解答速報

日本医科大学（前期）　数学

2020年2月2日実施

$\boxed{1}$

以下の文章の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ト}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．

実数の定数 a，b（$a>0$）に対して，2 次関数 $f(x)=3ax^2+2x+b$ が

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=0,\quad \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=6$$

を満たすとき，$a=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$b=-\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である．

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{キ}}{\pi},$$

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},$$

$$\int_0^1 x^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\boxed{コ}}{\pi}-\frac{\boxed{サ}}{\pi^{\boxed{シ}}}$$

であることを用いれば，定積分

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2dx$$

が最小となる定数 p，q の値は $p=\dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}-\dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}\,\pi^{\boxed{テ}}}$，$q=\boxed{ト}$ となる．

解答

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_0^1(3ax^2+b)dx$$
$$=2(a+b)$$

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=2\int_0^1\{9a^2x^4+(6ab+4)x^2+b^2\}dx$$
$$=2\left(\frac{9}{5}a^2+2ab+\frac{4}{3}+b^2\right)$$

したがって，

$$\begin{cases} a+b=0 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{9}{5}a^2+2ab+\dfrac{4}{3}+b^2=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② より，

$$27a^2+30ab+15b^2=25 \iff 15(a+b)^2+12a^2=25$$

① を代入して $a^2=\dfrac{25}{12}$ となり，$a>0$ より $a=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{6}}$.

また，$b=-a=\boldsymbol{-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}}$ である．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx &= \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}\\ \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^1(1+\cos\pi x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$I=\displaystyle\int_0^1 x^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ において，$x=\dfrac{2}{\pi}t$ と置換すると，

$$\begin{aligned}I&=\frac{8}{\pi^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^2 t dt\\ &=\frac{8}{\pi^3}\Big[t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^3}}\end{aligned}$$

$J=\displaystyle\int_{-1}^1\left\{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(pf(x)+q)\right\}^2dx$ において，$p=\dfrac{\pi}{2}r$，$q=\dfrac{\pi}{2}s$ とおくと，

$$\begin{aligned}J&=\frac{\pi^2}{4}\int_{-1}^1\left\{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(rf(x)+s)\right\}^2dx\\ \frac{4}{\pi^2}J&=\int_{-1}^1\left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+r^2\{f(x)\}^2+s^2-2rf(x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-2s\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+2rsf(x)\right]dx\end{aligned}$$

これまでの計算結果を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}J&=1+6r^2+2s^2-4r\int_0^1(3ax^2-a)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx-\frac{8}{\pi}s+0\\ &=1+6r^2+2s^2-4ar\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right)-\frac{8}{\pi}s\\ &=6r^2-4ar\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right)+2s^2-\frac{8}{\pi}s+1\\ &=6\left\{r-\frac{a}{3}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right)\right\}^2+2\left(s-\frac{2}{\pi}\right)^2+(\text{定数})\end{aligned}$$

したがって，J が最小となる条件は，

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{3}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right) \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{18}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{48}{\pi^3}\right) \\ s &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$p=\dfrac{\pi}{2}r$，$q=\dfrac{\pi}{2}s$ に代入して，

$$p=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{9}-\frac{20\sqrt{3}}{3\pi^2}},\quad q=\mathbf{1}$$

$\boxed{\text{II}}$

O を原点とする xyz 空間において以下の各問いに答えよ.

問 1　点 $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n}=(-2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3})$ に垂直な平面 α の方程式を求めよ.

問 2　ベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ と問 1 の $\overrightarrow{n}$ とのなす角 θ を求めよ.

問 3　連立不等式 $z \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 9$ で表される図形を，問 1 の平面 α によって 2 つの部分に分割するとき，点 $(0,\ 0,\ 3)$ を含む部分の体積を求めよ.

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　点 A $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り，$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}-2\\ \sqrt{5}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ に垂直な平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおけば，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{n}=0$ より，$\boldsymbol{2x-\sqrt{5}y-\sqrt{3}z=0}$.

問 2　$\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とおき，$\overrightarrow{d}$ と $\overrightarrow{n}$ となす角を θ（$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$）とおく．$|\overrightarrow{n}|=2\sqrt{3}$ であるから，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{d}||\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{2}.$$

したがって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より $\theta=\boldsymbol{60^\circ}$.

問 3　$z \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 9$ で表される半球体を平面 α で切るとき，平面 $z=0$ と α とのなす角は，問 2 より 60° である.

すなわち，求める立体の体積は，半径 3 の球体を 3 分割したものであり，

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{12\pi}.$$

$\boxed{\text{III}}$

正の実数 t，k に対して，座標平面上の点 $\mathrm{T}_t(k)$ を次で定める．

$$\mathrm{T}_t(k)=\left(\frac{k}{1+t^2k^2},\ \frac{tk^2}{1+t^2k^2}\right)$$

また，各 k に対して，t が正の実数全体を動くときの点 $\mathrm{T}_t(k)$ の描く曲線を $C(k)$ とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　次の $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ウ}}$ に適する数または式を解答欄に記入せよ．答えのみでよい．

$C(k)$ は点 $(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$ を中心とする，半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の一部である．

問 2　各 t に対して，点 $\mathrm{T}_t\left(\dfrac{1}{2}\right)$ における $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の法線を $l_1(t)$，点 $\mathrm{T}_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $l_2(t)$ とする．このとき，2 直線 $l_1(t)$，$l_2(t)$ の方程式をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．

問 3　問 2 の 2 直線 $l_1(t)$，$l_2(t)$ の交点 $\mathrm{P}(t)$ の座標を求めよ．答えのみでよい．

問 4　t が正の実数全体を動くとき，問 3 で定めた点 $\mathrm{P}(t)$ が描く曲線は，x 軸上に 2 つの焦点をもつ楕円の一部であることを示し，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さをそれぞれ求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

$$\mathrm{T}_t(k)=\left(\frac{k}{1+t^2k^2},\ \frac{tk^2}{1+t^2k^2}\right)$$

問 1　$x=\dfrac{k}{1+t^2k^2}$　$\cdots\cdots$ ①，$y=\dfrac{tk^2}{1+t^2k^2}$ を用いて，$t>0$，$k>0$ より，

$$y=tkx \iff t=\frac{y}{kx}$$

これを ① に代入し整理すると，

$$x=\frac{k}{1+\left(\dfrac{y}{kx}\right)^2k^2} \iff x^2+y^2-kx=0$$
$$\iff \left(x-\frac{k}{2}\right)^2+y^2=\frac{k^2}{4}.$$

したがって，$C(k)$ は点 $\left(\boldsymbol{\dfrac{k}{2}},\ \mathbf{0}\right)$ を中心とし，半径 $\boldsymbol{\dfrac{k}{2}}$ の円の一部である．

問 2　$C(k)$ の中心を $\mathrm{A}(k)$ とおく．

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，$\mathrm{T}_t\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は $\left(\dfrac{2}{4+t^2},\ \dfrac{t}{4+t^2}\right)$ であり，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ と点 $\mathrm{T}_t\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を結ぶ直線が求める法線なので，これを求めて

$$l_t(t):\boldsymbol{4tx-(4-t^2)y-t=0}$$

また，$k=1$ のとき，$\mathrm{A}(1)$ は $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{T}_t(1)$ は $\left(\dfrac{1}{1+t^2},\ \dfrac{t}{1+t^2}\right)$ であり，点 $\mathrm{A}(1)$ と点 $\mathrm{T}_t(1)$ を結ぶ直線が求める法線なので，これを求めて

$$l_2(t):\boldsymbol{2tx-(1-t^2)y-t=0}.$$

問 3　問 2 の 2 直線の交点を求めると，$\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2(t^2+2)}},\ \boldsymbol{\dfrac{t}{t^2+2}}\right)$ である．

問 4　$x = \dfrac{3}{2(t^2+2)}$，$y = \dfrac{t}{t^2+2}$ とおく．点 $(x,\ y)$ が存在する図形の方程式は，2 式より，

$$y = \frac{2x}{3} \cdot t \Longleftrightarrow t = \frac{3y}{2x}$$

これを第 1 式に代入し，

$$x = \frac{3}{2\left\{\left(\dfrac{3y}{2x}\right)^2 + 2\right\}} \Longleftrightarrow 8x^2 - 6x + 9y^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\left(x - \dfrac{3}{8}\right)^2}{\dfrac{9}{64}} + \frac{y^2}{\dfrac{1}{8}} = 1.$$

したがって求める方程式は楕円であり，その焦点の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{4},\ 0}\right)$，$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2},\ 0}\right)$.

長軸の長さは $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$，短軸の長さは $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ である．

$\boxed{\text{IV}}$

初期時刻 0 で白球が 3 個あり，以下の規則で定まる確率に従って球の色が白から黒，また黒から白に変化するものとする．以下では，各時刻 n（$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）での白球の個数を $w(n)$，黒球の個数を $b(n)$ と表し（$w(n)+b(n)=3$），また，実数 x は $0<x<1$ を満たすとする．

規則 1： $w(n)=3$ または $w(n)=2$ であるとき，時刻 n での各白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{1}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{2}{3}$ の確率で白球のままである．また，時刻 n での黒球は時刻 $n+1$ では確率 x で白球となり，確率 $1-x$ で黒球のままである．

規則 2： $w(n)=1$ であるとき，時刻 n での白球は時刻 $n+1$ では $\dfrac{2}{3}$ の確率で黒球となり，$\dfrac{1}{3}$ の確率で白球のままである．また，時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである．

規則 3： $w(n)=0$ であるとき，時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである．

各時刻 n（$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）に対して，$w(n)=3$ である確率を p_n，$w(n)=2$ である確率を q_n，$w(n)=1$ である確率を r_n とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　p_1，q_1 をそれぞれ求めよ．答えのみでよい．

問 2　次の連立漸化式が成り立つように，$\boxed{\ ア\ }$〜$\boxed{\ エ\ }$ に適する，n に無関係な数または式を解答欄に吸入せよ．導出過程についても説明せよ．

$$\begin{cases} p_{n+1} = \boxed{\ ア\ }\,p_n + \boxed{\ イ\ }\,q_n \\ q_{n+1} = \boxed{\ ウ\ }\,p_n + \boxed{\ エ\ }\,q_n \end{cases} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

問 3　次の連立漸化式が成り立つような実数 α，β（ただし，$\alpha<\beta$）の組を求め，x を用いて表せ，答えのみでよい．

$$\begin{cases} p_{n+2}-(\alpha+\beta)p_{n+1}+\alpha\beta p_n = 0 \\ q_{n+2}-(\alpha+\beta)q_{n+1}+\alpha\beta q_n = 0 \end{cases} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

問 4　数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ の一般項を関数 $F(x)$，$G(x)$，$H(x)$，$I(x)$ を用いて

$$\begin{cases} p_n = F(x)\alpha^n + G(x)\beta^n \\ q_n = H(x)\alpha^n + I(x)\beta^n \end{cases} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表したとき，$F(x)$，$G(x)$，$H(x)$，$I(x)$ を x の関数としてそれぞれ具体的に求めよ．答えのみでよい．

問 5　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$ が存在し，かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}<1$ が成り立つための x に対する必要十分条件を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　p_1 は白球 3 個すべてが白球のままである確率なので，$p_1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\dfrac{8}{27}}$.

また，q_1 は白球 3 個のうち 1 個が黒球に変化し，2 個は白球のままなので，$q_1={}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$.

問 2　$w(n+1)=3$ となるのは，

（ア）$w(n)=3$ のとき，白球 3 個すべてが白球のままとなる：$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

（イ）$w(n)=2$ のとき，黒球 1 個が白球に変化し，白球 2 個は白球のままとなる：$x\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}x$

のときである．

また，$w(n+1)=2$ となるのは，

（ウ）$w(n)=3$ のとき，いずれか 1 個の白球が黒球に変化する：${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$

(エ)　$w(n)=2$ のとき，どの球の色も変化しない，または，白球 2 個のうち 1 個が黒球に変化し，黒球 1 個は白球に変化する：$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2(1-x)+{}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot x=\dfrac{4}{9}$

のときである．

それぞれ互いに排反であるから

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}p_n+\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{x}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}p_n+\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}q_n \end{cases} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

問 3　問 2 第 1 式より，

$$\frac{4}{9}q_n=\frac{1}{x}p_{n+1}-\frac{8}{27x}p_n$$
$$\therefore\ q_{n+1}=\frac{9}{4x}p_{n+2}-\frac{2}{3x}p_{n+1}$$

であるので第 2 式に代入して

$$\frac{9}{4x}p_{n+2}-\frac{2}{3x}p_{n+1}=\frac{4}{9}p_n+\frac{1}{x}p_{n+1}-\frac{8}{27x}p_n$$

整理して

$$243p_{n+2}-180p_{n+1}+(-48x+32)p_n=0$$

α，β は特性方程式 $243t^2-180t+(-48t+32)=0$ の 2 解である．解の公式を用いて

$$t=\frac{10\pm2\sqrt{36x+1}}{27}$$

が得られる．よって，$\alpha<\beta$ より

$$\alpha=\boldsymbol{\frac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}},\ \beta=\boldsymbol{\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}}$$

問 4　問 3 を変形して p_n，q_n に関してそれぞれ

$$\begin{cases} p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n) \\ p_{n+2}-\beta p_{n+1}=\alpha(p_{n+1}-\beta p_n) \end{cases} \qquad \cdots\cdots①$$

$$\begin{cases} q_{n+2}-\alpha q_{n+1}=\beta(q_{n+1}-\alpha q_n) \\ q_{n+2}-\beta q_{n+1}=\alpha(q_{n+1}-\beta q_n) \end{cases} \qquad \cdots\cdots②$$

が得られる．① について

$$\begin{cases} p_{n+1}-\alpha p_n=\beta^n(p_1-\alpha p_0) \\ p_{n+1}-\beta p_n=\alpha^n(p_1-\beta p_0) \end{cases}$$

となるので，辺々引いて，$\alpha\fallingdotseq\beta$ に注意すると，

$$p_n=\frac{\beta^n(p_1-\alpha p_0)-\alpha^n(p_1-\beta p_0)}{\beta-\alpha}.$$

したがって，問 2 の α，β および $p_0=1$，$p_1=\dfrac{8}{27}$ を代入して

$$p_n=\frac{\beta^n\left(\dfrac{8}{27}-\dfrac{10-2\sqrt{36x+1}}{27}\cdot 1\right)-\alpha^n\left(\dfrac{8}{27}-\dfrac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}\cdot 1\right)}{\dfrac{4\sqrt{36x+1}}{27}}$$
$$=\frac{\sqrt{36x+1}+1}{2\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}\beta^n.$$

よって，

$$F(x)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{36x+1}+1}{2\sqrt{36x+1}}},\ G(x)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}}.$$

続いて，② について，① と同様にして

$$q_n=-\frac{3}{\sqrt{36x+1}}\alpha^n+\frac{3}{\sqrt{36x+1}}\beta^n.$$

よって

$$H(x)=\boldsymbol{-\frac{3}{\sqrt{36x+1}}},\ I(x)=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{36x+1}}}.$$

問 5　$w(n+1)=1$ となるのは，

(オ)　$w(n)=3$ のとき，白球 3 個のうち 2 つが黒球に変化し，1 個は白球のままとなる：${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

(カ)　$w(n)=2$ のとき，白球 2 個のうち 1 つが黒球に変化し，1 個は白球のままとなり，黒球 1 個は黒球のままとなる場合と，白球 2 個がともに黒球に変化し，黒球 1 個が白球に変化する場合とがある：
${}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)(1-x)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2x=\dfrac{4-3x}{9}$

(キ)　$w(n)=1$ のとき，白球 1 個は白球のままであり，黒球 2 個もともに黒球のままとなる：$\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot 1^2=\dfrac{1}{3}$

のときである．
よって，それぞれ互いに排反であるから，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+\frac{4-3x}{9}q_n+\frac{2}{9}p_n.$$

問 4 より，$p_n=F(x)\alpha^n+G(x)\beta^n$，$q_n=H(x)\alpha^n+I(x)\beta^n$ であるから，これを用いて，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+\left\{\frac{2}{9}F(x)+\frac{4-3x}{9}H(x)\right\}\alpha^n+\left\{\frac{2}{9}G(x)+\frac{4-3x}{9}I(x)\right\}\beta^n.$$

と表されるので，$\dfrac{2}{9}F(x)+\dfrac{4-3x}{9}H(x)=J$，$\dfrac{2}{9}G(x)+\dfrac{4-3x}{9}I(x)=K$ とおく．すなわち，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+J\alpha^n+K\beta^n\quad\cdots\cdots③$$

ここで，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$，$a_n=r_n+s\cdot J\alpha^n+t\cdot K\beta^n$ を満たすような実数 $(s,\ t)$ を定める．2 式から

$$r_{n+1}+s\cdot J\alpha^{n+1}+t\cdot K\beta^{n+1}=\frac{1}{3}(r_n+s\cdot J\alpha^n+t\cdot K\beta^n)$$
$$\Longleftrightarrow r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+s\left(\frac{1}{3}-\alpha\right)\cdot J\alpha^n+t\left(\frac{1}{3}-\beta\right)\cdot K\beta^n\quad\cdots\cdots④$$

③ と ④ が一致するので，$s=\dfrac{3}{1-3\alpha}$，$t=\dfrac{3}{1-3\beta}$ である．このとき，$a_0=r_0+s\cdot J+t\cdot K=s\cdot J+t\cdot K$ より，

$$\begin{aligned}&a_n=(s\cdot J+t\cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ \Longleftrightarrow\ &r_n=(s\cdot J+t\cdot K)\left(\frac{1}{3}\right)^n-s\cdot J\alpha^n-t\cdot K\beta^n\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{r_n}{q_n}=\frac{(s\cdot J+t\cdot K)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-s\cdot J\alpha^n-t\cdot K\beta^n}{H(x)\alpha^n+I(x)\beta^n}$$

ここで，$|\alpha|<\beta$ であり，$0<x<1$ から，

$$\beta=\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}>\frac{10+2\cdot 1}{27}>\frac{1}{3}.$$

したがって，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{3\beta}\right|<1$ であり，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(s\cdot J+t\cdot K)\left(\dfrac{1}{3\beta}\right)^n-s\cdot J\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n-t\cdot K}{H(x)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+I(x)}\\&=-\frac{t\cdot K}{I(x)}.\end{aligned}$$

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$ が存在し，かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}<1$ が成り立つための必要十分条件は，

$$0<x<1\quad\text{かつ}\quad-\frac{t\cdot K}{I(x)}<1$$

である．

$$\begin{aligned}-\frac{t\cdot K}{I(x)}&=\frac{-\dfrac{3}{1-3\beta}\left\{\dfrac{2}{9}G(x)+\dfrac{4-3x}{9}I(x)\right\}}{I(x)}\\&=\frac{-\dfrac{3}{1-3\beta}\left(\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{36x+1}-1}{2\sqrt{36x+1}}+\dfrac{4-3x}{9}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}\right)}{\dfrac{3}{\sqrt{36x+1}}}<1\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{\sqrt{36x+1}-1}{9}+\frac{4-3x}{3}<3\cdot\frac{10+2\sqrt{36x+1}}{27}-1\\ \Longleftrightarrow\ &10-9x<\sqrt{36x+1}\end{aligned}$$

$0<x<1$ であるから

$$\begin{aligned}&(10-9x)^2<36x+1\quad\text{かつ}\quad 0<x<1\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{4-\sqrt{5}}{3}<x<\frac{4+\sqrt{5}}{3}\quad\text{かつ}\quad 0<x<1\\ \Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{\frac{4-\sqrt{5}}{3}<x<1}\end{aligned}$$

【補足】

確率漸化式を立てる問題では，もれなく重複なく漸化式を立てるために，先にすべての場合を求めておいた方が安全.

$w(n)=3$ のとき

(i)　3 個の白球がすべて白球にあるとき，$w(n+1)=3$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

(ii)　3 個の白球のうち 2 個が白球のまま，1 個が黒球となるとき，$w(n+1)=2$.

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}$$

(iii)　3 個の白球のうち 1 個が白球のまま，2 個が黒球となるとき，$w(n+1)=1$.

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$$

(iv)　3 個の白球がすべて黒球となるとき，$w(n+1)=0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

$w(n)=2$ のとき

(i)　黒球 1 個が白球に変化し，白球 2 個は白球のままとなるとき，$w(n+1)=3$

$$x\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}x$$

(ii)　どの色の球の色も変化しない，または，白球 2 個のうち 1 個が黒球に変化し，黒球 1 個は白球に変化するとき，$w(n+1)=2$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2(1-x)+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cdot x=\frac{4}{9}$$

(iii)　白球 2 個のうち 1 個が黒球に変化し黒球はそのままとなる, または, すべての球が変化するとき, $w(n+1)=1$.

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1-x)+\left(\frac{1}{3}\right)^2x=\frac{4-3x}{9}$$

(iv)　すべての球が黒球に変化するとき，$w(n+1)=0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2(1-x)=\frac{1-x}{9}$$

$w(n)=1$ のとき

(i)　すべての球の色が変化しないとき，$w(n+1)=1$

$$\frac{1}{3}\cdot 1^2=\frac{1}{3}$$

(ii)　すべての球が黒球に変化するとき，$w(n+1)=0$

$$\frac{2}{3}\cdot 1^2=\frac{2}{3}$$

$w(n)=0$ のとき

(1)　すべての球が黒球に変化するとき，$w(n+1)=0$

$$1^3=1$$

これらの遷移を表にまとめると次のようになる．

	$w(n)=3$	$w(n)=2$	$w(n)=1$	$w(n)=0$
$w(n+1)=3$	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4x}{9}$	0	0
$w(n+1)=2$	$\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	0	0
$w(n+1)=1$	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{4-3x}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	0
$w(n+1)=0$	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{1-x}{9}$	$\dfrac{2}{3}$	1
計	1	1	1	1

この表において，縦に並べた確率の和は必ず 1 であり，横に考えると漸化式が立つので，

$$p_{n+1}=\frac{8}{27}p_n+\frac{4x}{9}q_n$$
$$q_{n+1}=\frac{4}{9}p_n+\frac{4}{9}q_n$$
$$r_{n+1}=\frac{2}{9}p_n+\frac{4-3x}{9}q_n+\frac{1}{3}r_n$$

このように漏れなく漸化式を立てることができる．

講評

I（標準）
途中までは，素直に計算するだけの平易な問題であるが，最後の部分だけがかなり煩雑になり，正解にたどり着くまでに時間が掛かる．ここで，時間を大幅に使ってしまった受験生も多かったと考えられる．

II（標準）問 1，問 2 は」空間の平面の方程式に関する基礎問題である．問 3 が幾何考察と空間認識を少し必要とする問題で，ここだけ解けなかった受験生も多かったと考えられる．ただ，計算量が少ないのがこの大問 2 だけのため，一次突破のためにはなんとか完答したい問題である．

III（標準）軌跡と楕円に関する基本問題であるが，計算ミスを 1 つ起こすと，それを修正するのが困難な問題である．法線を接線と勘違いしてしまった受験生も多かったと思われる．ただし，内容は極めて基本的であるので，この大問 3 も完答したい問題である．

IV（難）時間制限的にも厳しい問題である．問 2 まではできても，その他との計算量が非常に多く，問 3 までできれば十分だろう．

全体として，方針は立ちやすいが，計算がしっかりできるかを問う問題構成になっている．常日頃から，正確な計算に拘って問題に取り組んでいるかを試す試験である．1 次合格ラインは 60 %程度と考えられる．