日本医科大学(後期)　数学

2020年3月3日実施

$\boxed{\text{I}}$

O を原点とする空間内において 2 点 A，B を $\mathrm{OA}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ を満たすようにとる．さらに，点 P は以下の条件 $(*)$ を満たしながら空間内を動くものとする．

$(*)$「$\mathrm{BP}=\sqrt{2}$，かつ$\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{\pi}{3}$，かつ 4 点 O，A，B，P は同一平面上には存在しない．」

点 B から三角形 OAP を含む平面に垂線 BH を下ろす．$0<x<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ を満たす各 x に対して，条件 $(*)$ と $\mathrm{OP}=x$ を満たす点 P が存在することは認めて良い．以下では $x=\mathrm{OP}$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおく．このとき，以下の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ヒ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．ただし，有理数は既約分数で表すこと．

問 1　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{p}$，$\vec{b}\cdot\vec{p}$ を x を用いてそれぞれ次のように表せる．

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \vec{a}\cdot\vec{p}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}x,\quad \vec{b}\cdot\vec{p}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2$$

問 2　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{p}$$

と表せる．このとき，s，t は x を用いてそれぞれ次のように表される．

$$s=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}x,\quad t=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

問 3　$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ は x を用いて次のように表せる．

$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=\frac{1}{\boxed{\text{ソ}}}\left(-x^2+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\,x+\boxed{\text{チ}}\right)$$

問 4　点 P が条件 $(*)$ と $\dfrac{1}{3}\leqq\vec{b}\cdot\vec{p}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$ を満たしながら動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ は $x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとり，$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}+\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ をとる．

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2}$ より $|\vec{b}-\vec{a}|^2=2$. 展開すると $|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2$. よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$.

また, $\vec{a}\cdot\vec{p}=\sqrt{3}\cdot x\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}x}$.

さらに, $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\sqrt{2}$ より $|\vec{p}-\vec{b}|^2=2$. 展開すると $|\vec{p}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2=2$. よって $\vec{b}\cdot\vec{p}=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2}$.

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp$平面 OAP より

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\\
\iff&(s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0,\ (s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{p}=0\\
\iff&s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ s\vec{a}\cdot\vec{p}+t|\vec{p}|^2-\vec{b}\cdot\vec{p}=0\\
\iff&3s+\frac{\sqrt{3}}{2}xt=\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}xs+x^2t=\frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

よって, s, t について解くと

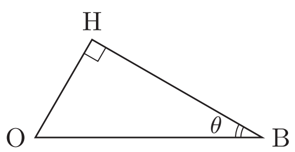
$$s=\boldsymbol{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x},\ t=\boldsymbol{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

問 3　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ より

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2\\
&=2-|s\vec{a}+t\vec{p}|^2\\
&=2-(3s^2+\sqrt{3}xst+x^2t^2)\\
&=2-3\left(\frac{x^2}{27}-\frac{4\sqrt{3}}{27}x+\frac{4}{9}\right)\\
&\quad-\sqrt{3}x\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3x}\right)-x^2\left(\frac{4}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{9x}+\frac{1}{3x^2}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}x+3)}.
\end{aligned}$$

※ 問題文の x に関する条件 $0<x<\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ のとき, $\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}x+3)>0$ となるので, ここまでの計算が間違いないことが確認できる.

別解



$\angle\mathrm{OBH}=\theta$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cdot\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ なので

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}\\&=-\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{p}-\vec{b})\\&=-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{b}|^2\\&=-\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}x\right)\cdot\frac{3}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\cdot\frac{1}{2}x^2+2\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}x+3)}.\end{aligned}$$

問 4　条件より，$\dfrac{1}{3}\leqq\vec{b}\cdot\vec{p}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{1}{2}x^2\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$．よって $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

このとき，問 3 より

$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=\frac{1}{3}(-x^2+\sqrt{3}x+3)=\frac{1}{3}\left\{-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{15}{4}\right\}$$

であるので

最大値：$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{15}{4}=\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$　$\left(x=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\text{ のとき}\right)$

最小値：$\dfrac{1}{3}\cdot\left\{-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}+3\right\}=\boldsymbol{\dfrac{5+2\sqrt{21}}{12}}$　$\left(x=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}\text{ のとき}\right)$

$\boxed{\text{II}}$

n を 1 以上の整数とする．中が見えない n 個の袋があり，それぞれの袋の中には 1 から 5 までの整数がそれぞれ 1 つずつ書かれたカードが 5 枚入っている．これら n 個の各袋からカードを 1 枚ずつ取り出すとき，取り出された n 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数である確率を p_n とする．

問 1　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

問 2　$\alpha = \lim_{n\to\infty} p_n$ に対して，不等式

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leqq |p_n - \alpha| \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

を満たす n の値がちょうど 20 個存在するように 1 以上の整数 m の値を定めることは可能か．可能ならば，その値を求め，不可能ならばその理由を説明せよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるとする．

解答

問 1　n 枚のカードに書かれている数字の和を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を q_n，余りが 2 である確率を r_n とおく．このとき，全事象の確率の和について，$p_n + q_n + r_n = 1$　$\cdots\cdots$①

また，$n+1$ 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数となるのは，以下の場合である．

(i)　n 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数のとき，$n+1$ 枚目に書かれている数字が 3 となっている．

(ii)　n 枚のカードに書かれている数字の和を 3 で割ったときの余りが 1 であるとき，$n+1$ 枚目に書かれている数字が 2 または 5 となっている．

(iii)　n 枚のカードに書かれている数字の和を 3 で割ったときの余りが 2 であるとき，$n+1$ 枚目に書かれている数字が 1 または 4 となっている．

(i)〜(iii) は互いに排反であるので

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n + \frac{2}{5}r_n \quad \cdots\cdots②$$

よって，① ② より

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}(1-p_n) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}}.$$

問 2　問 1 および $p_1 = \dfrac{1}{5}$ より，$p_n = \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n + \dfrac{1}{3}$ なので，$\alpha = \lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{3}$.

したがって，与式

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leqq |p_n - \alpha| \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{m} \\
\iff &\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leqq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{m} \\
\iff &\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leqq \log_{10}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n \leqq \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{m} \\
\iff &-2m \leqq \log_{10}2 - \log_{10}3 - n(1-\log_{10}2) \leqq -m \\
\iff &\frac{m + \log_{10}2 - \log_{10}3}{1-\log_{10}2} \leqq n \leqq \frac{2m + \log_{10}2 - \log_{10}3}{1-\log_{10}2} \\
\iff &\frac{m - 0.1761}{0.6990} \leqq n \leqq \frac{2m - 0.1761}{0.6990} \quad \cdots\cdots③
\end{aligned}$$

これを満たす n の値がちょうど 20 個存在するとき

$$19 \leqq \frac{2m-0.1761}{0.6990} - \frac{m-0.1761}{0.6990} < 21 \quad \cdots\cdots④$$

が必要である．すなわち

$$19 \leqq \frac{m}{0.6990} \leqq 21 \Longleftrightarrow 13.2810 \leqq m \leqq 14.6790$$

であるから，$m = 14$ が必要である．
逆にこのとき，③ より

$$19.776681 \leqq n \leqq 39.8052933$$

であるから，$n = 20,\ 21,\ 22,\ \cdots,\ 39$ となり，③ を満たす n の値は 20 個存在し，適する．
よって，題意を満たす整数 m は **存在** し，その値は $m = \mathbf{14}$ である．
※ ④ を満たしていても，③ を満たす n の値が 20 個とは限らないので，解説のように必ず十分性の議論をする必要があり，この議論を欠いた答案は大幅な減点となるだろう．必要十分性の議論には十分注意したい．

$\boxed{\text{III}}$

O を原点とする xyz 空間内において，各 $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，3 点 P，Q，R を次のように定める．

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta),\ \theta\right)\\&\mathrm{Q}\left(-(\sin\theta)^{\frac{3}{2}},\ (\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}},\ \theta\right)\\&\mathrm{R}(0,\ 0,\ \theta)\end{aligned}$$

θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を K とし，K を z 軸まわりに 1 回転してできる立体の体積を V とする．

問 1　2 点 P，Q に対して，線分 PQ を $t:(1-t)$（ただし，$0 \leqq t \leqq 1$）に内分する点を S_t とする．t が 0 から 1 まで動くとき，2 点 R，S_t 間の距離の最小値 l を θ を用いて表せ．答えのみでよい．

問 2　次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数は省略してよい．答えのみでよい．

$$\int \frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

問 3　V の値を求めよ．

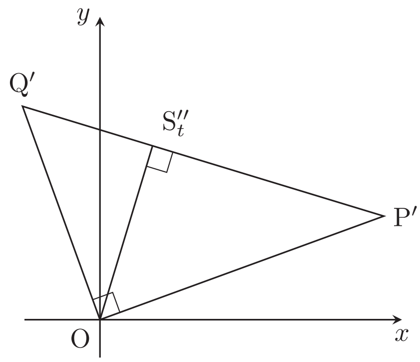
$\boxed{\text{解答}}$

問 1　3 点 P，Q，R は平面 $z=\theta$ 上にある．ここで，点 P，Q からそれぞれ xy 平面上に垂線を下ろし，その足をそれぞれ P′，Q′ とおく．このとき，xy 平面において，$\mathrm{P}'\left(3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)\right)$，$\mathrm{Q}'\left(-(\sin\theta)^{\frac{3}{2}},\ (\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\right)$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

であるから，次の図のような位置関係にある．（点 S_t'' は，2 点 R，S_t 間の距離が最小となるときの点 S_t' から，xy 平面上に下ろした垂線の足．）



$\mathrm{OP}' = 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{OQ}' = (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$ であるから，

$$\mathrm{P}'\mathrm{Q}' = \sqrt{\mathrm{OP}'^2 + \mathrm{OQ}'^2} = \sqrt{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}.$$

$\angle\mathrm{OP}'\mathrm{Q}' = \alpha$ とおくと，$\angle\mathrm{Q}'\mathrm{OS}_t'' = \alpha$ であり，

$$l = \mathrm{OS}_t'' = \mathrm{RS}_t' = \mathrm{OQ}'\cos\alpha = \mathrm{OQ}'\cdot\frac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{P}'\mathrm{Q}'} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}}}.$$

問 2

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$$

$\cos\theta = t$ とおくと，$\sin\theta d\theta = -dt$ であるので

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta &= \int \frac{1}{1-t^2}(-dt)\\ &= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\ &= -\frac{1}{2}\{\log|1+t| - \log|1-t|\} + C\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} + C}.\end{aligned}$$

なお，問題文の指示より，実際の解答では積分定数 C は省略してよい．

別解

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{\sin\theta} &= \int \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left(-2\log\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| + 2\log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right) + C\\ &= \log\left|\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right| + C\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + C\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} + C\end{aligned}$$

問 3　平面 $z=\theta$ 上において，線分 PQ 上の点で，点 R から最も近い点は点 S_t' である．また，点 R から最も遠い点は点 P または点 Q のいずれかである．

ここで，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において，

$$\begin{aligned}\mathrm{RP} - \mathrm{RQ} &= \mathrm{OP}' - \mathrm{OQ}'\\ &= 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} - (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta}{3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\cos\theta(\sqrt{3} - \tan\theta)}{3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

したがって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のときは $\mathrm{RP}>\mathrm{RQ}$ であり，$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のときは $\mathrm{RQ}>\mathrm{RP}$ である．ゆえに求める体積 V は,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\{\pi\mathrm{RP}^2-\pi\mathrm{RS}_t'^2\}d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\{\pi\mathrm{RQ}^2-\pi\mathrm{RS}_t'^2\}d\theta \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{RP}^2d\theta+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{RQ}^2d\theta-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{RS}_t'^2d\theta \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\cos\theta d\theta+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta
\end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta$ において，$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ である．$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\phi$ とおくと，$d\theta=d\phi$ であり

θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
ϕ	$\frac{\pi}{3}$	$\longrightarrow$	$\frac{5}{6}\pi$

である．
こうして

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta} &= \frac{\sqrt{3}\sin\left(\phi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\phi-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\phi} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\sin\phi-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi\right)\left(\frac{1}{2}\cos\phi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi\right)}{\sin\phi} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{2\sqrt{3}\sin^2\phi-2\sin\phi\cos\phi-\sqrt{3}}{\sin\phi} \\
&= \frac{3}{4}\sin\phi-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\phi-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sin\phi}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}d\theta &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{3}{4}\sin\phi-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\phi-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sin\phi}\right)d\phi \\
&= \left[-\frac{3}{4}\cos\phi-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\phi-\frac{3}{16}\log\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi} \\
&= \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\log(3+2\sqrt{3})
\end{aligned}$$

であり,

$$V=\left\{\boldsymbol{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}\log(3+2\sqrt{3})}\right\}\boldsymbol{\pi}.$$

$\boxed{\text{IV}}$

次で定義される関数 $f(s)$ に対して以下の問いに答えよ.

$$f(s)\begin{cases}\dfrac{s}{16} & (0 \leqq s \leqq 4)\\ -\dfrac{s}{16}+\dfrac{1}{2} & (4 < s \leqq 8)\\ 0 & (s<0 \text{ または } 8<s)\end{cases}$$

問 1　関数 $t=f(s)$ のグラフと，関数 $t=f(s)$ のグラフを s 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ．答えのみでよい.

問 2　関数 $t=f(s)$ に対して $s \geqq 0$ を定義域とする関数 $t=F(s)$，$t=G(s)$ を次で定義する.

$$F(s)=\int_0^s f(u)du,\ G(s)=\int_0^s f(u-4)du$$

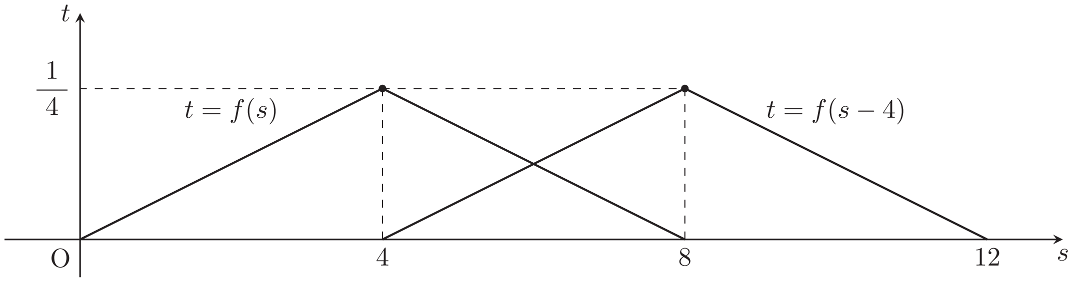
関数 $F(s)$，$G(s)$ をそれぞれ求め，これら 2 つの関数のグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ.

問 3　**問 2** で求めた $F(s)$，$G(s)$ に対し，$x=G(s)$，$y=F(s)$ とおく．点 $(x,\ y)$ の描く曲線の概形を xy 平面上に図示せよ.

問 4　**問 2** で求めた関数 $F(s)$，$G(s)$ に対し，xy 平面上の 2 点 $(0,\ 1)$ と $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ の間の距離の最小値を与える s の値を求めよ.

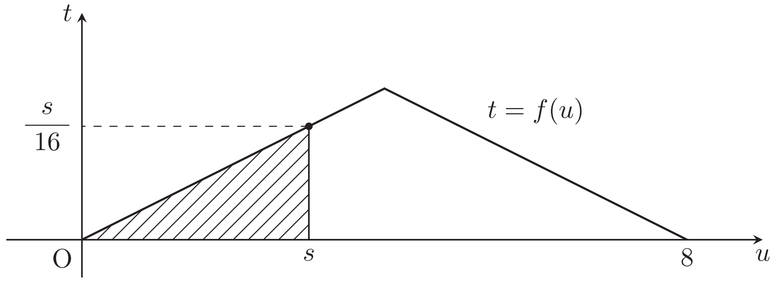
$\boxed{\text{解答}}$

問 1　$t=f(s)$ のグラフと，$t=f(s)$ を s 軸方向に 4 だけ平行移動した $t=f(s-4)$ のグラフを描くと以下のようになる.



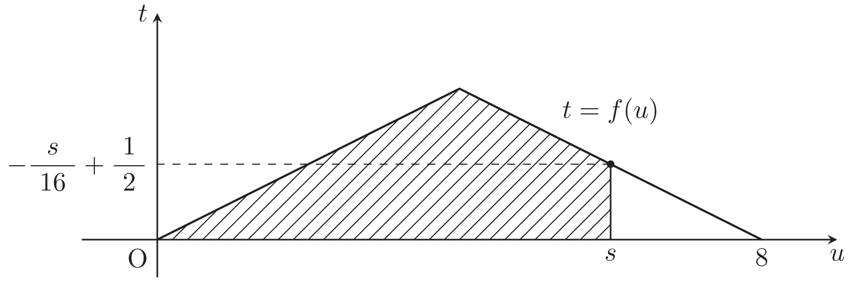
問 2　$0<s<8$ のとき，$F(s)$ は，$t=f(u)$，u 軸，$u=s$ で囲まれた 2 つの領域のうち，$u \leqq s$ を満たす方の面積であり，$0 \leqq s \leqq 8$ で単調増加する．したがって，$F(s)$ は，$0 \leqq s \leqq 8$ のとき，$t=f(u)$ のグラフを用いて下の図で表される面積となる.

(ア)　$0 \leqq s \leqq$ のとき $F(s)=\dfrac{1}{2}\cdot s\cdot\dfrac{s}{16}=\dfrac{s^2}{32}$.



(イ)　$4<s \leqq 8$ のとき

$$F(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(s-4)\left\{\frac{1}{4}+\left(-\frac{s}{16}+\frac{1}{2}\right)\right\}=-\frac{s^2}{32}+\frac{s}{2}-1.$$



(ウ)　$8<s$ のとき $F(s)=1$.（u 軸と $t=f(u)$ とで囲まれた三角形の面積）

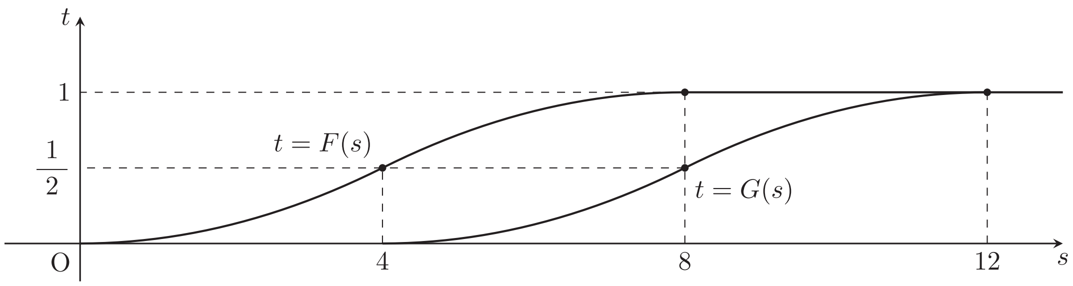
したがって，

$$F(s)=\begin{cases}\dfrac{s^2}{32} & (0\leqq s\leqq 4)\\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{s}{2}-1 & (4<s\leqq 8)\\ 1 & (8>s)\end{cases}$$

また，$s>4$ のとき，$G(s)=\displaystyle\int_0^s f(u-4)du$ は，$t=f(u-4)$ のグラフと u 軸，$u=s$ で囲まれた 2 つの領域のうち，$u\leqq s$ を満たす方の面積であり，$F(s)$ を利用して求めることができる．すなわち，$s\geqq 4$ のときは，$G(s)=F(s-4)$ で求まるので次のようになる．

$$G(s)=\begin{cases}0 & (0\leqq s\leqq 4)\\ \dfrac{(s-4)^2}{32} & (4<s\leqq 8)\\ -\dfrac{(s-4)^2}{32}+\dfrac{s-4}{2}-1=-\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{3}{4}s-\dfrac{7}{2} & (8<s\leqq 12)\\ 1 & (12<s)\end{cases}$$

したがって，グラフは次のようになる．



問 3　問 2 より，

$$F(s)=\begin{cases}\dfrac{s^2}{32} & (0\leqq s\leqq 4)\\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{s}{2}-1 & (4<s\leqq 8)\\ 1 & (8>s)\end{cases}\qquad G(s)=\begin{cases}0 & (0\leqq s\leqq 4)\\ \dfrac{(s-4)^2}{32} & (4<s\leqq 8)\\ -\dfrac{s^2}{32}+\dfrac{3}{4}s-\dfrac{7}{2} & (8<s\leqq 12)\\ 1 & (12<s)\end{cases}$$

これを利用して，点 $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ を満たす点の軌跡を考える．ただし，$F(s)$，$G(s)$ はともに単調増加．

(i)　$0\leqq s\leqq 4$ のとき，点 $(x,\ y)$ は $x=0$ 上の点であり，$F(0)\leqq F(s)\leqq F(4)$ であるから，

$x=0\ \left(0\leqq y\leqq \dfrac{1}{2}\right)$.

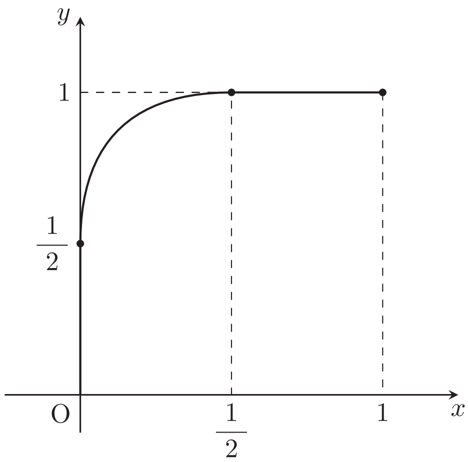
(ii)　$4<s\leqq 8$ のとき，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を結ぶ曲線であり，点 $(s,\ y)$ は x 成分，y 成分ともに単調

増加．

(iii)　$8 < s \leqq 12$ のとき，$y = 1$ 上の点であり，$G(8) < G(s) \leqq G(12)$ より，$y = 1 \left(\dfrac{1}{2} < x \leqq 1\right)$.

(iv)　$12 < s$ のとき，$(x,\ y) = (1,\ 1)$.

以上から，点 $(x,\ y) = (G(s),\ F(s))$ は次のような曲線を描く．



注：$4 < s < 8$ においてこの曲線の凹凸を調べると，

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{ds}}\\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{-\frac{s}{16}+\frac{1}{2}}{\frac{s-4}{16}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{s-4}{16}}\\ &= -\frac{64}{(s-4)^3} < 0\end{aligned}$$

であることから，上に凸であることがわかる．

問 4　問 3 で描いた図から，点 $(0,\ 1)$ と $(x,\ y) = (G(s),\ F(s))$ の間の距離の最小値を与える s は $4 < s \leqq 8$ に存在する．

この距離を l とおくとき

$$\begin{aligned}l^2 &= \{G(s)\}^2 + \{F(s)-1\}^2\\ &= \frac{(s-4)^4}{32^2} + \frac{(s-8)^4}{32^2}.\\ \frac{d}{ds}l^2 &= \frac{1}{32^2}\left\{4(s-4)^3 + 4(s-8)^3\right\}\\ &= \frac{8}{32^2}(s-6)\{(s-4)^2 - (s-4)(s-8) + (s-8)^2\}\\ &= \frac{1}{128}(s-6)(s^2-12s+48).\end{aligned}$$

ゆえに，増減表は以下のようになる．

s	4	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$\frac{d}{ds}l^2$		$-$	0	$+$	
l^2		$\searrow$		$\nearrow$	

l と l^2 の増減は一致するので，$s = \mathbf{6}$ のとき l は最小値をとることがわかる．

講評

$\boxed{\text{I}}$（やや易）
計算のみの問題である．要領よく計算したい．

$\boxed{\text{II}}$（標準）
問 1 は典型的な漸化式の立式である．問 2 は必要十分性の議論をしっかりと行いたい．また，小数の割算など計算ミスにも注意したい．

$\boxed{\text{III}}$（やや難）
典型的な回転体の体積であるが，計算が大変である．要領よく計算することが求められる．現実的に，問 2 までを確実に正解し，点数を確保したい．

$\boxed{\text{IV}}$（標準）
問 3 までは一本道であるので間違えられない．問 4 は凹凸性の議論など細かい部分に注意して答案を作成したい．

例年並みであった．2 次合格のためには最低でも 60 %程度は欲しいが，他の科目次第では 70 %は確保したい．全体的に計算量が多く，90 分という時間はあまりにも短い．前期同様に性格かつ迅速な計算が求められた内容であった．時間的に $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\text{III}}$ 問 1 問 2 $\boxed{\text{IV}}$ 問 1～問 3 を押さえられれば十分ではないだろうか．そう考えると，計算の処理速度と正確性が問われる出題だったように思われる．$\boxed{\text{II}}$ 問 2 は記述にも十分注意を払いたい．