

日本医科大学(前期) 数学

2020年 2月 2日実施

[I] 以下の文章の ア ~ ト に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。

実数の定数 a, b ($a > 0$) に対して, 2 次関数 $f(x) = 3ax^2 + 2x + b$ が

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = 6$$

を満たすとき, $a = \frac{\text{ア} \sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$, $b = -\frac{\text{エ} \sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$ である。

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\text{キ}}{\pi},$$

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}},$$

$$\int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\text{コ}}{\pi} - \frac{\text{サ}}{\pi \text{シ}}$$

であることを用いれば, 定積分

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (pf(x) + q) \right\}^2 dx$$

が最小となる定数 p, q の値は $p = \frac{\text{ス} \sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}} - \frac{\text{タ} \sqrt{\text{チ}}}{\text{ツ} \pi \text{テ}}$, $q = \text{ト}$ となる。

【解説】

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (3ax^2 + b) dx = 2(a + b)$$

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = 2 \int_0^1 \{9a^2 x^4 + (6ab + 4)x^2 + b^2\} dx = 2 \left(\frac{9}{5} a^2 + 2ab + \frac{4}{3} + b^2 \right)$$

したがって,

$$a + b = 0 \quad \dots \text{①}, \quad \frac{9}{5} a^2 + 2ab + \frac{4}{3} + b^2 = 3 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{②より, } 27a^2 + 30ab + 15b^2 = 25 \iff 15(a + b)^2 + 12a^2 = 25$$

$$\text{①を代入して } a^2 = \frac{25}{12} \text{ となり, } a > 0 \text{ より } a = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

また, $b = -a = -\frac{5\sqrt{3}}{6}$ である。

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos \pi x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$I = \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ において, $x = \frac{2}{\pi} t$ と置換すると,

$$I = \frac{8}{\pi^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t dt = \frac{8}{\pi^3} \left[t^2 \sin t + 2 \cos t - 2 \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3}$$

$$J = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (pf(x) + q) \right\}^2 dx \text{ において, } p = \frac{\pi}{2}r, q = \frac{\pi}{2}s \text{ とおくと,}$$

$$J = \frac{\pi^2}{4} \int_{-1}^1 \left\{ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (rf(x) + s) \right\}^2 dx$$

$$\frac{4}{\pi^2} J = \int_{-1}^1 \left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + r^2\{f(x)\}^2 + s^2 - 2rf(x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 2s\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2rsf(x) \right] dx$$

これまでの計算結果を用いると,

$$\frac{4}{\pi^2} J = 1 + 6r^2 + 2s^2 - 4r \int_0^1 (3ax^2 - a) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \frac{8}{\pi} s + 0$$

$$= 1 + 6r^2 + 2s^2 - 4ar \left(\frac{4}{\pi} - \frac{48}{\pi^3} \right) - \frac{8}{\pi} s$$

$$= 6r^2 - 4ar \left(\frac{4}{\pi} - \frac{48}{\pi^3} \right) + 2s^2 - \frac{8}{\pi} s + 1$$

$$= 6 \left\{ r - \frac{a}{3} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{48}{\pi^3} \right) \right\}^2 + 2 \left(s - \frac{2}{\pi} \right)^2 + (\text{定数})$$

したがって, J が最小となる条件は,

$$r = \frac{a}{3} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{48}{\pi^3} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{18} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{48}{\pi^3} \right), \quad s = \frac{2}{\pi}$$

$p = \frac{\pi}{2}r, q = \frac{\pi}{2}s$ に代入して,

$$p = \frac{5\sqrt{3}}{9} - \frac{20\sqrt{3}}{3\pi^2}, \quad q = 1$$

[II] O を原点とする xyz 空間において以下の各問いに答えよ.

問1 点 $\left(1, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り, ベクトル $\vec{n} = (-2, \sqrt{5}, \sqrt{3})$ に垂直な平面 α の方程式を求めよ.

問2 ベクトル $(0, 0, 1)$ と問1の \vec{n} とのなす角 θ を求めよ.

問3 連立不等式 $z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ で表される図形を, 問1の平面 α によって2つの部分に分割するとき, 点 $(0, 0, 3)$ を含む部分の体積を求めよ.

【解説】

問1 点 $A\left(1, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り, $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ に垂直な平面 α 上の点を $P(x, y, z)$ とおけば, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$ より,

$$2x - \sqrt{5}y - \sqrt{3}z = 0.$$

問2 $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき, \vec{d} と \vec{n} のなす角を $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ とおく. $|\vec{n}| = 2\sqrt{3}$ であるから,

$$\cos \theta = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2}.$$

したがって, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\theta = 60^\circ$.

問3 $z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ で表される半球体を平面 α で切るとき, 平面 $z=0$ と α とのなす角は, 問2より 60° である.

すなわち, 求める立体の体積は, 半径3の球体を3分割したものであり,

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \times \frac{1}{3} = 12\pi.$$

【Ⅲ】 正の実数 t, k に対して、座標平面上の点 $T_t(k)$ を次で定める。

$$T_t(k) = \left(\frac{k}{1+t^2k^2}, \frac{tk^2}{1+t^2k^2} \right)$$

また、各 k に対して、 t が正の実数全体を動くときの点 $T_t(k)$ の描く曲線を $C(k)$ とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問1 次の ア ~ ウ に適する数または式を解答欄に記入せよ。答えのみでよい。

$C(k)$ は点 ア , イ を中心とする、半径が ウ の円の一部である。

問2 各 t に対して、点 $T_t\left(\frac{1}{2}\right)$ における $C\left(\frac{1}{2}\right)$ の法線を $l_1(t)$ 、点 $T_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $l_2(t)$ とする。このとき、2直線 $l_1(t), l_2(t)$ の方程式をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問3 問2の2直線 $l_1(t), l_2(t)$ の交点 $P(t)$ の座標を求めよ。答えのみでよい。

問4 t が正の実数全体を動くとき、問3で定めた点 $P(t)$ が描く曲線は、 x 軸上に2つの焦点をもつ楕円の一部であることを示し、その焦点の座標、長軸の長さ、短軸の長さをそれぞれ求めよ。

【解説】

$$T_t(k) = \left(\frac{k}{1+t^2k^2}, \frac{tk^2}{1+t^2k^2} \right)$$

問1 $x = \frac{k}{1+t^2k^2}$ …①, $y = \frac{tk^2}{1+t^2k^2}$ を用いて、 $t > 0, k > 0$ より、

$$y = tkx \iff t = \frac{y}{kx}$$

これを①に代入し整理すると、

$$x = \frac{k}{1 + \left(\frac{y}{kx}\right)^2 k^2} \iff x^2 + y^2 - kx = 0 \iff \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4}.$$

したがって、 $C(k)$ は点 $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ を中心とし、半径 $\frac{k}{2}$ の円の一部である。

問2 $C(k)$ の中心を $A(k)$ とおく。

$k = \frac{1}{2}$ のとき、 $A\left(\frac{1}{2}\right)$ は $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 、 $T_t\left(\frac{1}{2}\right)$ は $\left(\frac{2}{4+t^2}, \frac{t}{4+t^2}\right)$ であり、点 $A\left(\frac{1}{2}\right)$ と点 $T_t\left(\frac{1}{2}\right)$ を結ぶ直線が求める法線なので、これを求めて

$$l_1(t) : 4tx - (4-t^2)y - t = 0.$$

また、 $k=1$ のとき、 $A(1)$ は $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 、 $T_t(1)$ は $\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$ であり、点 $A(1)$ と点 $T_t(1)$ を結ぶ直線が求める法線なので、これを求めて

$$l_2(t) : 2tx - (1-t^2)y - t = 0.$$

問3 問2の2直線の交点を求めると、 $\left(\frac{3}{2(t^2+2)}, \frac{t}{t^2+2}\right)$ である。

問4 $x = \frac{3}{2(t^2+2)}$, $y = \frac{t}{t^2+2}$ とおく。点 (x, y) が存在する図形の方程式は、2式より、

$$y = \frac{2x}{3} \cdot t \iff t = \frac{3y}{2x}$$

これを第1式に代入し、

$$x = \frac{3}{2\left\{\left(\frac{3y}{2x}\right)^2 + 2\right\}} \iff 8x^2 - 6x + 9y^2 = 0 \iff \frac{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2}{\frac{9}{64}} + \frac{y^2}{\frac{1}{8}} = 1.$$

したがって求める方程式は楕円であり、その焦点の座標は $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

長軸の長さは $\frac{3}{4}$. 短軸の長さは $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である.

[IV] 初期時刻0で白球が3個あり、以下の規則で定まる確率に従って球の色が白から黒、または黒から白に変化するものとする。以下では、各時刻 n ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) での白球の個数を $w(n)$ 、黒球の個数を $b(n)$ と表し ($w(n)+b(n)=3$)、また、実数 x は $0 < x < 1$ を満たすとする。

規則1: $w(n)=3$ または $w(n)=2$ であるとき、時刻 n での各白球は時刻 $n+1$ では $\frac{1}{3}$ の確率で黒球となり、 $\frac{2}{3}$ の確率で白球のままである。また、時刻 n での黒球は時刻 $n+1$ では確率 x で白球となり、確率 $1-x$ で黒球のままである。

規則2: $w(n)=1$ であるとき、時刻 n での白球は時刻 $n+1$ では $\frac{2}{3}$ の確率で黒球となり、 $\frac{1}{3}$ の確率で白球のままである。また、時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである。

規則3: $w(n)=0$ であるとき、時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである。

各時刻 n ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) に対して、 $w(n)=3$ である確率を p_n 、 $w(n)=2$ である確率を q_n 、 $w(n)=1$ である確率を r_n とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問1 p_1, q_1 をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問2 次の連立漸化式が成り立つように、 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{エ}}$ に適する、 n に無関係な数または式を解答欄に記入せよ。導出過程についても説明せよ。

$$\begin{cases} p_{n+1} = \boxed{\text{ア}} p_n + \boxed{\text{イ}} q_n \\ q_{n+1} = \boxed{\text{ウ}} p_n + \boxed{\text{エ}} q_n \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

問3 次の連立漸化式が成り立つような実数 α, β (ただし、 $\alpha < \beta$) の組を求め、 x を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\begin{cases} p_{n+2} - (\alpha + \beta)p_{n+1} + \alpha\beta p_n = 0 \\ q_{n+2} - (\alpha + \beta)q_{n+1} + \alpha\beta q_n = 0 \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

問4 数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ の一般項を関数 $F(x), G(x), H(x), I(x)$ を用いて

$$\begin{cases} p_n = F(x)\alpha^n + G(x)\beta^n \\ q_n = H(x)\alpha^n + I(x)\beta^n \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

と表したとき、 $F(x), G(x), H(x), I(x)$ を x の関数としてそれぞれ具体的に求めよ。答えのみでよい。

問5 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}$ が存在し、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} < 1$ が成り立つための x に対する必要十分条件を求めよ。

【解説】

問1 p_1 は白球3個すべてが白球のままである確率なので、 $p_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ 。

また、 q_1 は白球3個のうち1個が黒球に変化し、2個は白球のままなので、 $q_1 = {}_3C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$ 。

問2 $w(n+1)=3$ となるのは、

ア) $w(n)=3$ のとき、白球3個すべてが白球のままとなる $\dots \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

イ) $w(n)=2$ のとき、黒球1個が白球に変化し、白球2個は白球のままとなる $\dots x \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}x$

ときである。

また、 $w(n+1)=2$ となるのは、

ウ) $w(n)=3$ のとき、いずれか1個の白球が黒球に変化する $\dots {}_3C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

エ) $w(n)=2$ のとき、どの球の色も変化しない、または、白球2個のうち1個が黒球に変化し、黒球1個は白球に

変化する $\dots \left(\frac{2}{3}\right)^2 (1-x) + {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \cdot x = \frac{4}{9}$

ときである。

よって、それぞれ互いに排反であるから

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{8}{27}p_n + \frac{4}{9}xq_n \\ q_{n+1} = \frac{4}{9}p_n + \frac{4}{9}q_n \end{cases}.$$

問3 問2第1式より,

$$\frac{4}{9}q_n = \frac{1}{x}p_{n+1} - \frac{8}{27x}p_n, \quad q_{n+1} = \frac{9}{4x}p_{n+2} - \frac{2}{3x}p_{n+1}$$

であるので, 第2式に代入して

$$\frac{9}{4x}p_{n+2} - \frac{2}{3x}p_{n+1} = \frac{4}{9}p_n + \frac{1}{x}p_{n+1} - \frac{8}{27x}p_n$$

整理して

$$243p_{n+2} - 180p_{n+1} + (-48x + 32)p_n = 0$$

α, β は特性方程式 $243x^2 - 180x + (-48x + 32) = 0$ の2解である. 解の公式を用いて

$$x = \frac{10 \pm 2\sqrt{36x+1}}{27}$$

が得られる. よって, $\alpha < \beta$ より

$$\alpha = \frac{10 - 2\sqrt{36x+1}}{27}, \quad \beta = \frac{10 + 2\sqrt{36x+1}}{27}.$$

問4 問3を変形して p_n, q_n に関してそれぞれ

$$\begin{cases} p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n) & \dots \textcircled{1} \\ p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{n+2} - \alpha q_{n+1} = \beta(q_{n+1} - \alpha q_n) & \dots \textcircled{2} \\ q_{n+2} - \beta q_{n+1} = \alpha(q_{n+1} - \beta q_n) \end{cases}$$

が得られる. ①について

$$\begin{cases} p_{n+1} - \alpha p_n = \beta^n(p_1 - \alpha p_0) \\ p_{n+1} - \beta p_n = \alpha^n(p_1 - \beta p_0) \end{cases}$$

となるので, 辺々引いて, $\alpha \neq \beta$ に注意して

$$p_n = \frac{\beta^n(p_1 - \alpha p_0) - \alpha^n(p_1 - \beta p_0)}{\beta - \alpha}$$

したがって, 問2の α, β および $p_0 = 1, p_1 = \frac{8}{27}$ を代入して

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\beta^n \left(\frac{8}{27} - \frac{10 - 2\sqrt{36x+1}}{27} \cdot 1 \right) - \alpha^n \left(\frac{8}{27} - \frac{10 + 2\sqrt{36x+1}}{27} \cdot 1 \right)}{\frac{4\sqrt{36x+1}}{27}} \\ &= \frac{\sqrt{36x+1} + 1}{2\sqrt{36x+1}} \alpha^n + \frac{\sqrt{36x+1} - 1}{2\sqrt{36x+1}} \beta^n \end{aligned}$$

よって,

$$F(x) = \frac{\sqrt{36x+1} + 1}{2\sqrt{36x+1}}, \quad G(x) = \frac{\sqrt{36x+1} - 1}{2\sqrt{36x+1}}.$$

続いて, ②について, ①と同様にして

$$q_n = -\frac{3}{\sqrt{36x+1}} \alpha^n + \frac{3}{\sqrt{36x+1}} \beta^n$$

よって

$$H(x) = -\frac{3}{\sqrt{36x+1}}, \quad I(x) = \frac{3}{\sqrt{36x+1}}.$$

問5 $w(n+1) = 1$ となるのは,

オ) $w(n)=3$ のとき, 白球 3 個のうち 2 つが黒球に変化し, 1 個は白球のままとなる $\dots {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

カ) $w(n)=2$ のとき, 白球 2 個のうち 1 つが黒球に変化し, 1 個は白球のままとなり, 黒球 1 個は黒球のままとなる場合と, 白球 2 個がともに黒球に変化し, 黒球 1 個が白球に変化する場合とがある

$$\dots {}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1-x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 x = \frac{4-3x}{9}$$

キ) $w(n)=1$ のとき, 白球 1 個は白球のままであり, 黒球 2 個もともに黒球のままとなる $\dots \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 1^2 = \frac{1}{3}$

ときである.

よって, それぞれ互いに排反であるから,

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{4-3x}{9}q_n + \frac{2}{9}p_n.$$

問 4 より, $q_n = H(x)\alpha^n + I(x)\beta^n$, $p_n = F(x)\alpha^n + G(x)\beta^n$ であるから, これを用いて,

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \left\{\frac{4-3x}{9}H(x) + \frac{2}{9}F(x)\right\}\alpha^n + \left\{\frac{4-3x}{9}I(x) + \frac{2}{9}G(x)\right\}\beta^n.$$

と表せるので, $\frac{4-3x}{9}H(x) + \frac{2}{9}F(x) = J$, $\frac{4-3x}{9}I(x) + \frac{2}{9}G(x) = K$ とおく. すなわち,

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + J\alpha^n + K\beta^n. \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, $a_n = r_n + s \cdot J\alpha^n + t \cdot K\beta^n$ を満たすような実数 (s, t) を定める. 2 式から

$$r_{n+1} + s \cdot J\alpha^{n+1} + t \cdot K\beta^{n+1} = \frac{1}{3}(r_n + s \cdot J\alpha^n + t \cdot K\beta^n).$$

$$\iff r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + s\left(\frac{1}{3} - \alpha\right) \cdot J\alpha^n + t\left(\frac{1}{3} - \beta\right) \cdot K\beta^n. \quad \dots \textcircled{4}$$

③ と ④ が一致するので, $s = \frac{3}{1-3\alpha}$, $t = \frac{3}{1-3\beta}$ である. このとき, $a_0 = r_0 + s \cdot J + t \cdot K = s \cdot J + t \cdot K$ より,

$$a_n = (s \cdot J + t \cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n. \iff r_n = (s \cdot J + t \cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n - s \cdot J\alpha^n - t \cdot K\beta^n.$$

したがって,

$$\frac{r_n}{q_n} = \frac{(s \cdot J + t \cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n - s \cdot J\alpha^n - t \cdot K\beta^n}{H(x)\alpha^n + I(x)\beta^n}.$$

ここで, $|\alpha| < \beta$ であり, $0 < x < 1$ から,

$$\beta = \frac{10 + 2\sqrt{36x+1}}{27} > \frac{10 + 2 \cdot 1}{27} > \frac{1}{3}.$$

したがって, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$, $\left|\frac{1}{3\beta}\right| < 1$ であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s \cdot J + t \cdot K)\left(\frac{1}{3\beta}\right)^n - s \cdot J\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n - t \cdot K}{H(x)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + I(x)} = -\frac{t \cdot K}{I(x)}.$$

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}$ が存在し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} < 1$ が成り立つための必要十分条件は,

$$0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad -\frac{t \cdot K}{I(x)} < 1$$

である.

$$-\frac{t \cdot K}{I(x)} = \frac{-\frac{3}{1-3\beta}\left\{\frac{4-3x}{9}I(x) + \frac{2}{9}G(x)\right\}}{I(x)} = \frac{-\frac{3}{1-3\beta}\left(\frac{4-3x}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{36x+1}} + \frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}\right)}{\frac{3}{\sqrt{36x+1}}} < 1.$$

$$\iff \frac{4-3x}{3} + \frac{\sqrt{36x+1}-1}{9} < 3 \cdot \frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27} - 1.$$

$$\Leftrightarrow 10 - 9x < \sqrt{36x + 1}.$$

$0 < x < 1$ であるから

$$(10 - 9x)^2 < 36x + 1 \text{ かつ } 0 < x < 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{5}}{3} < x < \frac{4 + \sqrt{5}}{3} \text{ かつ } 0 < x < 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{5}}{3} < x < 1.$$

【補足】

確率漸化式を立てる問題では、もれなく重複なく漸化式を立てるために、先にすべての場合を求めておいた方が安全.

$w(n) = 3$ のとき

(i) 3個の白球がすべて白球になるとき $w(n+1) = 3$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

(ii) 3個の白球のうち2個が白球のまま、1個が黒球になるとき $w(n+1) = 2$.

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{12}{27}.$$

(iii) 3個の白球のうち1個が白球のまま、2個が黒球になるとき $w(n+1) = 1$.

$${}_3C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}.$$

(iv) 3個の白球がすべて黒球になるとき $w(n+1) = 0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$w(n) = 2$ のとき

(v) 黒球1個が白球に変化し、白球2個は白球のままとなるとき $w(n+1) = 3$

$$x \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}x.$$

(vi) どの球の色も変化しない、または、白球2個のうち1個が黒球に変化し、黒球1個は白球に変化するとき

$$w(n+1) = 2.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2(1-x) + {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \cdot x = \frac{4}{9}.$$

(vii) 白球2個のうち1個が黒球に変化し黒球はそのままとなる、または、すべての球が変化するとき $w(n+1) = 1$.

$${}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) (1-x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 x = \frac{4-3x}{9}.$$

(viii) すべての球が黒球に変化するとき $w(n+1) = 0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2(1-x) = \frac{1-x}{9}.$$

$w(n) = 1$ のとき

(ix) すべての球の色が変化しないとき $w(n+1) = 1$.

$$\frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{3}.$$

(x) すべての球が黒球に変化するとき $w(n+1) = 0$.

$$\frac{2}{3} \cdot 1^2 = \frac{2}{3}.$$

$w(n) = 0$ のとき

(xi) すべての球がそのままのとき $w(n+1) = 0$.

$$1^3 = 1.$$

これらの遷移を表にまとめると次のようになる.

	$w(n)=3$	$w(n)=2$	$w(n)=1$	$w(n)=0$
$w(n+1)=3$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4x}{9}$	0	0
$w(n+1)=2$	$\frac{12}{27}$	$\frac{4}{9}$	0	0
$w(n+1)=1$	$\frac{6}{27}$	$\frac{4-3x}{9}$	$\frac{1}{3}$	0
$w(n+1)=0$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1-x}{9}$	$\frac{2}{3}$	1
計	1	1	1	1

この表において、縦に並べた確率の和は必ず1であり、横に考えると漸化式が立つので、

$$p_{n+1} = \frac{8}{27}p_n + \frac{4x}{9}q_n.$$

$$q_{n+1} = \frac{4}{9}p_n + \frac{4}{9}q_n.$$

$$r_{n+1} = \frac{2}{9}p_n + \frac{4-3x}{9}q_n + \frac{1}{3}r_n.$$

このように漏れなく漸化式を立てることができる。

【講評】※ () は難易度を表している。

① (標準)

途中までは、素直に計算するだけの平易な問題であるが、最後の部分だけがかかなり煩雑になり、正解にたどり着くまでに時間が掛かる。ここで、時間を大幅に使ってしまった受験生も多かったと考えられる。

② (標準)

問1、問2は空間の平面の方程式に関する基礎問題である。問3が幾何考察と空間認識を少し必要とする問題で、ここだけ解けなかった受験生も多かったと考えられる。ただ、計算量が少ないのがこの大問2だけのため、一次突破のためにはなんとか完答したい問題である。

③ (標準)

軌跡と楕円に関する基本問題であるが、計算ミスを1つ起こすと、それを修正するのが困難な問題である。法線を接線と勘違いしてしまった受験生も多かったと思われる。ただし、内容は極めて基本的であるので、この大問3も完答したい問題である。

④ (難)

時間制限的にも厳しい問題である。問2まではできて、その後の計算量が非常に多く、問3までできれば十分だろう。

全体として、方針は立ちやすいが、計算がしっかりできるかを問う問題構成になっている。常日頃から、正確な計算に拘って問題に取り組んでいるかを試す試験である。1次合格ラインは60%程度と考えられる。

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せは YMS ☎03-3370-0410 まで

☎ 03-3370-0410

受付時間 8~20時 土日祝可
<https://yms.ne.jp/>
 東京都渋谷区代々木 1-37-14



☎ 0120-146-156

携帯からOK 受付時間 9~21時 土日祝可
<https://www.mebio.co.jp/>
 大阪府中央区石町2-3-12ベルヴォア天満橋