医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東海大学医学部　数学

2020年 2月3日実施

1 次の空欄を埋めなさい．解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

(1) 2 進法で表された $0.101_{(2)}$ を 10 進法で表すと $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $f(x) = x\log x$ とする．

$$\lim_{h\to 0}\frac{(e^2+h)f(e^2+h)-e^2f(e^2)}{h} = \boxed{\text{イ}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e-1)\{n+k(e-1)\}}{n^2}f\left(1+\frac{k(e-1)}{n}\right) = \boxed{\text{ウ}}$$

(3) a を実数の範囲で変化させるとき，$f(x) = 4x^3+5ax^2+a^2x+3x-a$ を $x-1$ で割ったときの余り R のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) $\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}) = -\sqrt{2}$ ただし，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ は有理数，$\boxed{\text{キ}}$ はできるだけ小さい自然数とする．

(5) $\tan x\tan y = \dfrac{1}{3}$ のとき $\tan(x+y)+\tan(x-y)$ の最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である．ただし，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

解答

(1) $0.101_{(2)} = 1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{5}{8} = \mathbf{0.625}$.

(2) $f(x) = x\log x$ より $f'(x) = 1+\log x$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(e^2+h)f(e^2+h)-e^2f(e^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}f(e^2+h)+e^2\lim_{h\to 0}\frac{f(e^2+h)-f(e^2)}{h}\\
&= f(e^2)+e^2f'(e^2)\\
&= 2e^2+3e^2\\
&= \mathbf{5e^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e-1)\{n+k(e-1)\}}{n^2}f\left(1+\frac{k(e-1)}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e-1)\left\{1+\frac{k}{n}(e-1)\right\}f\left(1+\frac{k(e-1)}{n}\right)\quad (=A\text{ とする})
\end{aligned}$$

区分求積法により

$$A=\int_0^1\{1+(e-1)x\}f(1+(e-1)x)(e-1)dx$$

ここで，$1+(e-1)x=t$ とおくと，

$$dt=(e-1)dx$$

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	e

$$\begin{aligned}A&=\int_1^e tf(t)dt\\&=\int_1^e t^2\log t dt\\&=\left[\frac{t^3}{3}\log t\right]_1^e-\int_1^e\frac{t^3}{3}dt\\&=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}}\end{aligned}$$

(3)　$f(x)=4x^3+5ax^2+(a^2+3)x-a$ と整理して，$f(x)$ を $x-1$ で割った余り R は $R=a^2-4a+7$ であるから

$$R=(a-2)^2+3$$

a はすべての実数をとって動くことから $R\geqq\mathbf{3}$.

(4)　$\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}x=-2$ を解いて $x=\dfrac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}=\boldsymbol{5+2\sqrt{6}}$.

(5)

$$\begin{aligned}&\tan(x+y)+\tan(x-y)\\&=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}+\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}\\&=\frac{3}{2}(\tan x+\tan y)+\frac{3}{4}(\tan x-\tan y)\\&=\frac{3}{4}(3\tan x+\tan y)\end{aligned}$$

ここで，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$ であることから $\tan x>0$，$\tan y>0$.
よって，相加相乗平均の関係から

$$\frac{3}{4}(3\tan x+\tan y)\geqq\frac{3}{4}\cdot2\sqrt{3\tan x\tan y}=\frac{3}{2}$$

等号成立は $3\tan x=\tan y$ のときで，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$ より，この等式を満たす x，y は存在する．

ゆえに $\tan(x+y)+\tan(x-y)\geqq\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$.

$\boxed{2}$ 次の空欄を埋めなさい．解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

自然数 x に対して x の各桁の数字を逆順に並べた自然数を対応させる関数を $f(x)$ とする．ただし，逆順にしたとき最上位の各桁から並ぶ 0 は無視する．例えば，$f(4)=4$，$f(123)=321$，$f(102300)=3201$ である．自然数 x に対して関数 $g(x)$ を $g(x)=|x-f(x)|$ と定める．

(1) $g(1964)=$ $\boxed{\text{ア}}$

(2) 1 以上 10000 以下で $g(x)=0$ をみたす自然数 x の個数は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) $g(x)$ の最小値は明らかに 0 であり，$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき 0 の次の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．
$g(x)=99$ となる最小の自然数 x は $\boxed{\text{エ}}$ であり，$g(x)=99$ をみたす自然数 x の個数は $\boxed{\text{オ}}$ である．
$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき 99 の次の値は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $g(x)=196398$ となる最小の自然数 x は $\boxed{\text{キ}}$ であり，最大の自然数 x は $\boxed{\text{ク}}$ である．

解答

以下，a，b，c，d，e，f は $1\leqq a\leqq 9$，$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$，$0\leqq d\leqq 9$，$0\leqq e\leqq 9$，$0\leqq f\leqq 9$ をみたす整数である．

(1) $g(1964)=|1964-4691|=\mathbf{2727}$.

(2) $g(x)=0$ すなわち $x=f(x)$ となる x を考える．

(i) x が 1 桁の自然数のとき $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ の 9 通り．

(ii) x が 2 桁の自然数のとき $x=11,\ 22,\ 33,\ \cdots,\ 99$ の 9 通り．

(iii) x が 3 桁の自然数のとき
$x=100a+10b+c$ と書くと，$a=c$（b は任意）であれば $x=f(x)$ が成り立つ．
$(a,\ c)$ が 9 通りで，b が 10 通りとれることから $9\times 10=90$ 通り．

(iv) x が 4 桁の自然数のとき
$x=1000a+100b+10c+d$ と書くと，$f(x)=1000d+100c+10b+a$.
ここで，$a=d$ かつ $b=c$ が成り立てば $x=f(x)$ が成り立つ．
$(a,\ d)$ が 9 通りで，$(b,\ c)$ が 10 通りとれることから $9\times 10=90$ 通り．

(v) $x=10000$ のとき
$f(x)=1$ より，$g(x)=0$ とならない．

(i)〜(v) より $9+9+90+90=\mathbf{198}$ 通り．

(3) • $\boxed{\text{ウ}}$ について

(i) x が 2 桁の自然数のとき
$x=10a+b$，$f(x)=10b+a$ と表せるので $g(x)=9|a-b|$ である．
ゆえに，$g(x)$ がとれる 0 の次に小さい値は 9（$a-b=\pm 1$ のとき）

(ii) x が 3 桁の自然数のとき
$x=100a+10b+c$，$f(x)=100c+10b+a$ と表せるので，$g(x)=99|a-c|$ である．
ゆえに，$g(x)$ がとれる 0 の次に小さい値は 99（$a-c=\pm 1$ のとき）

(iii) x が 4 桁の自然数のとき
$x=1000a+100b+10c+d$，$f(x)=1000d+100c+10b+a$ と表せるので，$g(x)=|999(a-d)+90(b-c)|$ である．
ゆえに，$g(x)$ がとれる 0 の次に小さい値は 90（$a-d=0$ かつ $b-c=\pm 1$ のとき）

このことから，$g(x)$ がとれる値を小さい順に並べたとき，0 の次に小さい値は **9** である．

• $\boxed{\text{エ}}$ $\boxed{\text{オ}}$ について
$g(x)=99$ になるのは，x が 3 桁のときである．
$x=100a+10b+c$ と書くと $g(x)=99|a-c|$.

よって，$g(x)=99$ のとき $|a-c|=1$ ……①
これをみたす $(a,\ b,\ c)$ のうち，x が最小となるのは，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 0)$ のときで，$x=100$.
また，① をみたす $(a,\ c)$ の個数は $1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$ に注意すると 17 通り.
b は 10 通りの値をとれるので，$g(x)=99$ となる x の個数は $17\times 10=\mathbf{170}$ 通り.

- $\boxed{\text{カ}}$ について

$$g(x)=\begin{cases} 9|a-b| & (x \text{ が 2 桁の自然数のとき}) \\ 99|a-c| & (x \text{ が 3 桁の自然数のとき}) \\ |999(a-d)+90(b-c)| & (x \text{ が 4 桁の自然数のとき}) \end{cases}$$

であることから，$g(x)$ の値を小さい順にならべていくと

$$0,\ 9,\ 18,\ 27,\ \cdots,\ 81,\ 90,\ 99,\ 180,\ \cdots$$

となることから，99 の次の値は **180** である.

(4) x は 6 桁の自然数である.
x が 6 桁のとき，$x=100000a+10000b+1000c+100d+10e+f$ と書くと，

$$g(x)=9|11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)|$$

となるので，$g(x)=196398$ のとき，

$$|11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)|=21822$$

(i) $x-f(x) \geqq 0$ のとき

$$11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)=21822$$

下 1 桁目に注目すると，$a-f=2$ である．下 2 桁目に注目して $b-e=0$ であることがわかる．このとき，
$22222+100(c-d)=21822$ より，$c-d=-4$.
$\therefore\ (a-f,\ b-e,\ c-d)=(2,\ 0,\ -4)$.

(ii) $x-f(x)<0$ のとき

$$11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)=-21822$$

下 1 桁目に注目すると，$a-f=-2$ である．下 2 桁目に注目して $b-e=0$ であることがわかる．このとき，
$-22222+100(c-d)=-21822$ より $c-d=4$.
$\therefore\ (a-f,\ b-e,\ c-d)=(-2,\ 0,\ 4)$.

したがって (i)，(ii) より

$$(a-f,\ b-e,\ c-d)=(\pm 2,\ 0,\ \mp 4) \quad (\text{複号同順})$$

が必要である.
これを満たす整数 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$ の組み合わせで x が最小となるものを考えると，$x-f(x)<0$ のときで
$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(1,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 3)$ （$g(x)=196398$ を満たす.）
最大のものを考えると，$x-f(x) \geqq 0$ のときで
$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(9,\ 9,\ 5,\ 9,\ 9,\ 7)$ （$g(x)=196398$ を満たす.）
よって，以上より，求める最小の自然数 x および最大の自然数 x はそれぞれ **104003**，**995997**.

【補足 1】
(3) において，$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき 99 の次の値が，x が 4 桁以上のときであることを自明とした．本番も記述式ではないので，自明として解くのが懸命だろう。
ちなみに，自然数 x について，5 桁以上を考えると

$$x=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^1+a_1$$

（n は 5 以上の自然数，a_k は，$1 \leqq a_n \leqq 9$，$0 \leqq a_k \leqq 9$ $(k \neq n)$ を満たす自然数）と書けるので，
n が奇数のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= |a_n(10^{n-1}-1)+a_{n-1}(10^{n-2}-10^1)+\cdots+a_2(10^1-10^{n-2})+a_1(1-10^{n-1})| \\ &= \left|(a_n-a_1)(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+\cdots+\left(a_{\frac{n+1}{2}+1}-a_{\frac{n+1}{2}-1}\right)\left(10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n+1}{2}-2}\right)\right| \\ &\geqq \left|\left(a_{\frac{n+1}{2}+1}-a_{\frac{n+1}{2}-1}\right)\left(10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n+1}{2}-2}\right)\right|. \end{aligned}$$

また，n が偶数のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= |a_n(10^{n-1}-1)+a_{n-1}(10^{n-2}-10^1)+\cdots+a_2(10^1-10^{n-2})+a_1(1-10^{n-1})| \\ &= \left|(a_n-a_1)(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+\cdots+\left(a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}\right)\left(10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n}{2}-1}\right)\right| \\ &\geqq \left|\left(a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}\right)\left(10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n}{2}-1}\right)\right| \end{aligned}$$

となる．したがって，$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき 0 の次の値は
n が奇数のとき，$\left|a_{\frac{n+1}{2}+1}-a_{\frac{n+1}{2}-1}\right|=1$，$n=5$ で，$1\cdot\left(10^{\frac{5+1}{2}}-10^{\frac{5+1}{2}-2}\right)=990.$
n が偶数のとき，$\left|a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}\right|=1$，$n=6$ で，$1\cdot\left(10^{\frac{6}{2}}-10^{\frac{6}{2}-1}\right)=900.$
となる．
【補足 2】
(4) において，x は 6 桁であることを自明とした．本番も記述式ではないので，(3) 同様に，自明として解くのが懸命だろう．
ちなみに，自然数 x について，7 桁以上を考えると

$$x = a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^1+a_1$$

（n は 7 以上の自然数，a_k は，$1 \leqq a_n \leqq 9$，$0 \leqq a_k \leqq 9$ $(k \neq n)$ を満たす自然数）と書けるので，

$$\begin{aligned} g(x) &= |a_n(10^{n-1}-1)+a_{n-1}(10^{n-2}-10^1)+\cdots+a_2(10^1-10^{n-2})+a_1(1-10^{n-1})| \\ &= |(a_n-a_1)(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+(a_{n-2}-a_3)(10^{n-3}-10^2)+\cdots| \end{aligned}$$

である、$1 \leqq a_n \leqq 9$，$0 \leqq a_k \leqq 9$ $(k \neq n)$ であることから，$x-f(x) \geqq 0$ のとき，下 1 桁目に注目して，$a_n-a_1=2$ と決まり，

$$\begin{aligned} g(x) &= |2(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+(a_{n-2}-a_3)(10^{n-3}-10^2)+\cdots| \\ &\geqq 2(10^{n-1}-1)-9(10^{n-2}-10^1)-9(10^{n-3}-10^2)+\cdots \\ &\geqq 2(10^6-1)-9(10^5-10^1)-9(10^4-10^2) \\ &= 1010988 \end{aligned}$$

となり，$g(x)=196398$ となることはない．$x-f(x)<0$ のときも同様である．

$\boxed{3}$ 次の空欄を埋めなさい．解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

2 人のプレイヤー A，B がじゃんけんをする次のようなゲームがある．じゃんけんをしてじゃんけんに勝ったプレイヤーはグーを出して勝てば 1 点を，パーあるいはチョキで勝てば 2 点もらえ，負けたプレイヤーやあいこのプレイヤーは得点をもらえない．双方の最初の持ち点は 0 点である．ゲームが始まる前に T の値を決めておき，先に得点の合計が T 以上になったプレイヤーをゲームの勝者とする．プレイヤー B は 1 回ごとにグーを $\dfrac{2}{5}$，チョキを $\dfrac{2}{5}$，パーを $\dfrac{1}{5}$ の確率で出すとする．また，$|p| < 1$ をみたす実数 p と 0 以上の整数 n について，無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k$ が収束することは既知の事実として利用してよい．

(1) $T = 1$ とし，プレイヤー A がグーを選んだとする．k 回目のじゃんけんでプレイヤー A がゲームに勝つ確率を P_k とすると $P_k = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \boxed{\text{イ}}$ となる．

(2) $T = 2$ とし，プレイヤー A がグーを選んだとする．k 回目のじゃんけんでプレイヤー A がゲームに勝つ確率を Q_k とすると $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \boxed{\text{ウ}}$ となる．

(3) $T = 2$ とし，プレイヤー A がチョキを選んだとする．k 回目のじゃんけんでプレイヤー A がゲームに勝つ確率を R_k とすると $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} R_k = \boxed{\text{エ}}$ となる．

(4) 実数の定数 p が $|p| < 1$ をみたしているとし，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-1)!p^k}{(k-n)!}$ と定める．例えば a_1 は無限等比級数の和である．$a_3 - pa_3$ を計算することにより，$a_3 = \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k = \boxed{\text{オ}}$ が得られる．$\{a_n\}$ の一般項を極限を用いずに表すと $a_n = \boxed{\text{カ}}$ となる．

(5) $T = 3$ とし，プレイヤー A がグーを選んだとする． k 回目のじゃんけんでプレイヤー A の得点が 3，プレイヤー B の得点が 2 で，プレイヤー A がゲームに勝つ確率を S_k とすると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \boxed{\text{キ}}$ となる．

$\boxed{\text{解答}}$

- グーを出して勝つ：+1 点
- パーまたはチョキを出して勝つ：+2 点
- あいこまたは負け：0 点

A が出す手は決まっており，B が出す手は，グーの確率が $\dfrac{2}{5}$，チョキの確率が $\dfrac{2}{5}$，パーの確率が $\dfrac{1}{5}$ である．

(1) $T = 1$ つまり 1 点以上獲得した時点で終了する．A がグーを出し続けるので，1 回のじゃんけんで，

$$\text{B が}\begin{cases} \dfrac{2}{5}\text{の確率でグーを出すと引き分け} \\ \dfrac{2}{5}\text{の確率でチョキを出すと A が}+1\text{点} \\ \dfrac{1}{5}\text{の確率でパーを出すと B が}+2\text{点} \end{cases}$$

となる．すなわち，k 回目のじゃんけんで A が勝者となるのは，1 回目から $k-1$ 回目まで引き分けが続き，k 回目に B がチョキを出す場合を考えればよく，

$$P_k = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{k}}$$

また，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

(2)　$T=2$ つまり 2 点以上獲得した時点で終了するものとして，最終的に A が勝者となる確率を求める．A がグーを出し続けるので，(1) と同様に得点が推移する．ここで，A が 0 点の状態から最終的に勝者となる確率を x，1 点の状態から最終的に勝者となる確率を y とおく．A，B の持っている得点を a，b とするとき，状態を $(a,\ b)$ と表すと，

$$(a,\ b)=(0,\ 0)\quad (x\text{ の確率で A が勝利})\begin{cases}\text{グー} & (a,\ b)=(1,\ 0)\quad (y\text{ の確率で A が勝利})\\ \text{チョキ} & (a,\ b)=(0,\ 0)\quad (x\text{ の確率で A が勝利})\\ \text{パー} & (a,\ b)=(0,\ 2)\quad (\text{A の敗北})\end{cases}$$

$$(a,\ b)=(1,\ 0)\quad (y\text{ の確率で A が勝利})\begin{cases}\text{グー} & (a,\ b)=(2,\ 0)\quad (\text{A の勝利})\\ \text{チョキ} & (a,\ b)=(1,\ 0)\quad (y\text{ の確率で A が勝利})\\ \text{パー} & (a,\ b)=(1,\ 2)\quad (\text{A の敗北})\end{cases}$$

上図のように状態が遷移し，その状態に応じて勝者となる確率が変化する．したがって，次の方程式を得る．

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}\cdot y + \frac{2}{5}\cdot x + \frac{1}{5}\cdot 0 \\ y = \frac{2}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot y + \frac{1}{5}\cdot 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{9} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \mathbf{\frac{4}{9}}$.

【注意】

問題文中に「$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k$ が収束することは既知の事実として利用してよい」とある．後述するように Q_k は $k^n p^k$ の形の和で表されるため，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} Q_k$ は収束すると考えてよい．すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = x$ として計算をしてよい．また，あいこが出続ける確率は $k\to\infty$ で 0 に収束するため，必ず A，B のどちらかが勝者になるということを前提として計算した．

(3)　$T=2$ つまり 2 点以上獲得した時点で終了するものとして，最終的に A が勝者となる確率を求める．A がチョキを出し続けるので，1 回のじゃんけんで，

$$\text{B が}\begin{cases} \frac{2}{5}\text{ の確率でグーを出すと B が }+1\text{ 点} \\ \frac{2}{5}\text{ の確率でチョキを出すと引き分け} \\ \frac{1}{5}\text{ の確率でパーを出すと A が }+2\text{ 点} \end{cases}$$

となる．ここで，$(a,\ b)=(0,\ 0)$ の状態から A が最終的に勝者となる確率を X，$(a,\ b)=(0,\ 1)$ の状態から最終的に A が勝者となる確率を Y とおく．

$$(a,\ b)=(0,\ 0)\quad (X\text{ の確率で A が勝利})\begin{cases}\text{グー} & (a,\ b)=(0,\ 1)\quad (Y\text{ の確率で A が勝利})\\ \text{チョキ} & (a,\ b)=(0,\ 0)\quad (X\text{ の確率で A が勝利})\\ \text{パー} & (a,\ b)=(2,\ 0)\quad (\text{A の勝利})\end{cases}$$

$$(a,\ b)=(1,\ 0)\quad (Y\text{ の確率で A が勝利})\begin{cases}\text{グー} & (a,\ b)=(0,\ 2)\quad (\text{A の敗北})\\ \text{チョキ} & (a,\ b)=(0,\ 1)\quad (Y\text{ の確率で A が勝利})\\ \text{パー} & (a,\ b)=(2,\ 1)\quad (\text{A の勝利})\end{cases}$$

上図のように状態が遷移し，その状態に応じて勝者となる確率が変化する．したがって，次の方程式を得る．

$$\begin{cases} X = \dfrac{2}{5}\cdot Y + \dfrac{2}{5}\cdot X + \dfrac{1}{5}\cdot 1 \\ Y = \dfrac{2}{5}\cdot 0 + \dfrac{2}{5}\cdot Y + \dfrac{1}{5}\cdot 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X = \dfrac{5}{9} \\ Y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} R_k = \boldsymbol{\frac{5}{9}}$.

(4) $\displaystyle a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-1)!p^k}{(k-n)!}$ と定義したとき, $a_3 - pa_3$ を計算する．ただし, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k$ は収束するので, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^n p^k = 0$ は明らかである．

$$\begin{aligned}
a_3 - pa_3 &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)!p^k}{(k-3)!} - p\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)!p^k}{(k-3)!} \\
&= \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k - \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^{k+1} \\
&= \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k - \sum_{k=4}^{\infty}(k-2)(k-3)p^k \\
&= \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k - \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)(k-3)p^k \\
&= \sum_{k=3}^{\infty}\{(k-1)(k-2) - (k-2)(k-3)\}p^k \\
&= 2\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)p^k \\
&= 2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p^{k+1} \\
&= 2p\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!p^k}{(k-2)!} \\
&= 2pa_2.
\end{aligned}$$

同様にして，$a_2 - pa_2 = pa_1$ を得る．また，$\displaystyle a_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p^k = \frac{p}{1-p}$ であるから，

$$(1-p)a_3 = 2pa_2,\ (1-p)a_2 = pa_1,\ a_1 = \frac{p}{1-p}$$

を用いて，

$$a_3 = \frac{2p}{1-p}a_2 = \frac{2p^2}{(1-p)^2}a_1 = \frac{2p^3}{(1-p)^3}.$$

同様に計算を進めることで，$a_n - pa_n = p(n-1)a_{n-1}$ を得るので，帰納的に $a_n = \boldsymbol{\dfrac{(n-1)!p^n}{(1-p)^n}}$ である．

(5) $T = 3$ すなわち，3 点以上獲得した時点で終了する．A がグーを出し続けるので，(1) と同様に得点が推移する．

したがって，k 回目に A が勝者となるのは，1 回目から $k-1$ 回目までの間に，B がグーを $k-4$ 回，チョキを 2 回，パーを 1 回出し，さらに k 回目に B がチョキを出す場合である．すなわち，

$$S_k = \frac{(k-1)!}{(k-4)!\cdot 2!\cdot 1}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-4}\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\frac{(k-1)!}{(k-4)!}\left(\frac{2}{5}\right)^k.$$

よって最終的に A が勝者となる確率は，(4) の結果を用いて，

$$\sum_{k=4}^{\infty} S_k = \frac{1}{4}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(k-1)!}{(k-4)!}\left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{1}{4}\cdot\frac{3!\left(\frac{2}{5}\right)^4}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^4} = \mathbf{\frac{8}{27}}.$$

別解

(2) (3) を Σ 計算で処理する方法

(2)　$T=2$ かつ A がグーより，B がパーを選択すると，B が 2 点に達してしまうため，このゲームは終わってしまう．

そして，グーで勝つと 1 点もらえることから，Q_k は「$k-1$ 回目までに B がチョキを 1 回出し，かつ k 回目に B がチョキを出す確率」である．ここで，$Q_1=0$ である．

$k \geqq 2$ において $Q_k = {}_{k-1}\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{5} = (k-1)\left(\frac{2}{5}\right)^k$ （$k=1$ でも成り立つ）

$T_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k = \sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{2}{5}\right)^k$ とすると

$$T_n = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots + (n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^n \qquad \cdots\cdots①$$

$$\frac{2}{5}T_n = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots + (n-2)\left(\frac{2}{5}\right)^n + (n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \qquad \cdots\cdots②$$

① と ② を辺々引くことで

$$\frac{3}{5}T_n = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n - (n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

よって $T_n = \frac{2}{9}\left\{2-\left(\frac{2}{5}\right)(3n+2)\right\}$.

$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{2}{9}\cdot 2 = \mathbf{\frac{4}{9}}$.

（定数 a，b と $|p|<1$ となる定数 p に対して，$\lim_{n\to\infty} p^n(an+b)=0$ が成り立つものとして考える）

(3)　$T=2$ より，B はグーを 1 回出しても 1 点しかもらえないことを考えると

R_k は「$k-1$ 回目まで B がチョキを出し，かつ k 回目に B がパーを出す確率」と「$k-1$ 回目まで B が 1 回グー，$k-2$ 回チョキを出し，かつ k 回目に B がパーを出す確率」の和である．

よって $R_k = \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + {}_{k-1}\mathrm{C}_1\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}\right\} = \frac{k}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$.

(2) と同様の計算を行うと $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} = \mathbf{\frac{5}{9}}$.

講評

$\boxed{1}$（やや易）

(2) は慣れていれば解けるだろう．微分の定義，区分求積の定義をしっかり押さえておきたい．後半が難しいのでできる限り完答を目指したいところだ．

$\boxed{2}$（やや難）

少しずつ数字を入れて行けばルールは見つかるだろう．桁数に応じて文字を設定し，整数問題として取り組もう．少し解き進めると規則性が見えてくる．もれなく 1 つずつ数え上げていく力がないと厳しい．1 日目の $\boxed{3}$ と同様で事象を丁寧に場合分けする練習が必要だろう．

$\boxed{3}$（やや難）

答のみの出題であるから，細かい計算は要らないだろう．「(n の多項式) $\times$ (等比級数) の和」をすべて計算すると大変だが，破産の確率になれていれば途中が計算が楽できる．また，$a_n = \boxed{\text{カ}}$ などは予想に頼る感じになるだろう．時間的にも $\boxed{3}$ をすべて取り切るのは困難だろう．前半はできるだけ取りたい．

1 日目と比較して全体的に難しいセットだった．

$\boxed{1}$ を全力で解いて，$\boxed{3}$ をできるところまで取る．時間の許す限り $\boxed{2}$ に手を動かす．全体で 60 %弱取れれば一次通過ラインに届くだろう．

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録 ▶
LINE 登録 ▶