解答速報

日本医科大学(後期)　数学

2020年 3月 3日実施

[I]　O を原点とする空間内において 2 点 A, B を $OA=\sqrt{3}$，$OB=AB=\sqrt{2}$ を満たすようにとる．さらに，点 P は以下の条件 (∗) を満たしながら空間内を動くものとする．

(∗)「$BP=\sqrt{2}$，かつ $\angle AOP=\dfrac{\pi}{3}$，かつ 4 点 O，A，B，P は同一平面上には存在しない．」

点 B から三角形 OAP を含む平面に垂線 BH を下ろす．$0<x<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ を満たす各 x に対して，条件 (∗) と $OP=x$ を満たす点 P が存在することは認めて良い．以下では $x=OP$，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ とおく．このとき，以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ヒ}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．ただし，有理数は既約分数で表すこと．

問 1　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{p}$，$\vec{b}\cdot\vec{p}$ を x を用いてそれぞれ次のように表せる．

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\qquad \vec{a}\cdot\vec{p}=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}x,\qquad \vec{b}\cdot\vec{p}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}x^2$$

問 2　ベクトル $\overrightarrow{OH}$ は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{p}$$

と表せる．このとき，s，t は x を用いてそれぞれ次のように表される．

$$s=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}-\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}x,\qquad t=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}-\frac{\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

問 3　$|\overrightarrow{BH}|^2$ は x を用いて次のように表せる．

$$|\overrightarrow{BH}|^2=\frac{1}{\boxed{ソ}}\left(-x^2+\sqrt{\boxed{タ}}\,x+\boxed{チ}\right)$$

問 4　点 P が条件 (∗) と $\dfrac{1}{3}\leqq\vec{b}\cdot\vec{p}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$ を満たしながら動くとき，$|\overrightarrow{BH}|^2$ は $x=\dfrac{\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ をとり，$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{ネ}+\boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$ をとる．

【解説】

問 1　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2} \iff |\vec{b}-\vec{a}|^2=2 \iff |\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2 \qquad \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}.$

また，$\vec{a}\cdot\vec{p}=\sqrt{3}\cdot x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

さらに，$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{2} \iff |\vec{p}-\vec{b}|^2=2 \iff |\vec{p}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2=2 \qquad \therefore\ \vec{b}\cdot\vec{p}=\dfrac{1}{2}x^2.$

問 2　$\overrightarrow{BH}\perp\triangle OAP$ より

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0\ ,\quad \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OP}=0$$

$$\iff (s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0\ ,\quad (s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{p}=0$$

$$\iff s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0\ ,\quad s\vec{a}\cdot\vec{p}+t|\vec{p}|^2-\vec{b}\cdot\vec{p}=0$$

$$\iff 3s+\frac{\sqrt{3}}{2}xt=\frac{3}{2}\ ,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}xs+x^2t=\frac{1}{2}x^2$$

よって，s，t について解くと

$$s=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\,,\quad t=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{x}\right).$$

問 3 $\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2$

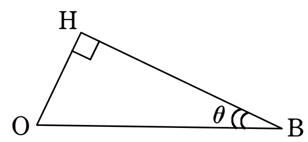
$$\begin{aligned}&=2-\left|s\vec{a}+t\vec{p}\right|^2\\&=2-(3s^2+\sqrt{3}\,xst+x^2t^2)\\&=2-3\left(\frac{x^2}{27}-\frac{4\sqrt{3}}{27}x+\frac{4}{9}\right)-\sqrt{3}\,x\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3x}\right)-x^2\left(\frac{4}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{9x}+\frac{1}{3x^2}\right)\\&=\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}\,x+3).\end{aligned}$$

※問題文の x に関する条件 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}\,x+3)>0$ となるので，ここまでの計算が間違いないことが確認できる.

【別解】

$\angle\mathrm{OBH}=\theta$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BO}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2$ だから

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2&=\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}\\&=-\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\\&=-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{b}\cdot\vec{p}+\left|\vec{b}\right|^2\\&=-\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)\cdot\frac{3}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\cdot\frac{1}{2}x^2+2\\&=\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}\,x+3).\end{aligned}$$



問 4 条件より，$\dfrac{1}{3}\leqq\vec{b}\cdot\vec{p}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x \iff \dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{1}{2}x^2\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x \iff \dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

このとき，問 3 より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2=\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}\,x+3)=\frac{1}{3}\left\{-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right\}$$

であるので

最大値：$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{15}{4}=\dfrac{5}{4}$ $\left(x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{のとき}\right)$.

最小値：$\dfrac{1}{3}\left\{-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}+3\right\}=\dfrac{5+2\sqrt{21}}{12}$ $\left(x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ \text{のとき}\right)$.

［Ⅱ］　n を1以上の整数とする．中が見えない n 個の袋があり，それぞれの袋の中には1から5までの整数がそれぞれ1つずつ書かれたカードが5枚入っている．これら n 個の各袋からカードを1枚ずつ取り出すとき，取り出された n 枚のカードに書かれている数字の和が3の倍数である確率を p_n とする．

問1　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

問2　$\alpha=\lim_{n\to\infty} p_n$ に対して，不等式

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq|p_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

を満たす n の値がちょうど20個存在するように1以上の整数 m の値を定めることは可能か．可能ならば，その値を求め，不可能ならばその理由を説明せよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ であるとする．

【解説】

問1　n 枚のカードに書かれている数字の和を3で割ったときの余りが1である確率を q_n，余りが2である確率を r_n とおく．このとき，全事象の確率の和について，$p_n+q_n+r_n=1$　…①

また，$n+1$ 枚のカードに書かれている数字の和が3の倍数となるのは，以下の場合である．

ⅰ）n 枚のカードに書かれている数字の和が3の倍数のとき，$n+1$ 枚目に書かれている数字が3となっている．

ⅱ）n 枚のカードに書かれている数字の和を3で割ったときの余りが1であるとき，$n+1$ 枚目に書かれている数字が2または5となっている．

ⅲ）n 枚のカードに書かれている数字の和を3で割ったときの余りが2であるとき，$n+1$ 枚目に書かれている数字が1または4となっている．

ⅰ）～ⅲ）は互いに排反であるので

$$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}q_n+\frac{2}{5}r_n \quad \cdots②$$

よって，①②より

$$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}(1-p_n) \qquad \therefore\quad p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}\ .$$

問2　問1および $p_1=\frac{1}{5}$ より，$p_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{3}$ なので，$\alpha=\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{3}$

したがって，与式より

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq|p_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

$$\Longleftrightarrow\ \left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

$$\Longleftrightarrow\ \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{2m}\leqq\log_{10}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\leqq\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

$$\Longleftrightarrow\ -2m\leqq\log_{10}2-\log_{10}3-n(1-\log_{10}2)\leqq-m$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{m+\log_{10}2-\log_{10}3}{1-\log_{10}2}\leqq n\leqq\frac{2m+\log_{10}2-\log_{10}3}{1-\log_{10}2}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{m-0.1761}{0.6990}\leqq n\leqq\frac{2m-0.1761}{0.6990} \quad \cdots③$$

これを満たす n の値がちょうど20個存在するとき

$$19\leqq\frac{2m-0.1761}{0.6990}-\frac{m-0.1761}{0.6990}<21 \quad \cdots④$$

が必要である．すなわち

$$19\leqq\frac{m}{0.6990}<21 \iff 13.2810\leqq m<14.6790$$

であるから，$m=14$ が必要である．

逆にこのとき，③より

$$19.776681\leqq n\leqq 39.8052933$$

であるから，$n=20,21,22,\cdots,39$ となり，③を満たす n の値は20個存在し，適する．

よって，題意を満たす整数 m は存在し，その値は

$$m = 14 .$$

※④を満たしていても，③を満たす n の値が 20 個とは限らないので，解説のように必ず十分性の議論をする必要があり，この議論を欠いた答案は大幅な減点となるだろう．必要十分性の議論には十分注意したい．

［Ⅲ］　O を原点とする xyz 空間内において，各 $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，３点 P，Q，R を次のように定める．

$$\mathrm{P}\left(3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta),\ \theta\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(-(\sin\theta)^{\frac{3}{2}},\ (\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}},\ \theta\right)$$

$$\mathrm{R}(0,\ 0,\ \theta)$$

θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を K とし，K を z 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を V とする．

問１　２点 P，Q に対して，線分 PQ を $t:(1-t)$（ただし，$0\leqq t\leqq 1$）に内分する点を S_t とする．t が 0 から 1 まで動くとき，２点 R，S_t 間の距離の最小値 l を θ を用いて表せ．答えのみよい．

問２　次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数は省略してよい．答えのみでよい．

$$\int\frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

問３　V の値を求めよ．

【解説】

問１

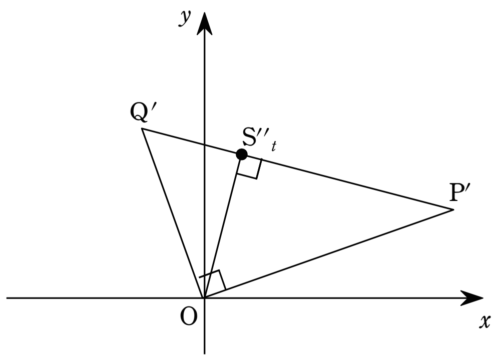
３点 P，Q，R は平面 $z=\theta$ 上にある．ここで，点 P，Q からそれぞれ xy 平面上に垂線を下ろし，その足をそれぞれ P′，Q′ とおく．このとき，xy 平面上において，

$\mathrm{P}'\left(3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)\right)$，$\mathrm{Q}'\left(-(\sin\theta)^{\frac{3}{2}},\ (\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\right)$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}'}=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

であるから，次の図のような位置関係にある．（点 S''_t は，２点 R，S_t 間の距離が最小となるときの点 S'_t から，xy 平面上に下ろした垂線の足．）



$\mathrm{OP}'=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{OQ}'=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$ であるから，

$$\mathrm{P}'\mathrm{Q}'=\sqrt{\mathrm{OP}'^2+\mathrm{OQ}'^2}=\sqrt{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}\ .$$

$\angle\mathrm{OP}'\mathrm{Q}'=\alpha$ とおくと，$\angle\mathrm{Q}'\mathrm{OS}''_t=\alpha$ であり，

$$l=\mathrm{OS}''_t=\mathrm{RS}'_t=\mathrm{OQ}'\cos\alpha=\mathrm{OQ}'\cdot\frac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}}\ .$$

問２

$$\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\int\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$$

$\cos\theta=t$ とおくと，$\sin\theta\,d\theta=-dt$ であるので

$$\int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{1}{1-t^2}(-dt)=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=-\frac{1}{2}\{\log|1+t|-\log|1-t|\}+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}+C.$$

（問題文の指示より，実際の解答では積分定数 C は省略してよい．）

【別解】

$$\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\int\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}d\theta=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2\log\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+2\log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)+C=\log\left|\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+C=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}+C.$$

問 3

平面 $z=\theta$ 上において，線分 PQ 上の点で，点 R から最も近い点は点 $\mathrm{S'}_t$ である．また，点 R から最も遠い点は点 P または点 Q のいずれかである．

ここで，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において，

$$\mathrm{RP}-\mathrm{RQ}=\mathrm{OP'}-\mathrm{OQ'}=3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}-(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}{3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}+(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\cos\theta(\sqrt{3}-\tan\theta)}{3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}+(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

したがって，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ のときは $\mathrm{RP}>\mathrm{RQ}$ であり，$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のときは $\mathrm{RQ}>\mathrm{RP}$ である．ゆえに求める体積 V は，

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{\pi\mathrm{RP}^2-\pi\mathrm{RS'}_t{}^2\}d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\{\pi\mathrm{RQ}^2-\pi\mathrm{RS'}_t{}^2\}d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{RP}^2d\theta+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{RQ}^2d\theta-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{RS'}_t{}^2d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$

ここで，

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

また，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta$ において，$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ であるから $\theta+\frac{\pi}{3}=\varphi$ とおく．

$d\theta=d\varphi$，

θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
φ	$\frac{\pi}{3}$	$\longrightarrow$	$\frac{5}{6}\pi$

$$\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\varphi}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\sin\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right)\left(\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)}{\sin\varphi}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{2\sqrt{3}\sin^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi-\sqrt{3}}{\sin\varphi}$$

$$=\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\varphi-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}.$$

したがって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\varphi-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\right)d\varphi$$

$$=\left[-\frac{3}{4}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi-\frac{3}{16}\log\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\log(3+2\sqrt{3})$$

であり,

$$V=\left\{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}\log(3+2\sqrt{3})\right\}\pi.$$

［IV］　次で定義される関数 $f(s)$ に対して以下の各問いに答えよ．

$$f(s)=\begin{cases} \dfrac{s}{16} & (0\leqq s\leqq 4) \\ -\dfrac{s}{16}+\dfrac{1}{2} & (4<s\leqq 8) \\ 0 & (s<0 \text{ または } 8<s) \end{cases}$$

問 1　関数 $t=f(s)$ のグラフと，関数 $t=f(s)$ のグラフを s 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ．答えのみでよい．

問 2　関数 $t=f(s)$ に対して $s\geqq 0$ を定義域とする関数 $t=F(s)$，$t=G(s)$ を次で定義する．

$$F(s)=\int_0^s f(u)\,du,\quad G(s)=\int_0^s f(u-4)\,du$$

関数 $F(s)$，$G(s)$ をそれぞれ求め，これら 2 つの関数のグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ．

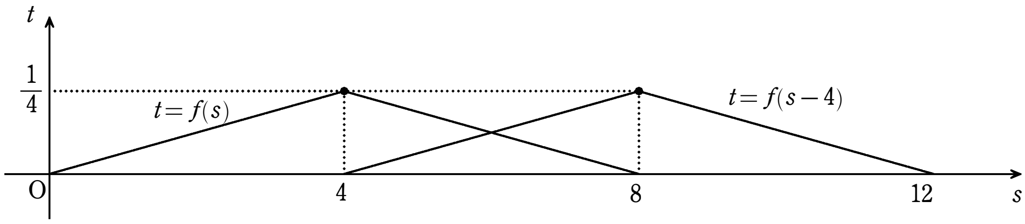
問 3　問 2 で求めた関数 $F(s)$，$G(s)$ に対し，$x=G(s)$，$y=F(s)$ とおく．点 $(x,\ y)$ の描く曲線の概形を xy 平面上に図示せよ．

問 4　問 2 で求めた関数 $F(s)$，$G(s)$ に対し，xy 平面上の 2 点 $(0,\ 1)$ と $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ の間の距離の最小値を与える s の値を求めよ．

【解説】

問 1

$t=f(s)$ のグラフと，$t=f(s)$ を s 軸方向に 4 だけ平行移動した $t=f(s-4)$ のグラフを描くと以下のようになる．



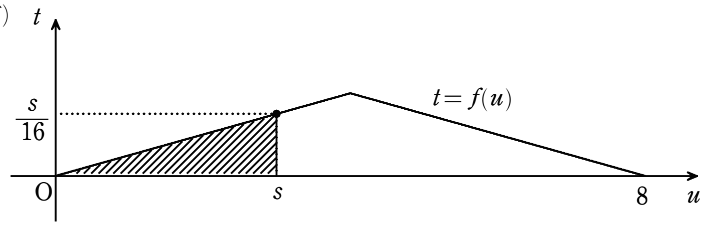
問 2

$0<s<8$ のとき，$F(s)$ は，$t=f(u)$，u 軸，$u=s$ で囲まれた 2 つの領域のうち，$u\leqq s$ を満たす方の面積であり，$0\leqq s\leqq 8$ で単調増加する．したがって，$F(s)$ は，$0\leqq s\leqq 8$ のとき，$t=f(u)$ のグラフを用いて下の図で表される面積となる．

(ア)　$0\leqq s\leqq 4$ のとき

$$F(s)=\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s}{16}=\frac{s^2}{32}.$$

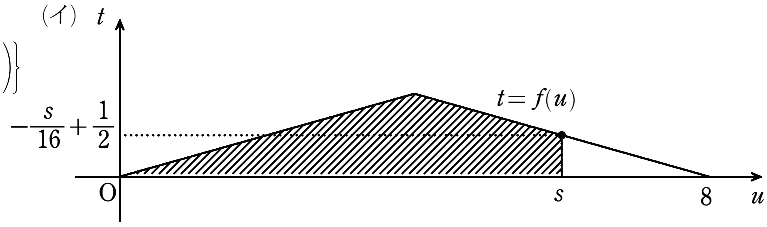
(ア)



(イ)　$4<s\leqq 8$ のとき

$$F(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(s-4)\left\{\frac{1}{4}+\left(-\frac{s}{16}+\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{2}-1.$$

(イ)



(ウ)　$8<s$ のとき

$F(s)=1.$

(u 軸と $t=f(u)$ とで囲まれた三角形の面積)

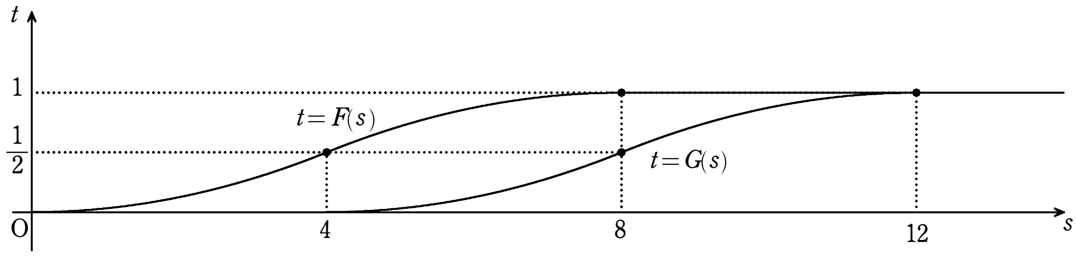
したがって，

$$F(s)=\begin{cases} \dfrac{s^2}{32} & (0\leqq s\leqq 4) \\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{s}{2}-1 & (4<s\leqq 8) \\ 1 & (8<s) \end{cases}$$

また， $s>4$ のとき，$G(s)=\int_0^s f(u-4)du$ は，$t=f(u-4)$ のグラフと u 軸，$u=s$ で囲まれた 2 つの領域のうち，$u\leqq s$ を満たす方の面積であり，$F(s)$ を利用して求めることができる．すなわち，$s\geqq 4$ のときは，$G(s)=F(s-4)$ で求まるので次のようになる．

$$G(s)=\begin{cases} 0 & (0\leqq s\leqq 4) \\ \dfrac{(s-4)^2}{32} & (4<s\leqq 8) \\ -\dfrac{(s-4)^2}{32}+\dfrac{s-4}{2}-1=-\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{3}{4}s-\dfrac{7}{2} & (8<s\leqq 12) \\ 1 & (12<s) \end{cases}$$

したがって，グラフは次のようになる．



問 3

問 2 より，

$$F(s)=\begin{cases} \dfrac{s^2}{32} & (0\leqq s\leqq 4) \\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{s}{2}-1 & (4<s\leqq 8) \\ 1 & (8<s) \end{cases} \qquad G(s)=\begin{cases} 0 & (0\leqq s\leqq 4) \\ \dfrac{(s-4)^2}{32} & (4<s\leqq 8) \\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{3}{4}s-\dfrac{7}{2} & (8<s\leqq 12) \\ 1 & (12<s) \end{cases}$$

これを利用して，点 $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ を満たす点の軌跡を考える．ただし，$F(s)$，$G(s)$ はともに単調増加．

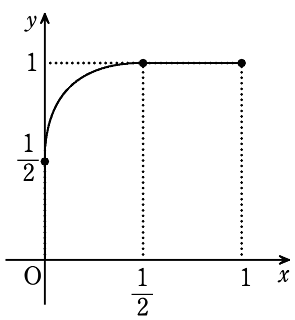
$0\leqq s\leqq 4$ のとき，点 $(x,\ y)$ は $x=0$ 上の点であり，$F(0)\leqq F(s)\leqq F(4)$ であるから，$x=0\left(0\leqq y\leqq \dfrac{1}{2}\right)$．

$4<s\leqq 8$ のとき，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を結ぶ曲線であり，点 $(x,\ y)$ は x 成分，y 成分ともに単調増加．

$8<s\leqq 12$ のとき，$y=1$ 上の点であり，$G(8)<G(s)\leqq G(12)$ より，$y=1\left(\dfrac{1}{2}<x\leqq 1\right)$．

$12<s$ のとき，$(x,\ y)=(1,\ 1)$．

以上から，点 $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ は次のような曲線を描く．



（注） $4<s<8$ においてこの曲線の凹凸を調べると，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{ds}}=\frac{d}{ds}\left(\frac{-\frac{s}{16}+\frac{1}{2}}{\frac{s-4}{16}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{s-4}{16}}=-\frac{64}{(s-4)^3}<0$$

であるから，上に凸であることがわかる．

問 4

問 3 で描いた図から，点 $(0,\ 1)$ と $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ の間の距離の最小値を与える s は $4<s\leqq 8$ に存在する．
この距離を l とおくとき

$$l^2=\{G(s)\}^2+\{F(s)-1\}^2=\frac{(s-4)^4}{32^2}+\frac{(s-8)^4}{32^2}.$$

$$\frac{d}{ds}l^2=\frac{1}{32^2}\{4(s-4)^3+4(s-8)^3\}=\frac{8}{32^2}(s-6)\{(s-4)^2-(s-4)(s-8)+(s-8)^2\}$$

$$=\frac{1}{128}(s-6)(s^2-12s+48).$$

ゆえに，増減表は以下のようになる．

s	4	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$\frac{d}{ds}l^2$		$-$	0	$+$	
l^2		↘		↗	

l と l^2 の増減は一致するので， $s=6$ のとき l は最小値をとることがわかる．

$\boxed{\text{講評}}$

［Ⅰ］（やや易）
　計算のみの問題である．要領よく計算したい．

［Ⅱ］（標準）
　問 1 は典型的な漸化式の立式である．問 2 は必要十分性の議論をしっかりと行いたい．また，小数の割算など計算ミスにも注意したい．

［Ⅲ］（やや難）
　典型的な回転体の体積であるが，計算が大変である．要領良く計算することが求められる．現実的に，問 2 までを確実に正解し，点数を確保したい．

［Ⅳ］（標準）
　問 3 までは一本道であるので間違えられない．問 4 は凹凸性の議論など細かい部分に注意して答案を作成したい．

　例年並みであった． 2 次合格のためには最低でも 60 ％程度は欲しいが，他の科目次第では 70% は確保したい．全体的に計算量が多く，90 分という時間はあまりにも短い．前期同様に正確かつ迅速な計算が求められた内容であった．時間内に［Ⅰ］［Ⅱ］［Ⅲ］問 1 問 2［Ⅳ］問 1 ～問 3 を押さえられれば十分ではないだろうか．そう考えると，計算の処理速度と正確性が問われる出題だったように思われる．［Ⅱ］問 2 は記述にも十分注意を払いたい．