解答速報

昭和大学医学部（Ⅱ期）　数学

2020年 3月10日実施

1　次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1)　xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 S : $x^2+y^2+z^2=1$，および S 上の点 A(0, 0, 1) を考える．S 上の A と異なる点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して、2 点 A，P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1－1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (t は実数) とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および t を用いて表せ．

(1－2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ．

(1－3)　球面 S と平面 $x=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする．点 P が C 上を動くとき，xy 平面における点 Q の軌跡を求めよ．

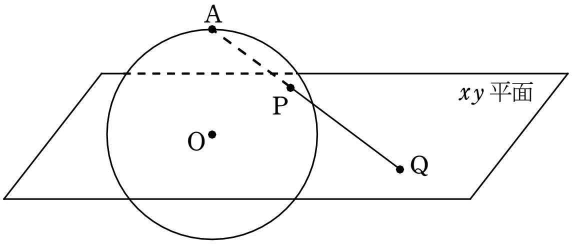
(2)　xy 平面において，点 A$(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする．ただし，$0<r\leqq a$ とする．円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 E$(a+r,\ 0)$ をとる．さらに，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q，2 点 E，P を通る直線と y 軸との交点を R，∠AEP を θ とする．このとき，3 点 P，Q，R を頂点とする △PQR について，次の問いに答えよ．

(2－1)　QP : QR の比を求めよ．また，△PQR が正三角形となる場合の θ の値を求めよ．

(2－2)　△PQR が正三角形となり，さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ．

【解説】

(1－1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.



(1－2)　点 Q を $(x,\ y,\ z)$ とおくとき，(1－1) より

$$(x,\ y,\ z)=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x_0,\ y_0,\ z_0)$$
$$=(tx_0,\ ty_0,\ 1-t+tz_0).$$

点 Q は xy 平面上の点なので，$z=0$ より，

$$1-(1-z_0)t=0.$$

また，点 P は球面 S 上にあり，A と異なるので $-1\leqq z_0<1$ を満たす．したがって，

$$t=\frac{1}{1-z_0}.$$

このとき，$x=tx_0=\dfrac{x_0}{1-z_0}$，$y=ty_0=\dfrac{y_0}{1-z_0}$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{y_0}{1-z_0},\ 0\right).$$

(1－3)　点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が円 C 上を動くとき，次の式を満たす．

$$x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=1,\ x_0=\frac{1}{2}.$$

すなわち，

$$y_0{}^2+z_0{}^2=\frac{3}{4},\ x_0=\frac{1}{2}. \quad \cdots①$$

ここで，Q$(x,\ y,\ 0)$ とおくと，(1－2) より，

$$x=\frac{x_0}{1-z_0}=\frac{1}{2(1-z_0)}.$$

明らかに $x \fallingdotseq 0$ であり，

$$1-z_0=\frac{1}{2x} \iff z_0=1-\frac{1}{2x}. \quad \cdots ②$$

同様に，

$$y=\frac{y_0}{1-z_0} \iff y_0=y(1-z_0)=\frac{y}{2x}. \quad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入すると，

$$\left(\frac{y}{2x}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2x}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

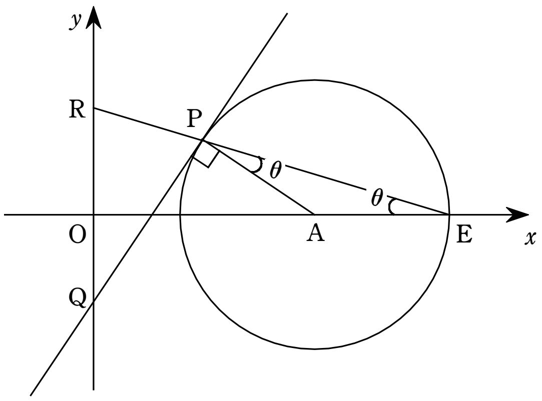
これを整理すると，

$$(x-2)^2+y^2=3.$$

したがって，点 Q の軌跡は，円 $(x-2)^2+y^2=3$．$(z=0)$

注：本問では，「xy 平面における軌跡を求めよ」と問われているので，$z=0$ は不問だろう．

(2)



(2−1)　△AEP は 二等辺三角形より，$\angle\mathrm{AEP}=\angle\mathrm{APE}=\theta \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおける．

$\angle\mathrm{APQ}=\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$\angle\mathrm{QPR}=\pi-(\angle\mathrm{APQ}+\angle\mathrm{APE})=\frac{\pi}{2}-\theta.$$

また，△OER は $\angle\mathrm{EOR}=\frac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形だから，

$$\angle\mathrm{ORE}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\angle\mathrm{OER}\right)=\frac{\pi}{2}-\theta.$$

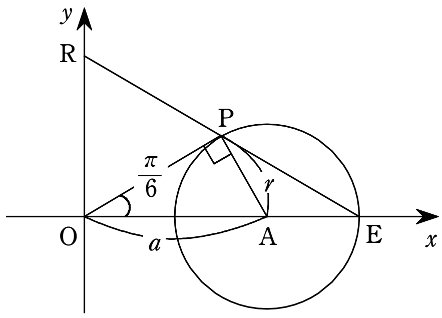
したがって，△QPR は QP＝QR を満たす二等辺三角形である．ゆえに

$$\mathrm{QP}:\mathrm{QR}=1:1.$$

また，△PQR が正三角形となるとき，

$$\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{3} \iff \theta=\frac{\pi}{6}.$$

(2−2)　点 P の y 座標は正であるから，点 R は $y>0$ を満たす．したがって，条件のように原点と一致する点は，Q に限る．Q＝O のとき，図は以下のようになる．



△OPA に注目すると，

$$\angle \mathrm{POE}=\frac{\pi}{2}-\angle \mathrm{POR}=\frac{\pi}{6}.$$

であるから，$\angle \mathrm{AOP}=\frac{\pi}{6}$，$\angle \mathrm{OAP}=\frac{\pi}{3}$，$\angle \mathrm{OPA}=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形である.

よって，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{AP}=r$ より $a=2r$.

$\boxed{2}$

(1)　方程式 $4x^4-8x^3+11x^2-8x+4=0$ を解け．

(2)　$x^{2020}+x+1$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(3)　3 次方程式 $x^3-x^2-x-1=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする．$\dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}$，$\dfrac{1}{(\beta-2)(\gamma-2)}$，$\dfrac{1}{(\gamma-2)(\alpha-2)}$ を解とする 3 次方程式を求めよ．ただし，x^3 の係数は 1 とする．

【解説】

(1)
$$4x^4-8x^3+11x^2-8x+4=0 \quad \cdots①$$

① に $x=0$ を代入しても成り立たないので，① は $x=0$ を解に持たない．両辺を $x^2\ (\neq 0)$ で割ると，

$$4x^2-8x+11-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}=0.$$

$$\iff 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0.$$

$$\iff 4\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0. \quad \cdots②$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおけば，② は，

$$4(t^2-2)-8t+11=0 \iff 4t^2-8t+3=0 \iff (2t-3)(2t-1)=0.$$

したがって，① の解は，

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \text{ または } x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

の解である．

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \iff 2x^2-3x+2=0 \iff x=\frac{3\pm\sqrt{7}\,i}{4}.$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \iff 2x^2-x+2=0 \iff x=\frac{1\pm\sqrt{15}\,i}{4}.$$

したがって，① の 4 つの解は，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}\,i}{4}$，$\dfrac{1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$．

【参考】x^2 で割らずに，そのまま因数分解してもよい．

$$4x^4-8x^3+11x^2-8x+4=0$$
$$\iff 4(x^4+1)-8(x^3+x)+11x^2=0$$
$$\iff 4\{(x^2+1)^2-2x^2\}-8x(x^2+1)+11x^2=0$$
$$\iff 4(x^2+1)^2-8x(x^2+1)+3x^2=0$$
$$\iff \{2(x^2+1)-3x\}\{2(x^2+1)-x\}=0$$
$$\iff (2x^2-3x+2)(2x^2-x+2)=0$$

ゆえに，$2x^2-3x+2=0$ または $2x^2-x+2=0$ の解を求めればよい．

(2)　$f(x)=x^{2020}+x+1$ とおく．また，$x^2+x+1=0$ の解の一つを $x=\omega$ とおくと，

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$$

を満たす．ここで，$f(\omega)$ の値を求めると，

$$f(\omega)=\omega^{2020}+\omega+1=(\omega^3)^{673}\cdot\omega+\omega+1=2\omega+1. \quad \cdots①$$

また，x の整式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px+q$ とおくと，

$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+px+q.$$

ただし，p，q は実数である．ここで，$\omega^2+\omega+1=0$ を用いると，

$$f(\omega)=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+p\omega+q=p\omega+q. \quad \cdots②$$

①，② より，

$$p\omega+q=2\omega+1 \iff (p-2)\omega=1-q. \quad \cdots③$$

$p\fallingdotseq 2$ と仮定すると，③ より $\omega=\dfrac{1-q}{p-2}$ となるが，ω は虚数であり，p，q は実数なので，この等式は成り立たない．

したがって，$p=2$ であり，このとき ③ より $q=1$．したがって $f(x)$ を x^2+x+1 で割った余りは $2x+1$．

(3)　3 次方程式 $x^3-x^2-x-1=0 \quad \cdots①$　の 3 つの解が α，β，γ であるから，x についての恒等式

$$x^3-x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \cdots②$$

を得る．② に $x=2$ を代入すると，

$$2^3-2^2-2-1=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma).$$
$$\iff (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=1. \quad \cdots③$$

① は $x=2$ を解に持たないので，$\alpha-2\fallingdotseq 0$，$\beta-2\fallingdotseq 0$，$\gamma-2\fallingdotseq 0$ であり，③ から

$$\frac{1}{(2-\alpha)(2-\beta)}=2-\gamma,\quad \frac{1}{(2-\beta)(2-\gamma)}=2-\alpha,\quad \frac{1}{(2-\gamma)(2-\alpha)}=2-\beta.$$

つまり，$x=2-\alpha$，$2-\beta$，$2-\gamma$ を解に持ち x^3 の係数が 1 であるような 3 次方程式を求めればよい．　$\cdots(*)$

方程式 ① において，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=1.$$

また，求める 3 次方程式は，

$$\{x-(2-\alpha)\}\{x-(2-\beta)\}\{x-(2-\gamma)\}=0$$
$$\iff x^3-\{(2-\alpha)+(2-\beta)+(2-\gamma)\}x^2+\{(2-\alpha)(2-\beta)+(2-\beta)(2-\gamma)+(2-\gamma)(2-\alpha)\}x$$
$$-(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=0. \quad \cdots④$$

ここで，

$$(2-\alpha)+(2-\beta)+(2-\gamma)=6-(\alpha+\beta+\gamma)=5.$$
$$(2-\alpha)(2-\beta)+(2-\beta)(2-\gamma)+(2-\gamma)(2-\alpha)=12-4(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=12-4+(-1)=7.$$
$$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=1.$$

であるから，④ より求める方程式は，

$$x^3-5x^2+7x-1=0.$$

【別解 (*) 以降】

① が $x=\alpha$，β，γ を解に持つとき，$X=2-\alpha$，$2-\beta$，$2-\gamma$ を解に持つ方程式を作る．このとき，

$$X=2-x \iff x=2-X.$$

これを ① に代入すると，

$$(2-X)^3-(2-X)^2-(2-X)-1=0.$$
$$\iff X^3-5X^2+7X-1=0.$$

これは，$X=2-\alpha$，$2-\beta$，$2-\gamma$，すなわち，$\dfrac{1}{(2-\alpha)(2-\beta)}$，$\dfrac{1}{(2-\beta)(2-\gamma)}$，$\dfrac{1}{(2-\gamma)(2-\alpha)}$ を解に持つ方程式である．したがって，求める方程式は

$$x^3-5x^2+7x-1=0.$$

3 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ．

(1)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{11}{16}$ $(90°<\theta<180°)$ のとき，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　座標平面上に2点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$ がある．円 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 上に点Pをとって，$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ を最小にするような点Pの座標を求めよ．

(3)　1から55までの整数のどれか1つを同じ大きさのカードに書いて，1を書いたカードを1枚，2を書いたカードを2枚，以下同様に55を書いたカードを55枚作り，これらを箱に入れる．箱の中をよく混ぜてから1枚のカードを取り出し，それに書いてある数をXとする．

(3−1)　X＝28 となる確率を求めよ．

(3−2)　Xの期待値（平均値）を求めよ．

【解説】

(1)　与式より

$$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=\frac{11}{16}$$

$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ なので

$$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{11}{16} \iff 8t^3-24t+11=0 \iff (2t-1)(4t^2+2t-11)=0$$

$$\iff t=\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}$$

$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$，$90°<\theta<180°$ より，$-1<t<1$ なので，$t=\dfrac{1}{2}$

したがって，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$ となるので，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は s の2次方程式

$$s^2-\frac{1}{2}s-\frac{3}{8}=0 \iff 8s^2-4s-3=0$$

の2つの実数解である．

よって，$s=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}$ より，$90°<\theta<180°$ と併せて

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4},\quad \cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}.$$

(2)　中線定理より

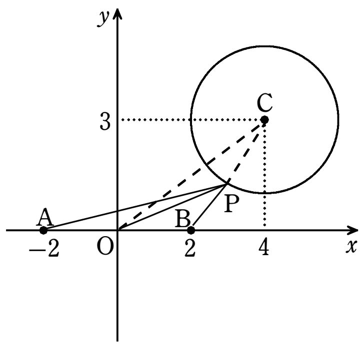
$$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2(\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OP}}^2)=2(4+\overline{\mathrm{OP}}^2)$$

したがって，$\overline{\mathrm{OP}}$ が最小値となる点Pの座標を考えればよい．

円の中心をCとすると

$$\overline{\mathrm{OP}}\geqq\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{CP}}=5-2=3$$

となるので，$\overline{\mathrm{OP}}=3$，すなわち，O，P，Cがこの順に一直線上に並ぶとき，$\overline{\mathrm{OP}}$ は最小となる．



よって，このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{12}{5},\frac{9}{5}\right) \qquad \therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{12}{5},\frac{9}{5}\right).$$

【参考】

円上の点Pを $x=4+2\cos\theta$，$y=3+2\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と媒介変数表示して，$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ を θ の関数として扱ってもよい．

(3)

(3−1)　カードの枚数は，全部で

$$1+2+3+\cdots+55=\frac{55(1+55)}{2}\ (\text{枚})$$

であり，28 と書かれたカードは全部で 28 枚あるので，求める確率 $P(X=28)$ は，

$$P(X=28)=\frac{28}{\frac{55(1+55)}{2}}=\frac{1}{55}.$$

(3−2)

$X=k$ （$k=1,2,\cdots,55$）となる確率 $P(X=k)$ は，

$$P(X=k)=\frac{k}{1+2+\cdots+55}=\frac{k}{\frac{55(1+55)}{2}}=\frac{k}{55\cdot 28}$$

よって，求める X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{55}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{55}k\cdot\frac{k}{55\cdot 28}=\frac{1}{55\cdot 28}\sum_{k=1}^{55}k^2=\frac{1}{55\cdot 28}\cdot\frac{55\cdot 56\cdot 111}{6}=\frac{111}{3}=37.$$

$\boxed{4}$ **次の各問いに答えよ．ただし，(1)，(2) は結果のみを解答欄に記入せよ．**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos x}$ を求めよ．

(2) 半径 3 の球に内接する直円柱の体積の最大値を求めよ．

(3) xy 平面上で $x\geqq 0$，$y\leqq 0$ のとき

$$\int_y^x (1-|t|)dt\geqq 0$$

を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する部分を図示せよ．

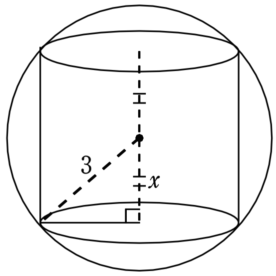
【解説】

(1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 5x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^5 5x}{x^2}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot 25}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1\cdot 25}{\dfrac{1}{2}}=50.$$

(2) 球の中心から直円柱の底面に下ろした垂線の長さを x （$0<x<3$）とすると，

底面の半径は，三平方の定理より

$$\sqrt{3^2-x^2}=\sqrt{9-x^2}$$



したがって，直円柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x)=\pi\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2\cdot 2x=2\pi(9x-x^3)$$

であり，

$$V'(x)=2\pi(9-3x^2)=6\pi(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)$$

x	(0)		$\sqrt{3}$		(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

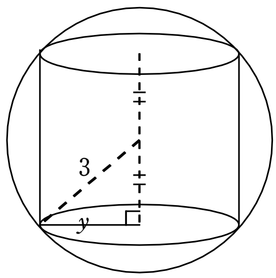
よって，増減表より，求める最大値は $x=\sqrt{3}$ のときで

$$V(\sqrt{3})=12\sqrt{3}\pi\ .$$

【別解】

底面の半径を y （$0<y<3$）とおくと，直円柱の高さは，三平方の定理より

$$2\sqrt{3^2-y^2}=2\sqrt{9-y^2}$$



したがって，直円柱の体積 $W(y)$ は

$$W(y)=\pi y^2\cdot 2\sqrt{9-y^2}=2\pi\sqrt{9y^4-y^6}=2\pi\sqrt{9t^2-t^3}$$

（$y^2=t$，$0<t<9$）

$f(t)=9t^2-t^3$ とおくと

$$f'(t)=18t-3t^2=3t(6-t)$$

t	(0)		6		(9)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，増減表より，$f(t)$，すなわち，$W(y)$ の最大値は $t=6 \iff y=\sqrt{6}$ のときで

$$W(\sqrt{6})=2\pi\sqrt{f(6)}=12\sqrt{3}\pi\ .$$

【参考】

$$W(y)=2\pi\sqrt{y^4(9-y^2)}$$

ここで，$y^2>0$，$9-y^2>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$\frac{y^2+y^2+2(9-y^2)}{3}\geqq\sqrt[3]{y^2\cdot y^2\cdot 2(9-y^2)}$$

$$\iff \ y^4(9-y^2) \leqq \frac{6^3}{2} = 108.$$

したがって，

$$W(y) \leqq 2\pi \cdot \sqrt{108} = 12\sqrt{3}\,\pi.$$

等号が成り立つのは，

$$y^2 = 2(9-y^2) \iff y^2 = 6$$

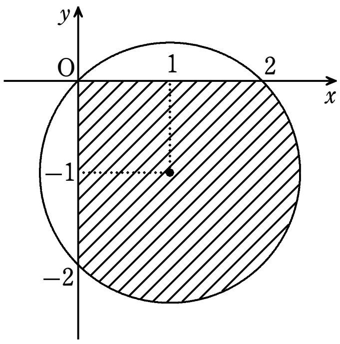
であるから，$y=\sqrt{6}$ のときに $W(y)$ の最大値は $12\sqrt{3}\,\pi$.

(3) $$\int_y^x (1-|t|)\,dt = \int_y^0 (1+t)\,dt + \int_0^x (1-t)\,dt = \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_y^0 + \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x = -y-\frac{y^2}{2}+x-\frac{x^2}{2}.$$

$\displaystyle\int_y^x (1-|t|)\,dt \geqq 0$ のとき

$$-y-\frac{y^2}{2}+x-\frac{x^2}{2} \geqq 0 \qquad \therefore \quad (x-1)^2+(y+1)^2 \leqq 2\,.$$

よって，点 (x, y) の存在する部分を図示すると，右図の斜線部分となる．ただし，境界を含む．



講評

$\boxed{1}$ (標準)

(1) は空間の軌跡に関する典型問題であった．極力落としたくない．(2) は図形的な考察を適切にできるかが問われた内容であった．最低でも (2−1) をとっていきたい．

$\boxed{2}$ (やや易)

いずれも典型問題であった．(3) がやや計算量が多くなるので，工夫して計算していきたいところである．

$\boxed{3}$ (やや易)

いずれも典型問題であった．(2) は中線定理が利用できると計算量をぐっと減らせ，周りに差がつけられるだろう．様々な手法で解くことができる問題なので，解法の選択が重要な問題であったと言える．

$\boxed{4}$ (やや易)

いずれも典型問題であった．丁寧に計算を進め，できればどれも落としたくない．

ほとんど典型問題であり，点差がつく良い出題であった．他の科目にもよるがボーダーは 65% 前後であろう．