医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

東海大学医学部　数学

2020年 2月 3日実施

$\boxed{1}$ 次の空欄を埋めなさい．解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

(1) 2 進法で表された数 $0.101_{(2)}$ を 10 進法で表すと $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $f(x)=x\log x$ とする．

$$\lim_{h\to 0}\frac{(e^2+h)f(e^2+h)-e^2f(e^2)}{h}=\boxed{\text{イ}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e-1)\{n+k(e-1)\}}{n^2}f\left(1+\frac{k(e-1)}{n}\right)=\boxed{\text{ウ}}$$

(3) a を実数の範囲で変化させるとき，$f(x)=4x^3+5ax^2+a^2x+3x-a$ を $x-1$ で割ったときの余り R のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) $\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\right)=-2$ ただし，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ は有理数，$\boxed{\text{キ}}$ はできるだけ小さい自然数とする．

(5) $\tan x\tan y=\dfrac{1}{3}$ のとき $\tan(x+y)+\tan(x-y)$ の最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

ただし，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

【解説】

(1) $0.101_{(2)}=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{8}=0.625$

(2) $f(x)=x\log x$ より　$f'(x)=1+\log x$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(e^2+h)f(e^2+h)-e^2f(e^2)}{h}&=\lim_{h\to 0}f(e^2+h)+e^2\lim_{h\to 0}\frac{f(e^2+h)-f(e^2)}{h}\\&=f(e^2)+e^2f'(e^2)\\&=2e^2+3e^2\\&=5e^2\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e-1)\{n+k(e-1)\}}{n^2}f\left(1+\frac{k(e-1)}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e-1)\left\{1+\frac{k}{n}(e-1)\right\}f\left(1+\frac{k(e-1)}{n}\right)=A$$

とする．区分求積法により

$$A=\int_0^1\{1+(e-1)x\}f(1+(e-1)x)(e-1)dx$$

ここで，$1+(e-1)x=t$ とおくと　$dt=(e-1)dx$

x	$0\to1$
t	$1\to e$

$$\begin{aligned}A&=\int_1^e tf(t)dt=\int_1^e t^2\log t\,dt\\&=\left[\frac{t^3}{3}\log t\right]_1^e-\int_1^e\frac{t^3}{3}dt\\&=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)\\&=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}\end{aligned}$$

(3)　$f(x)=4x^3+5ax^2+(a^2+3)x-a$ と整理して，$f(x)$ を $x-1$ で割った余り R は　$R=a^2-4a+7$ であるから

$$R=(a-2)^2+3$$

a はすべての実数をとって動くことから　$R \geqq 3$

(4)　$\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x=-2$ を解いて　$x=\dfrac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}=5+2\sqrt{6}$

(5)　$\tan(x+y)+\tan(x-y)$

$$=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}+\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

$$=\frac{3}{2}(\tan x+\tan y)+\frac{3}{4}(\tan x-\tan y)$$

$$=\frac{3}{4}(3\tan x+\tan y)$$

ここで，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$ であることから　$\tan x>0$，$\tan y>0$

よって，相加相乗平均の関係から

$$\frac{3}{4}(3\tan x+\tan y)\geqq\frac{3}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{3\tan x\tan y}=\frac{3}{2}$$

等号成立は　$3\tan x=\tan y$ のときで，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<y<\dfrac{\pi}{2}$ より，この等式を満たす x，y は存在する．

ゆえに　$\tan(x+y)+\tan(x-y)\geqq\dfrac{3}{2}$

$\boxed{2}$　次の空欄を埋めなさい．解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

自然数 x に対して x の各桁の数字を逆順に並べた自然数を対応させる関数を $f(x)$ とする．ただし，逆順にしたとき最上位の各桁から並ぶ0は無視する．例えば，$f(4)=4$，$f(123)=321$，$f(102300)=3201$ である．自然数 x に対して関数 $g(x)$ を $g(x)=|x-f(x)|$ と定める．

(1)　$g(1964)=\boxed{ア}$

(2)　1以上10000以下で $g(x)=0$ をみたす自然数 x の個数は $\boxed{イ}$ である．

(3)　$g(x)$ の最小値は明らかに0であり，$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき0の次の値は $\boxed{ウ}$ である．

$g(x)=99$ となる最小の自然数 x は $\boxed{エ}$ であり，$g(x)=99$ をみたす自然数 x の個数は $\boxed{オ}$ である．$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき99の次の値は $\boxed{カ}$ である．

(4)　$g(x)=196398$ となる最小の自然数 x は $\boxed{キ}$ であり，最大の自然数 x は $\boxed{ク}$ である．

【解説】

以下，a，b，c，d，e，f は $1\leqq a\leqq 9$，$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$，$0\leqq d\leqq 9$，$0\leqq e\leqq 9$，$0\leqq f\leqq 9$ をみたす整数である．

(1)　$g(1964)=|1964-4691|=2727$

(2)　$g(x)=0 \iff x=f(x)$ となる x を考える．

(ⅰ) x が1桁の自然数のとき　$x=1, 2, 3, \cdots, 9$　　9通り

(ⅱ) x が2桁の自然数のとき　$x=11, 22, 33, \cdots, 99$　9通り

(ⅲ) x が3桁の自然数のとき

$x=100a+10b+c$ と書くと

$a=c$ (bは任意) であれば $x=f(x)$ が成り立つ.
$(a,\ c)$ が 9 通りで, b が 10 通りとれることから　$9\times10=90$ 通り

(iv) x が 4 桁の自然数のとき
$x=1000a+100b+10c+d$ と書くと, $f(x)=1000d+100c+10b+a$
ここで, $a=d$ かつ $b=c$ が成り立てば $x=f(x)$ が成り立つ.
$(a,\ d)$ が 9 通りで, $(b,\ c)$ が 10 通りとれることから　$9\times10=90$ 通り

(v) $x=10000$ のとき
$f(x)=1$ より, $g(x)=0$ とはならない。

(i)〜(v) より　$9+9+90+90=198$ 通り

(3) $\boxed{\text{ウ}}$ について
(i) x が 2 桁の自然数のとき
$x=10a+b$, $f(x)=10b+a$
と表せるので, $g(x)=9|a-b|$ である. ゆえに, $g(x)$ がとれる 0 の次に小さい値は 9 ($a-b=\pm1$のとき)

(ii) x が 3 桁の自然数のとき
$x=100a+10b+c$, $f(x)=100c+10b+a$
と表せるので, $g(x)=99|a-c|$ である. ゆえに, $g(x)$ がとれる 0 の次に小さい値は 99 ($a-c=\pm1$のとき)

(iii) x が 4 桁の自然数のとき
$x=1000a+100b+10c+d$, $f(x)=1000d+100c+10b+a$
と表せるので, $g(x)=|999(a-d)+90(b-c)|$ である.
ゆえに, $g(x)$ がとれる 0 の次に小さい値は 90 ($a-d=0$ かつ $b-c=\pm1$ のとき)

このことから, $g(x)$ がとれる値を小さい順に並べたとき, 0 の次に小さい値は 9 である.

$\boxed{\text{エ}}\boxed{\text{オ}}$ について
$g(x)=99$ になるのは, x が 3 桁のときである.
$x=100a+10b+c$ と書くと　$g(x)=99|a-c|$
よって, $g(x)=99$ のとき　$|a-c|=1$　……①
これをみたす $(a,\ b,\ c)$ のうち, x が最小となるのは, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 0)$ のときで, $x=100$
また, ① をみたす $(a,\ c)$ の個数は $1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq c\leqq 9$ に注意すると　17 通り
b は 10 通りの値をとれるので
$g(x)=99$ となる x の個数は　$17\times10=170$ 通り

$\boxed{\text{カ}}$ について

$$g(x)=\begin{cases}9|a-b| & (x=10a+b\text{のとき})\\ 99|a-c| & (x=100a+10b+c\text{ のとき})\\ |999(a-d)+90(b-c)| & (x=1000a+100b+10c+d\text{ のとき})\end{cases}$$

であることから, $g(x)$ の値を小さい順にならべていくと
$0,\ 9,\ 18,\ 27,\ \cdots,\ 81,\ 90,\ 99,\ 180,\ \cdots$
となることから, 99 の次の値は 180 である.

(4)　x は6桁の自然数である．

x が6桁のとき，$x=100000a+10000b+1000c+100d+10e+f$ と書くと，

$g(x)=9|11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)|$

となるので，$g(x)=196398$ のとき，

$|11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)|=21822$

ｉ）$x-f(x)\geqq 0$ のとき

$11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)=21822$

下一桁目に注目すると，$a-f=2$ であり，さらに，下二桁目に注目して，$b-e=0$ であるとわかる．このとき，

$22222+100(c-d)=21822$ より，$c-d=-4$

$\therefore\ (a-f,b-e,c-d)=(2,0,-4)$

ⅱ）$x-f(x)<0$ のとき

$11111(a-f)+1110(b-e)+100(c-d)=-21822$

下一桁目に注目すると，$a-f=-2$ であり，さらに，下二桁目に注目して，$b-e=0$ であるとわかる．このとき，

$-22222+100(c-d)=-21822$ より，$c-d=4$

$\therefore\ (a-f,b-e,c-d)=(-2,0,4)$

したがって，ｉ）ⅱ）より

$(a-f,b-e,c-d)=(\pm 2,0,\mp 4)$ （複号同順）

か必要である．

これを満たす整数 (a,b,c,d,e,f) の組み合わせで x が最小となるものを考えると，$x-f(x)<0$ のときで

$(a,b,c,d,e,f)=(1,0,4,0,0,3)$ （$g(x)=196398$ を満たす．）

最大となるものを考えると，$x-f(x)\geqq 0$ のときで

$(a,b,c,d,e,f)=(9,9,5,9,9,7)$ （$g(x)=196398$ を満たす．）

よって，以上より，求める最小の自然数 x および最大の自然数 x はそれぞれ

104003，995997

【補足１】

(3)において，$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき99の次の値が，x が4桁以下のときであることを自明とした．本番も記述式ではないので，自明として解くのが懸命だろう．

ちなみに，自然数 x について，5桁以上を考えると

$x=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^1+a_1$

（n は5以上の自然数，a_k は $1\leqq a_n\leqq 9$，$0\leqq a_k\leqq 9$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ を満たす自然数）

と書けるので，n が奇数のとき

$$\begin{aligned}g(x)&=|a_n(10^{n-1}-1)+a_{n-1}(10^{n-2}-10^1)+\cdots+a_2(10^1-10^{n-2})+a_1(1-10^{n-1})|\\&=\left|(a_n-a_1)(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+\cdots+\left(a_{\frac{n+1}{2}+1}-a_{\frac{n+1}{2}-1}\right)\left(10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n+1}{2}-2}\right)\right|\\&\geqq\left|\left(a_{\frac{n+1}{2}+1}-a_{\frac{n+1}{2}-1}\right)\left(10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n+1}{2}-2}\right)\right|\end{aligned}$$

また，n が偶数のとき

$$\begin{aligned}g(x)&=|a_n(10^{n-1}-1)+a_{n-1}(10^{n-2}-10^1)+\cdots+a_2(10^1-10^{n-2})+a_1(1-10^{n-1})|\\&=\left|(a_n-a_1)(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+\cdots+\left(a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}\right)\left(10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n}{2}-1}\right)\right|\\&\geqq\left|\left(a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}\right)\left(10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n}{2}-1}\right)\right|\end{aligned}$$

となる．したがって，$g(x)$ のとり得る値を小さい順に並べたとき0の次の値は

n が奇数のとき，$\left|a_{\frac{n+1}{2}+1}-a_{\frac{n+1}{2}-1}\right|=1$，$n=5$ で，$1\cdot\left(10^{\frac{5+1}{2}}-10^{\frac{5+1}{2}-2}\right)=990$

n が偶数のとき，$\left|a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}\right|=1$ ，$n=6$ で，$1\cdot\left(10^{\frac{6}{2}}-10^{\frac{6}{2}-1}\right)=900$

となる.

【補足２】

(4) において，x は 6 桁であることを自明とした．本番も記述式ではないので，(3) 同様に，自明として解くのが懸命だろう．

ちなみに，自然数 x について，7 桁以上を考えると

$$x=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^1+a_1$$

（n は 7 以上の自然数，a_k は $1\leqq a_n\leqq 9$ ，$0\leqq a_k\leqq 9$（$1\leqq k\leqq n-1$）を満たす自然数)

と書けるので

$$\begin{aligned}g(x)&=\left|a_n(10^{n-1}-1)+a_{n-1}(10^{n-2}-10^1)+\cdots+a_2(10^1-10^{n-2})+a_1(1-10^{n-1})\right|\\&=\left|(a_n-a_1)(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+(a_{n-2}-a_3)(10^{n-3}-10^2)+\cdots\right|\end{aligned}$$

である．$1\leqq a_n\leqq 9$ ，$0\leqq a_k\leqq 9$（$1\leqq k\leqq n-1$）であることから

$x-f(x)\geqq 0$ のとき，下一桁目に注目して，$a_n-a_1=2$ と決まり，

$$\begin{aligned}g(x)&=\left|2(10^{n-1}-1)+(a_{n-1}-a_2)(10^{n-2}-10^1)+(a_{n-2}-a_3)(10^{n-3}-10^2)+\cdots\right|\\&\geqq 2(10^{n-1}-1)-9(10^{n-2}-10^1)-9(10^{n-3}-10^2)+\cdots\\&\geqq 2(10^6-1)-9(10^5-10^1)-9(10^4-10^2)\\&=1010988\end{aligned}$$

となり，$g(x)=196398$ となることはない．$x-f(x)<0$ のときも同様である.

$\boxed{3}$ 次の空欄を埋めなさい．解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

2 人のプレイヤーA，Bがじゃんけんをする次のようなゲームがある．じゃんけんをしてじゃんけんに勝ったプレイヤーはグーを出して勝てば 1 点を，パーあるいはチョキで勝てば 2 点もらえ，負けたプレイヤーやあいこのプレイヤーは得点をもらえない．双方の最初の持ち点は 0 点である．ゲームが始まる前に T の値を決めておき，先に得点の合計が T 以上になったプレイヤーをゲームの勝者とする．プレイヤーBは 1 回ごとにグーを $\frac{2}{5}$，チョキを $\frac{2}{5}$，パーを $\frac{1}{5}$ の確率で出すとする．また，$|p|<1$ をみたす実数 p と 0 以上の整数 n について，無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k$ が収束することは既知の事実として利用してよい．

(1) $T=1$ とし，プレイヤーAがグーを選んだとする．k 回目のじゃんけんでプレイヤーAがゲームに勝つ確率を P_k とすると $P_k=\boxed{\text{ア}}$ であり，$\sum_{k=1}^{\infty} P_k=\boxed{\text{イ}}$ となる．

(2) $T=2$ とし，プレイヤーAがグーを選んだとする．k 回目のじゃんけんでプレイヤーAがゲームに勝つ確率を Q_k とすると $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k=\boxed{\text{ウ}}$ となる．

(3) $T=2$ とし，プレイヤーAがチョキを選んだとする．k 回目のじゃんけんでプレイヤーAがゲームに勝つ確率を R_k とすると $\sum_{k=1}^{\infty} R_k=\boxed{\text{エ}}$ となる．

(4) 実数の定数 p が $|p|<1$ をみたしているとし，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を $a_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k-1)!\,p^k}{(k-n)!}$ と定める．例えば a_1 は無限等比級の和である．a_3-pa_3 を計算することにより，$a_3=\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k=\boxed{\text{オ}}$ が得られる．$\{a_n\}$ の一般項を極限を用いずに表すと $a_n=\boxed{\text{カ}}$ となる．

(5) $T=3$ とし，プレイヤーAがグーを選んだとする．k 回目のじゃんけんでプレイヤーAの得点が 3，プレイヤーBの得点が 2 で，プレイヤーAがゲームに勝つ確率を S_k とすると，$\sum_{k=1}^{\infty} S_k=\boxed{\text{キ}}$ となる．

グーを出して勝つ：＋1 点，パーまたはチョキを出して勝つ：：＋2 点，あいこまたは負け：0 点

Aが出す手は決まっており，Bが出す手は，グーの確率が $\frac{2}{5}$，チョキの確率が $\frac{2}{5}$，パーの確率が $\frac{1}{5}$ である．

(1) T=1 つまり 1 点以上獲得した時点で終了する．A がグーを出し続けるので，1 回のジャンケンで，

$$\text{B が}\begin{cases}\dfrac{2}{5}\ \text{の確率でグーを出すと引き分け}\\[2mm] \dfrac{2}{5}\ \text{の確率でチョキを出すとAが}+1\text{ 点}\\[2mm] \dfrac{1}{5}\ \text{の確率でパーを出すとBが}+2\text{ 点}\end{cases}$$

となる．すなわち，k 回目のジャンケンで A が勝者となるのは，1 回目から $k-1$ 回目まで引き分けが続き，k 回目に B がチョキを出す場合を考えればよく，

$$P_k=\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^k.$$

また，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}.$$

(2) T=2 つまり 2 点以上獲得した時点で終了するものとして，最終的に A が勝者となる確率を求める．A がグーを出し続けるので，(1) と同様に得点が遷移する．ここで，A が 0 点の状態から最終的に勝者となる確率を x，1 点の状態から最終的に勝者となる確率を y とおく．A，B の持っている得点を a，b とするとき，状態を$(a,\ b)$ と表すと，

$$\overset{(x)}{(a,\ b)=(0,\ 0)} \begin{array}{l} \nearrow (1,\ 0)\ \ (y) \\ \rightarrow (0,\ 0)\ \ (x) \\ \searrow (0,\ 2)\ \ (0) \end{array} \qquad \overset{(y)}{(a,\ b)=(1,\ 0)} \begin{array}{l} \nearrow (2,\ 0)\ \ (1) \\ \rightarrow (1,\ 0)\ \ (y) \\ \searrow (1,\ 2)\ \ (0) \end{array}$$

上の図のように状態が遷移し，その状態に応じて勝者となる確率が変化する．したがって，次の方程式を得る．

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{5}\cdot y+\dfrac{2}{5}\cdot x+\dfrac{1}{5}\cdot 0 \\ y=\dfrac{2}{5}\cdot 1+\dfrac{2}{5}\cdot y+\dfrac{1}{5}\cdot 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{4}{9} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k=\frac{4}{9}.$$

注：問題文中に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k$ が収束することは既知の事実として利用してよい，とあるので，必ずA，Bのどちらかが勝者になるということを前提として計算した．

(3)　T=2 つまり 2 点以上獲得した時点で終了するものとして，最終的に A が勝者となる確率を求める． A がチョキを出し続けるので，1 回のジャンケンで，

$$\text{B が}\begin{cases} \dfrac{2}{5} \text{ の確率でグーを出すとBが} +1 \text{ 点} \\ \dfrac{2}{5} \text{ の確率でチョキを出すと引き分け} \\ \dfrac{1}{5} \text{ の確率でパーを出すとAが} +2 \text{ 点} \end{cases}$$

となる．ここで，$(a,\ b)=(0,\ 0)$ の状態から A が最終的に勝者となる確率を X，$(a,\ b)=(0,\ 1)$ の状態から最終的に A が勝者となる確率を Y とおく．

$$\overset{(X)}{(a,\ b)=(0,\ 0)} \begin{array}{l} \nearrow (0,\ 1)\ \ (Y) \\ \rightarrow (0,\ 0)\ \ (X) \\ \searrow (2,\ 0)\ \ (1) \end{array} \qquad \overset{(Y)}{(a,\ b)=(0,\ 1)} \begin{array}{l} \nearrow (0,\ 2)\ \ (0) \\ \rightarrow (0,\ 1)\ \ (Y) \\ \searrow (2,\ 1)\ \ (1) \end{array}$$

上の図のように状態が遷移し，その状態に応じて勝者となる確率が変化する．したがって，次の方程式を得る．

$$\begin{cases} X=\dfrac{2}{5}\cdot Y+\dfrac{2}{5}\cdot X+\dfrac{1}{5}\cdot 1 \\ Y=\dfrac{2}{5}\cdot 0+\dfrac{2}{5}\cdot Y+\dfrac{1}{5}\cdot 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{5}{9} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k=\frac{5}{9}.$$

(4)　$\displaystyle a_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k-1)!\,p^k}{(k-n)!}$ と定義したとき，a_3-pa_3 を計算する．ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k$ は収束するので，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^n p^k=0$ は明らかである．

$$\begin{aligned} a_3-pa_3&=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(k-1)!\,p^k}{(k-3)!}-p\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(k-1)!\,p^k}{(k-3)!} \\ &=\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k-\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^{k+1} \\ &=\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k-\sum_{k=4}^{\infty}(k-2)(k-3)p^k \end{aligned}$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)p^k-\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)(k-3)p^k$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\{(k-1)(k-2)-(k-2)(k-3)\}p^k$$

$$=2\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)p^k$$

$$=2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p^{k+1}$$

$$=2p\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!\,p^k}{(k-2)!}$$

$$=2pa_2.$$

同様にして，$a_2-pa_2=pa_1$ を得る．また，

$$a_1=\sum_{k=1}^{\infty}p^k=\frac{p}{1-p}$$

であるから，

$$(1-p)a_3=2pa_2，(1-p)a_2=pa_1，a_1=\frac{p}{1-p}$$

を用いて，

$$a_3=\frac{2p}{1-p}a_2=\frac{2p^2}{(1-p)^2}a_1=\frac{2p^3}{(1-p)^3}.$$

同様に計算を進めることで，$a_n-pa_n=p(n-1)a_{n-1}$ を得るので，帰納的に $a_n=\dfrac{(n-1)!\,p^n}{(1-p)^n}$ である．

(5)　T=3 すなわち，3 点以上獲得した時点で終了する．A がグーを出し続けるので，(1) と同様に得点が遷移する．したがって，k 回目に A が勝者となるのは，1 回目から $k-1$ 回目までの間に，B がグーを $k-4$ 回，チョキを 2 回，パーを 1 回出し，さらに k 回目に B がチョキを出す場合である．すなわち，

$$S_k=\frac{(k-1)!}{(k-4)!\cdot 2!\cdot 1}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-4}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\frac{(k-1)!}{(k-4)!}\left(\frac{2}{5}\right)^k.$$

よって最終的に A が勝者となる確率は，(4) の結果を用いて，

$$\sum_{k=4}^{\infty}S_k=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{(k-1)!}{(k-4)!}\left(\frac{2}{5}\right)^k=\frac{1}{4}\cdot\frac{3!\left(\frac{2}{5}\right)^4}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^4}=\frac{8}{27}.$$

【別解】(2)(3) を Σ 計算で処理する方法

(2)　$T=2$ かつ A がグーより，B がパーを選択すると，B が2 点に達してしまうため，このゲームは終わってしまう．そして，グーで勝つと 1 点もらえることから，Q_k は「$k-1$ 回目までにBがチョキを 1 回出し，かつ k 回目に B がチョキを出す確率」である．ここで，$Q_1=0$ であるから

$k\geqq 2$ において　$Q_k={}_{k-1}\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{5}=(k-1)\left(\frac{2}{5}\right)^k$（$k=1$ でも成り立つ）

$T_n=\sum_{k=1}^{n}Q_k=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{2}{5}\right)^k$ とすると

$$T_n=\left(\frac{2}{5}\right)^2+2\left(\frac{2}{5}\right)^3+3\left(\frac{2}{5}\right)^4+\cdots+(n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{2}{5}T_n=\qquad\left(\frac{2}{5}\right)^3+2\left(\frac{2}{5}\right)^4+\cdots+(n-2)\left(\frac{2}{5}\right)^n+(n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \cdots\cdots②$$

①と②を辺々引くことで

$$\frac{3}{5}T_n=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^n-(n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

よって　$T_n=\dfrac{2}{9}\left\{2-\left(\frac{2}{5}\right)^n(3n+2)\right\}$

$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{2}{9}\cdot 2 = \frac{4}{9}$

（定数 a，b と $|p|<1$ となる定数 p に対して，$\lim_{n\to\infty} p^n(an+b)=0$ が成り立つものとして考える）

(3)　$T=2$ より，Bはグーを1回だしても1点しかもらえないことを考えると

R_k は「$k-1$回目までBがチョキを出し，かつ k 回目にBがパーを出す確率」と「$k-1$ 回目までBが1回グー，$k-2$ 回チョキを出し，かつ k 回目にBがパーを出す確率」の和である．

よって　$R_k = \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + {}_{k-1}\mathrm{C}_1\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}\right\} = \frac{k}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} = \frac{5}{9}$　（(2)と同様の計算を行った）

【講評】

$\boxed{1}$（やや易）

(2)は慣れてれば解けるだろう．微分の定義，区分求積の定義をしっかり押さえておきたい．後半が難しいのでできる限り完答を目指したいところだ．

$\boxed{2}$（やや難）

少しずつ数字を入れていけばルールは見つかるだろう．桁数に応じて文字を設定し，整数問題として取り組もう．少し解き進めると規則性が見えてくる．もれなく一つずつ数え上げていく力がないと厳しい．1日目の$\boxed{3}$と同様で事象を丁寧に場合分けする練習が必要だろう．

$\boxed{3}$（やや難）

答のみの出題であるから，細かい計算は要らないだろう．「(n の多項式)×(等比数列)の和」をすべて計算すると大変だが，破産の確率になれていれば途中は計算が楽できる．また，$a_n = \boxed{\text{カ}}$ などは予想に頼る感じになるだろう．時間的にも，$\boxed{3}$をすべて取り切るのは困難だろう．前半はできるだけ取りたい．

1日目と比較して全体的に難しいセットだった．

$\boxed{1}$を全力で解いて，$\boxed{3}$をできるところまで取る．時間の許す限り$\boxed{2}$に手を動かす．全体で60%弱取れれば一次通過ラインに届くだろう．