

解 答 速 報

杏林大学医学部 数学

2021年 1月22日実施

I

(a) 赤玉 2 個, 黒玉 4 個, 白玉 3 個が入った袋から 2 個の玉を同時に取り出す。取り出された玉が 2 個とも黒球で

ある確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, 赤玉 1 個と黒玉 1 個が取り出される確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり, 黒玉 1 個と白玉 1 個が取

り出される確率は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(b) 赤玉, 黒玉, 白玉があわせて 16 個入った袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉 1 個, 黒玉 1 個を取り出す確率が $\frac{1}{5}$, 黒玉 1 個, 白玉 1 個を取り出す確率が $\frac{1}{3}$ であった。赤玉, 黒玉, 白玉の個数をそれぞれ $x, y,$

z とすると, $xy = \boxed{\text{キク}}$, $yz = \boxed{\text{ケコ}}$ である。袋に入っていた赤玉, 黒玉, 白玉の個数はそれぞれ $\boxed{\text{サ}}$ 個, $\boxed{\text{シ}}$ 個, $\boxed{\text{ス}}$ 個である。

(c) 赤玉 3 個, 黒玉 5 個, 白玉 7 個が入った袋から 3 個の玉を同時に取り出す。赤玉, 黒玉, 白玉が 1 個ずつ取り

出される確率は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。取り出された玉の色が 2 種類であったとき, その中に赤玉が 2 個入っている

確率は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

解答

(a) 玉 2 個の取り出し方は全部で ${}_{9}C_2$ 通りあり, すべて同様に確からしい。

$$2 \text{ 個とも黒玉を取り出す確率は } \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{赤玉 1 個, 黒玉 1 個を取り出す確率は } \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_9C_2} = \frac{2}{9}$$

$$\text{黒玉 1 個, 白玉 1 個を取り出す確率は } \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_9C_2} = \frac{1}{3}$$

(b) 玉 2 個の取り出し方は全部で ${}_{16}C_2 = 120$ 通りあり, すべて同様に確からしい。

赤玉 1 個, 黒玉 1 個を取り出す確率が $\frac{1}{5}$ であるから

$$\frac{xy}{120} = \frac{1}{5} \quad \therefore xy = 24 \dots\dots \textcircled{1}$$

黒玉 1 個, 白玉 1 個を取り出す確率が $\frac{1}{3}$ であるから

$$\frac{yz}{120} = \frac{1}{3} \quad \therefore yz = 40 \dots\dots \textcircled{2}$$

また、玉が合計 16 個であるから

$$x + y + z = 16 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ を連立して解いて $x = 3, y = 8, z = 5$

(c) 15 個から 3 個を同時に取り出したとき,

赤玉 1 個, 黒玉 1 個, 白玉 1 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_7C_1}{{}_{15}C_3} = \frac{3}{13}$$

赤玉を 1 個取り出すことを「赤 1」などと表すことにする。

取り出された玉が 2 種類となる取り出し方は

(赤 2 黒 1) または (赤 2 白 1) または (黒 2 赤 1) または (黒 2 白 1) または (白 2 赤 1) または (白 2 黒 1)

のときで

$${}_3C_2 \cdot {}_5C_1 + {}_3C_2 \cdot {}_7C_1 + {}_5C_2 \cdot {}_3C_1 + {}_5C_2 \cdot {}_7C_1 + {}_7C_2 \cdot {}_3C_1 + {}_7C_2 \cdot {}_5C_1 = 304 \text{ 通りあり,}$$

これらは同様に確からしい。

このうち赤玉が 2 個取り出されるのは

$${}_3C_2 \cdot {}_5C_1 + {}_3C_2 \cdot {}_7C_1 = 36 \text{ 通りだから, 求める確率は } \frac{36}{304} = \frac{9}{76}$$

II

座標平面上に3点 A(0, 5), B(7, 4), C(6, -3)がある。

この3点を通る円 S の半径は $\boxed{\text{ア}}$, 中心は $(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}})$ である。2点 B, C を結ぶ短い方の弧の長さは $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{カキ}}$ であり, $\triangle ABC$ の内接円の半径は $\boxed{\text{ク}}(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-1)$ となる。

点 B と点 D(-1, 4) を通り, y 軸に平行な軸を持ち, 円 S と3つの点を共有する放物線の方程式は

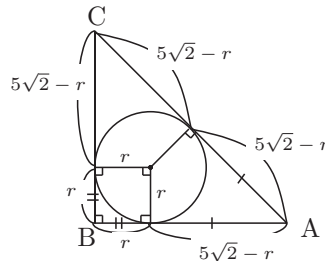
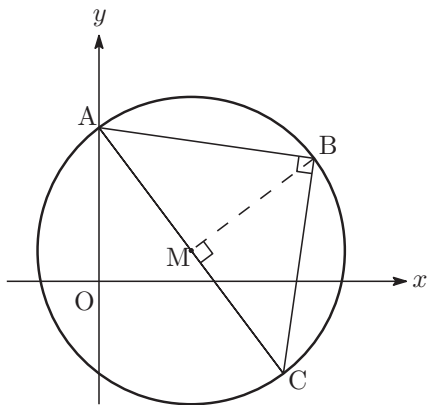
$$y = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}x^2 - \boxed{\text{シ}}x + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

と

$$y = -\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}x^2 + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}x + \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。この2つの放物線で囲まれた部分の面積は $\frac{\boxed{\text{ニヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

解答



$$AB = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

であるから, $\triangle ABC$ は $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

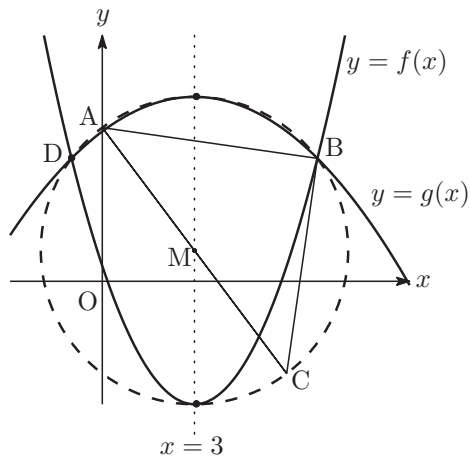
円 S の中心は AC の中点 M で $(3, 1)$, 半径は $\frac{AC}{2} = 5$

$\angle BMC = \frac{\pi}{2}$ であるから, 劣弧 BC の長さは $5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = 25$

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると,
右上図より

$$AC = 2(5\sqrt{2} - r) = 10 \quad \therefore r = 5(\sqrt{2} - 1)$$



$D(-1, 4)$ が円 S 上にあり、2 点 B, D が $x = 3$ に関して対称であることから、求める放物線の頂点は $(3, 6)$ または $(3, -4)$ である。

頂点が $(3, -4)$ の場合は

$y = a(x - 3)^2 - 4$ に $(7, 4)$ を代入して、 $a = \frac{1}{2}$ となるので

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 6 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2} \quad (= f(x) \text{ とする})$$

頂点が $(3, 6)$ の場合は

$y = a(x - 3)^2 + 6$ に $(7, 4)$ を代入して、 $a = -\frac{1}{8}$ となるので

$$y = -\frac{1}{8}(x - 3)^2 + 6 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{39}{8} \quad (= g(x) \text{ とする})$$

2 つの放物線によって囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^7 \{g(x) - f(x)\} dx &= -\frac{5}{8} \int_{-1}^7 (x + 1)(x - 7) dx \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{6} \{7 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{160}{3} \end{aligned}$$

III

~ および の解答は該当する解答群から最も適当なもの一つずつ選べ。

正の実数を定義域とする関数 $f(x) = \log_e x$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(a) 曲線 $y = f(x)$ 上の相異なる 3 点 $(s, f(s))$, $(t, f(t))$, $(u, f(u))$ を頂点とする三角形の重心は $G(\text{ア}, f(\text{イ}))$ である。

$y = f(x)$ はそのグラフが 関数であり、三角形の重心 G は

$$x > 0, \text{ }$$

で表される領域に存在する。また、 $s = e^3$, $u = e^4$, $s < t < u$ である場合、この三角形の面積は

$$e^{\text{オ}} (\text{カキ} + e)$$

のとき最大となる。

, の解答群

- ① $s + t + u$ ② $\frac{s + t + u}{3}$ ③ $\sqrt{s + t + u}$
 ④ $st + tu + us$ ⑤ $(st + tu + us)^2$ ⑥ stu
 ⑦ $(stu)^{\frac{1}{3}}$ ⑧ $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u}$ ⑨ $\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u}\right)^{-1}$

の解答群

- ① 下に凸で単調増加な ② 下に凸で単調減少な
 ③ 上に凸で単調増加な ④ 上に凸で単調減少な
 ⑤ 変曲点を一つもつ単調増加な ⑥ 変曲点を一つもつ単調減少な
 ⑦ 下に凸で極小値を一つもつ ⑧ 上に凸で極大値を一つもつ
 ⑨ 周期的で微分可能な

の解答群

- ① $y > f(x)$ ② $y < f(x)$ ③ $y > f\left(\frac{x}{2}\right)$
 ④ $y < f\left(\frac{x}{2}\right)$ ⑤ $|y| > f(x)$ ⑥ $|y| < f(x)$
 ⑦ $3y > f(x)$ ⑧ $y < 3f(x)$

(b) 数列 $\{f(a_n)\}$ が公差 -3 の等比数列となるのは、数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が 場合であり、

$$\log_b(a_2 \cdot a_{2021}) - \log_b(a_1)^2 = \text{ケコ}, \quad \text{ただし } b = \frac{a_{44}}{a_1}$$

が成り立つ。この数列が $\sum_{k=1}^5 f(a_k) = 0$ を満たすとき、 $f(a_n) = \text{サシ}n + \text{ス}$ であり、次式が成り立つ。

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_5 = \text{セ}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{e^{\text{ソ}}}{e^{\text{タ}} - 1}$$

このとき、5以上の整数 n に対し、座標平面上の点 $(0, f(|f(a_n)|))$ を P_n 、 $(n, f(|f(a_n)|))$ を Q_n とすると、台形 $P_n Q_n Q_{n+1} P_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n = \left(n + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \right) \log_e \left(1 + \frac{1}{\boxed{\text{テト}} + n} \right)$$

であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

- ① 公差 -3 の等差数列である
- ② 公差 $\frac{1}{e^3}$ の等差数列である
- ③ 公差 3 の等差数列の逆数からなる数列である
- ④ 公差 $-\log_e 3$ の等差数列である
- ⑤ 公比 -3 の等比数列である
- ⑥ 公比 $\frac{1}{e^3}$ の等比数列である
- ⑦ 公比 $-\log_e 3$ の等比数列である
- ⑧ $a_n = \frac{n!}{3}$ と表される
- ⑨ $a_n = \frac{1}{3n!}$ と表される

(c) 正の整数 n に対して $T_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ 、 $T_0 = 0$ とする。 $0 \leq m \leq 100$ の範囲で整数 m が変化するとき、

$T_{100} - T_m - T_{100-m}$ の最小値は $\boxed{\text{ニ}}$ であり、最大となるのは $m = \boxed{\text{又ネ}}$ のときである。

解答

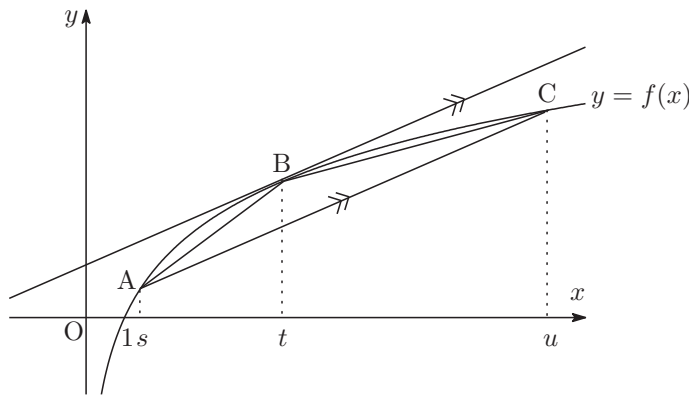
以下、 $\log_e x = \log x$ などと表記する。

(a) $\frac{f(s) + f(t) + f(u)}{3} = \frac{\log stu}{3} = \log stu^{\frac{1}{3}} = f\left(stu^{\frac{1}{3}}\right)$ であるので、 $G\left(\frac{s+t+u}{3}, f\left(stu^{\frac{1}{3}}\right)\right)$

$f(x) = \log x$ は $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ 、 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ であるので、そのグラフは上に凸な単調増加な関数である。したがって、三角形の重心 G は $x > 0$ 、 $y < f(x)$ で表される領域に存在する。

ここで、 $A(s, f(s))$ 、 $B(t, f(t))$ 、 $C(u, f(u))$ とすると、三角形 ABC の面積が最大となるのは、 $y = f(x)$ 上の点 B における接線の傾き $f'(t) = \frac{1}{t}$ が直線 AC の傾き $\frac{f(e^4) - f(e^3)}{e^4 - e^3} = \frac{1}{e^4 - e^3}$ に一致するときなので、求める t は

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{e^4 - e^3} \iff t = e^3(-1 + e)$$



(b) 数列 $\{f(a_n)\}$ が公差 -3 の等差数列であるので

$$f(a_{n+1}) - f(a_n) = -3 \iff \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = -3 \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-3}$$

したがって、数列 $\{a_n\}$ は公比 $\frac{1}{e^3}$ ($= e^{-3}$) の等比数列であるので、 $a_n = a_1(e^{-3})^{n-1}$ とかける。

このとき、 $a_2 \cdot a_{2021} = a_1 e^{-3} \cdot a_1 (e^{-3})^{2020} = a_1^2 (e^{-3})^{2021}$ 、 $b = \frac{a_{44}}{a_1} = \frac{a_1 (e^{-3})^{43}}{a_1} = (e^{-3})^{43}$ より

$$\log_b(a_2 \cdot a_{2021}) - \log_b(a_1)^2 = \log_b \frac{a_1^2 (e^{-3})^{2021}}{a_1^2} = \log_{(e^{-3})^{43}} (e^{-3})^{43 \cdot 47} = 47$$

$\sum_{k=1}^5 f(a_k) = 0$ のとき

$$f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4) + f(a_5) = 0 \iff 5f(a_1) - 30 = 0 \iff f(a_1) = 6$$

となるので、 $f(a_n) = 6 + (n-1)(-3) = -3n + 9$ であり

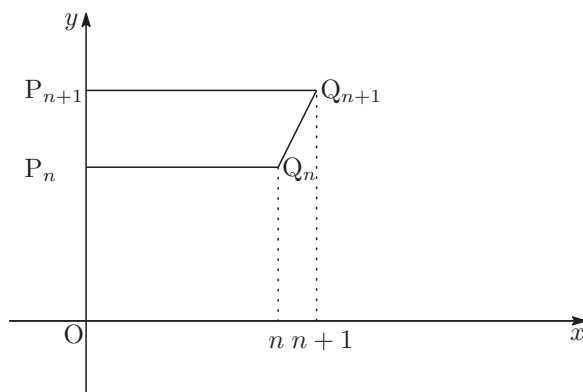
$$f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4) + f(a_5) = 0 \iff \log(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_5) = 0 \iff a_1 \times a_2 \times \dots \times a_5 = 1$$

である。また、 $f(a_n) = -3n + 9 \iff a_n = e^{-3n+9} \iff a_n = e^6 (e^{-3})^{n-1}$ であり、 $|e^{-3}| < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{e^6}{1 - e^{-3}} = \frac{e^9}{e^3 - 1}$$

ここで、台形 $P_n Q_n Q_{n+1} P_{n+1}$ は上底 $P_n Q_n$ 、下底 $P_{n+1} Q_{n+1}$ 、高さ $P_n P_{n+1}$ の台形であり

$$\begin{aligned} P_n P_{n+1} &= f(|f(a_{n+1})|) - f(|f(a_n)|) \\ &= f(|-3n+6|) - f(|-3n+9|) = f(3n-6) - f(3n-9) \quad (\because n \text{ は } 5 \text{ 以上の整数}) \\ &= \log \frac{n-2}{n-3} \end{aligned}$$



であるので

$$S_n = \frac{1}{2} (n + (n + 1)) \log \frac{n - 2}{n - 3} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{-3 + n} \right)$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{-3 + n} \log \left(1 + \frac{1}{-3 + n} \right)^{-3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2n}}{-\frac{3}{n} + 1} \log \left(1 + \frac{1}{-3 + n} \right)^{-3+n} \\ &= 1 \cdot \log e = 1 \end{aligned}$$

(c) $T_n = \log n!$ であるので

$$T_{100} - T_m - T_{100-m} = \log \frac{100!}{m!(100-m)!}$$

$$g_m = \frac{100!}{m!(100-m)!} \quad (0 \leq m \leq 99) \text{ とおくと}$$

$$\frac{g_{m+1}}{g_m} = g_{m+1} \div g_m = \frac{100!}{(m+1)!(99-m)!} \times \frac{m!(100-m)!}{100!} = \frac{100-m}{m+1}$$

であるので, $\frac{g_{m+1}}{g_m} > 1 \iff m < \frac{99}{2}$, $\frac{g_{m+1}}{g_m} < 1 \iff m > \frac{99}{2}$ が成り立つ。

したがって, $m = 0, 1, \dots, 49$ のとき $g_m < g_{m+1}$, $m = 50, 51, \dots, 99$ のとき $g_m > g_{m+1}$ であるから

$$(1 =) g_0 < g_1 < \dots < g_{49} < g_{50} > g_{51} > \dots > g_{99} > g_{100} (= 1)$$

よって, 求める $\log g_m$ の最小値は $m = 0, 100$ のときで $\log g_0 (= \log g_{100}) = \log 1 = 0$ であり, また, $\log g_m$ が最大となる m は $m = 50$ である。

(参考) $g_m = {}_{100}C_m$ であるので, g_m は $m = 0, 100$ のとき最小となり, $m = 50$ のとき最大となることは計算しなくてもわかる。(パスカルの三角形)

講評

I [確率] (易)

教科書レベルの確率の問題であった。いずれも平易な問題ばかりなので、ここでは落とせないだろう。要領よく計算し、大問ⅡⅢに時間を割きたいところ。

II [図形と方程式, 数Ⅱ積分法] (やや易)

前半は落とせない。後半の2次関数は図形的な考察により計算量をいかに減らせるかがポイントとなった。また、最後の面積計算は医学部受験生にとっては必須の公式を利用していこう。

III [数列, 極限] (標準)

(a) の選択肢問題は対数関数の理解を問う基本的な問題であった。最後の t の値もありふれた考え方をを用いるので落としたくない。(b)(c) は一見やりにくそうな問題も多く、苦戦した受験生も多いのではないだろうか。(a)(b)(c) が独立した問題となっている点にも注意が必要である。

大問数が昨年と比べて4つから3つに変更となったが、難易度・計算量は昨年度と同程度であった。大問Iが易しいため全体的に易しい印象を持つかもしれないが、大問Ⅲが受験生にとっては解きにくいと思われるためボーダーは65%程度であろう。

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せは… YMS ☎03-3370-0410 まで

医学部進学予備校
メビオ
 受付 9~21時 (土日祝可・携帯からOK)
 大阪市中央区石町 2-3-12
 ベルヴォア天満橋
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
YMS
 heart of medicine
 受付 8~20時 (土日祝可)
 東京都渋谷区代々木
 1-37-14
<https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ
 福岡校
 受付 0120-192-215
 福岡市中央区渡辺通 4-8-20
 英進館 天神本館新2号館2階
<https://www.mebio-eishinkan.com/>