する基礎問題である． 問 3 が幾何考察と空間認識を少し必要とする問題で，ここだけ解けなかった受験生も多かったと考えられる．ただ，計算量が少ないのがこの大問 2 だけのため，一次突破のためにはなんとか完答したい問題である．

$\boxed{3}$（標準）

軌跡と楕円に関する基本問題であるが，計算ミスを 1 つ起こすと，それを修正するのが困難な問題である．法線を接線と勘違いしてしまった受験生も多かったと思われる．ただし，内容は極めて基本的であるので，この大問 3 も完答したい問題である．

$\boxed{4}$（難）

時間制限的にも厳しい問題である．問 2 まではできても，その後の計算量が非常に多く，問 3 までできれば十分だろう．

全体として，方針は立ちやすいが，計算がしっかりできるかを問う問題構成になっている．常日頃から，正確な計算に拘って問題に取り組んでいるかを試す試験である． 1 次合格ラインは60％程度と考えられる．