# 解答速報

# 杏林大学医学部　数学

2021年 1月22日実施

I

(a)　赤玉 2 個，黒玉 4 個，白玉 3 個が入った袋から 2 個の玉を同時に取り出す。取り出された玉が 2 個とも黒球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，赤玉 1 個と黒玉 1 個が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり，黒玉 1 個と白玉 1 個が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(b)　赤玉，黒玉，白玉があわせて 16 個入った袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉 1 個，黒玉 1 個を取り出す確率が $\dfrac{1}{5}$，黒玉 1 個，白玉 1 個を取り出す確率が $\dfrac{1}{3}$ であった。赤玉，黒玉，白玉の個数をそれぞれ $x$，$y$，$z$ とすると，$xy = \boxed{\text{キク}}$，$yz = \boxed{\text{ケコ}}$ である。袋に入っていた赤玉，黒玉，白玉の個数はそれぞれ $\boxed{\text{サ}}$ 個，$\boxed{\text{シ}}$ 個，$\boxed{\text{ス}}$ 個である。

(c)　赤玉 3 個，黒玉 5 個，白玉 7 個が入った袋から 3 個の玉を同時に取り出す。赤玉，黒玉，白玉が 1 個ずつ取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。取り出された玉の色が 2 種類であったとき，その中に赤玉が 2 個入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

解答

(a)　玉 2 個の取り出し方は全部で ${}_9C_2$ 通りあり，すべて同様に確からしい。

2 個とも黒玉を取り出す確率は $\dfrac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

赤玉 1 個，黒玉 1 個を取り出す確率は $\dfrac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_9C_2} = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$

黒玉 1 個，白玉 1 個を取り出す確率は $\dfrac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_9C_2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(b)　玉 2 個の取り出し方は全部で ${}_{16}C_2 = 120$ 通りあり，すべて同様に確からしい。

赤玉 1 個，黒玉 1 個を取り出す確率が $\dfrac{1}{5}$ であるから

$$\frac{xy}{120} = \frac{1}{5} \qquad \therefore\ xy = \mathbf{24}\ \cdots\cdots①$$

黒玉 1 個，白玉 1 個を取り出す確率が $\dfrac{1}{3}$ であるから

$$\frac{yz}{120} = \frac{1}{3} \qquad \therefore\ yz = \mathbf{40}\ \cdots\cdots②$$

また，玉が合計 16 個であるから

$$x + y + z = 16 \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ を連立して解いて $x = \mathbf{3}$, $y = \mathbf{8}$, $z = \mathbf{5}$

(c)　15 個から 3 個を同時に取り出したとき，

赤玉 1 個，黒玉 1 個，白玉 1 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_7\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_3} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}$$

赤玉を 1 個取り出すことを「赤 1」などと表すことにする。

取り出された玉が 2 種類となる取り出し方は

(赤 2 黒 1) または (赤 2 白 1) または（黒 2 赤 1）または (黒 2 白 1) または (白 2 赤 1) または (白 2 黒 1)

のときで

${}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_7\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_7\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 = 304$ 通りあり，

これらは同様に確からしい。

このうち赤玉が 2 個取り出されるのは

${}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_7\mathrm{C}_1 = 36$ 通りだから，求める確率は $\dfrac{36}{304} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{76}}$

II

座標平面上に 3 点 A(0, 5)，B(7, 4)，C(6, $-3$) がある。

この 3 点を通る円 $S$ の半径は $\boxed{\text{ア}}$，中心は $\left(\boxed{\text{イ}},\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。2 点 B，C を結ぶ短い方の弧の長さは $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$，△ABC の面積は $\boxed{\text{カキ}}$ であり，△ABC の内接円の半径は $\boxed{\text{ク}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-1\right)$ となる。

点 B と点 D($-1$, 4) を通り，$y$ 軸に平行な軸を持ち，円 $S$ と 3 つの点を共有する放物線の方程式は

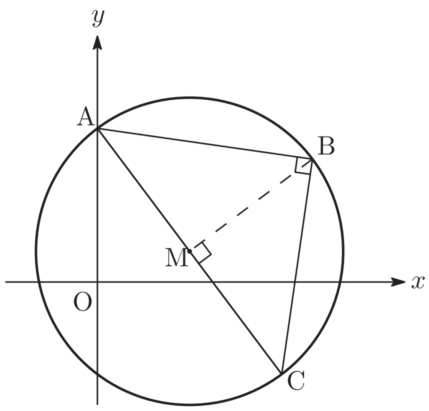
$$y=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}x^2-\boxed{\text{シ}}x+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

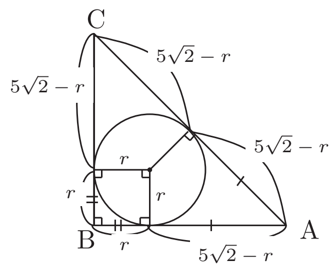
と

$$y=-\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}x^2+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}x+\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。この 2 つの放物線で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

解答




$$\mathrm{AB}=\sqrt{7^2+(-1)^2}=5\sqrt{2}$$
$$\mathrm{BC}=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=5\sqrt{2}$$
$$\mathrm{AC}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$$

であるから，△ABC は $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

円 $S$ の中心は AC の中点 M で $\mathbf{(3,\ 1)}$，半径は $\dfrac{\mathrm{AC}}{2}=\mathbf{5}$

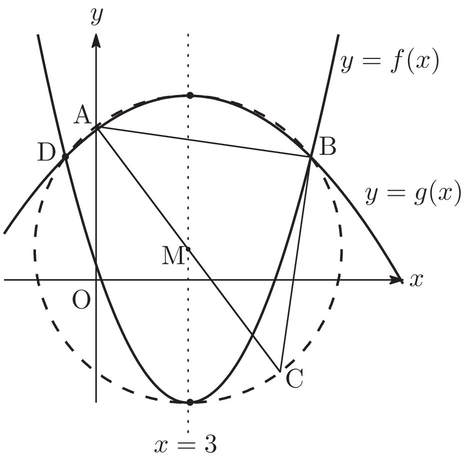
$\angle\mathrm{BMC}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，劣弧 BC の長さは $5\cdot\dfrac{\pi}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}\pi}$

△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}=\mathbf{25}$

△ABC の内接円の半径を $r$ とすると，

右上図より

$$\mathrm{AC}=2(5\sqrt{2}-r)=10 \qquad \therefore\ r=\boldsymbol{5(\sqrt{2}-1)}$$




D$(-1,\ 4)$ が円 $S$ 上にあり，2 点 B，D が $x=3$ に関して対称であることから，
求める放物線の頂点は $(3,\ 6)$ または $(3,\ -4)$ である。
頂点が $(3,\ -4)$ の場合は
$y=a(x-3)^2-4$ に $(7,\ 4)$ を代入して，$a=\dfrac{1}{2}$ となるので

$$y=\frac{1}{2}(x-3)^2+6=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}}\ \ \bigl(=f(x)\text{ とする}\bigr)$$

頂点が $(3,\ 6)$ の場合は
$y=a(x-3)^2+6$ に $(7,\ 4)$ を代入して，$a=-\dfrac{1}{8}$ となるので

$$y=-\frac{1}{8}(x-3)^2+6=\boldsymbol{-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{39}{8}}\ \ \bigl(=g(x)\text{ とする}\bigr)$$

2 つの放物線によって囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{7}\{g(x)-f(x)\}\,dx&=-\frac{5}{8}\int_{-1}^{7}(x+1)(x-7)dx\\&=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{6}\{7-(-1)\}^3\\&=\boldsymbol{\frac{160}{3}}\end{aligned}$$

III

$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$ および $\boxed{\text{ク}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ。
正の実数を定義域とする関数 $f(x)=\log_e x$ について，以下の問いに答えよ。ただし，$e$ は自然対数の底である。

(a) 曲線 $y = f(x)$ 上の相異なる 3 点 $(s,\ f(s))$，$(t,\ f(t))$，$(u,\ f(u))$ を頂点とする三角形の重心は $\mathrm{G}\left(\boxed{\text{ア}},\ f\left(\boxed{\text{イ}}\right)\right)$ である。
$y=f(x)$ はそのグラフが $\boxed{\text{ウ}}$ 関数であり，三角形の重心 G は

$$x>0,\ \boxed{\text{エ}}$$

で表される領域に存在する。また，$s=e^3$，$u=e^4$，$s<t<u$ である場合，この三角形の面積は

$$e^{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カキ}}+e\right)$$

のとき最大となる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

① $s+t+u$　② $\dfrac{s+t+u}{3}$　③ $\sqrt{s+t+u}$
④ $st+tu+us$　⑤ $(st+tu+us)^2$　⑥ $stu$
⑦ $(stu)^{\frac{1}{3}}$　⑧ $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{u}$　⑨ $\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{u}\right)^{-1}$

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

① 下に凸で単調増加な　② 下に凸で単調減少な
③ 上に凸で単調増加な　④ 上に凸で単調減少な
⑤ 変曲点を 1 つもつ単調増加な　⑥ 変曲点を 1 つもつ単調減少な
⑦ 下に凸で極小値を 1 つもつ　⑧ 上に凸で極大値を 1 つもつ
⑨ 周期的で微分可能な

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

① $y>f(x)$　② $y<f(x)$　③ $y>f\left(\dfrac{x}{2}\right)$
④ $y<f\left(\dfrac{x}{2}\right)$　⑤ $|y|>f(x)$　⑥ $|y|<f(x)$
⑦ $3y>f(x)$　⑧ $y<3f(x)$

(b) 数列 $\{f(a_n)\}$ が公差 $-3$ の等比数列となるのは，数列 $\{a_n\}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）が $\boxed{\text{ク}}$ 場合であり，

$$\log_b(a_2\cdot a_{2021})-\log_b(a_1)^2=\boxed{\text{ケコ}},\qquad \text{ただし } b=\frac{a_{44}}{a_1}$$

が成り立つ。この数列が $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(a_k)=0$ を満たすとき，$f(a_n)=\boxed{\text{サシ}}\,n+\boxed{\text{ス}}$ であり，次式が成り立つ。

$$a_1\times a_2\times\cdots\times a_5=\boxed{\text{セ}},\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{e^{\boxed{\text{ソ}}}}{e^{\boxed{\text{タ}}}-1}$$

このとき，5 以上の整数 $n$ に対し，座標平面上の点 $(0,\ f(|f(a_n)|))$ を $\mathrm{P}_n$，$(n,\ f(|f(a_n)|))$ を $\mathrm{Q}_n$ とすると，台形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 $S_n$ は

$$S_n = \left(n + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)\log_e\left(1 + \frac{1}{\boxed{\text{テト}} + n}\right)$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① 公差 $-3$ の等差数列である

② 公差 $\dfrac{1}{e^3}$ の等差数列である

③ 公差 3 の等差数列の逆数からなる数列である

④ 公差 $-\log_e 3$ の等差数列である

⑤ 公比 $-3$ の等比数列である

⑥ 公比 $\dfrac{1}{e^3}$ の等比数列である

⑦ 公比 $-\log_e 3$ の等比数列である

⑧ $a_n = \dfrac{n!}{3}$ と表される

⑨ $a_n = \dfrac{1}{3n!}$ と表される

(c) 正の整数 $n$ に対して $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$，$T_0 = 0$ とする。$0 \leqq m \leqq 100$ の範囲で整数 $m$ が変化するとき，$T_{100} - T_m - T_{100-m}$ の最小値は $\boxed{\text{ニ}}$ であり，最大となるのは $m = \boxed{\text{ヌネ}}$ のときである。

解答

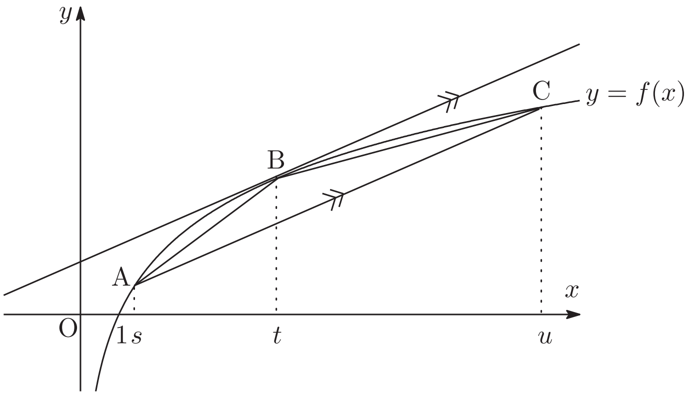
以下，$\log_e x = \log x$ などと表記する。

(a) $\dfrac{f(s)+f(t)+f(u)}{3} = \dfrac{\log stu}{3} = \log stu^{\frac{1}{3}} = f\left(stu^{\frac{1}{3}}\right)$ であるので，$\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{s+t+u}{3},\ f\left(stu^{\frac{1}{3}}\right)}\right)$

$f(x) = \log x$ は $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$，$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ であるので，そのグラフは 上に凸な単調増加な 関数である。したがって，三角形の重心 G は $x > 0$，$\boldsymbol{y < f(x)}$ で表される領域に存在する。

ここで，$\mathrm{A}(s,\ f(s))$，$\mathrm{B}(t,\ f(t))$，$\mathrm{C}(u,\ f(u))$ とすると，三角形 ABC の面積が最大となるのは，$y = f(x)$ 上の点 B における接線の傾き $f'(t) = \dfrac{1}{t}$ が直線 AC の傾き $\dfrac{f(e^4) - f(e^3)}{e^4 - e^3} = \dfrac{1}{e^4 - e^3}$ に一致するときなので，求める $t$ は

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{e^4 - e^3} \iff t = \boldsymbol{e^3(-1+e)}$$




(b)　数列 $\{f(a_n)\}$ が公差 $-3$ の等差数列であるので

$$f(a_{n+1})-f(a_n)=-3 \iff \log\frac{a_{n+1}}{a_n}=-3 \iff \frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{-3}$$

したがって，数列 $\{a_n\}$ は 公比 $\boldsymbol{\frac{1}{e^3}(=e^{-3})}$ の等比数列である ので，$a_n=a_1(e^{-3})^{n-1}$ とかける。

このとき，$a_2\cdot a_{2021}=a_1e^{-3}\cdot a_1(e^{-3})^{2020}={a_1}^2(e^{-3})^{2021}$，$b=\dfrac{a_{44}}{a_1}=\dfrac{a_1(e^{-3})^{43}}{a_1}=(e^{-3})^{43}$ より

$$\log_b(a_2\cdot a_{2021})-\log_b(a_1)^2=\log_b\frac{{a_1}^2(e^{-3})^{2021}}{{a_1}^2}=\log_{(e^{-3})^{43}}(e^{-3})^{43\cdot 47}=\boldsymbol{47}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}f(a_k)=0$ のとき

$$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_5)=0 \iff 5f(a_1)-30=0 \iff f(a_1)=6$$

となるので，$f(a_n)=6+(n-1)(-3)=\boldsymbol{-3n+9}$ であり

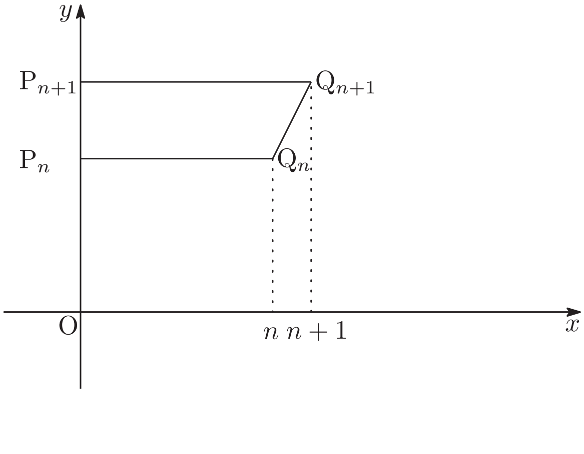
$$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_5)=0 \iff \log(a_1\times a_2\times\cdots\times a_5)=0 \iff a_1\times a_2\times\cdots\times a_5=\boldsymbol{1}$$

である。また，$f(a_n)=-3n+9 \iff a_n=e^{-3n+9} \iff a_n=e^6(e^{-3})^{n-1}$ であり，$|e^{-3}|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{e^6}{1-e^{-3}}=\boldsymbol{\frac{e^9}{e^3-1}}$$

ここで，台形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ は上底 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$，下底 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$，高さ $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の台形であり

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}&=f(|f(a_{n+1})|)-f(|f(a_n)|)\\&=f(|-3n+6|)-f(|-3n+9|)=f(3n-6)-f(3n-9)\quad(\because n\text{ は }5\text{ 以上の整数})\\&=\log\frac{n-2}{n-3}\end{aligned}$$



であるので

$$S_n = \frac{1}{2}\left(n + (n+1)\right)\log\frac{n-2}{n-3} = \boldsymbol{\left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{-3+n}\right)}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{-3+n}\log\left(1+\frac{1}{-3+n}\right)^{-3+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{-\frac{3}{n}+1}\log\left(1+\frac{1}{-3+n}\right)^{-3+n}$$
$$= 1\cdot\log e = \mathbf{1}$$

(c) $T_n = \log n!$ であるので

$$T_{100} - T_m - T_{100-m} = \log\frac{100!}{m!(100-m)!}$$

$g_m = \dfrac{100!}{m!(100-m)!}$（$0 \leqq m \leqq 99$）とおくと

$$\frac{g_{m+1}}{g_m} = g_{m+1} \div g_m = \frac{100!}{(m+1)!(99-m)!} \times \frac{m!(100-m)!}{100!} = \frac{100-m}{m+1}$$

であるので，$\dfrac{g_{m+1}}{g_m} > 1 \iff m < \dfrac{99}{2}$，$\dfrac{g_{m+1}}{g_m} < 1 \iff m > \dfrac{99}{2}$ が成り立つ。
したがって，$m = 0,\ 1,\ \cdots,\ 49$ のとき $g_m < g_{m+1}$，$m = 50,\ 51,\ \cdots,\ 99$ のとき $g_m > g_{m+1}$ であるから

$$(1=)g_0 < g_1 < \cdots < g_{49} < g_{50} > g_{51} > \cdots > g_{99} > g_{100}(=1)$$

よって，求める $\log g_m$ の最小値は $m = 0,\ 100$ のときで $\log g_0(=\log g_{100}) = \log 1 = \mathbf{0}$ であり，また，$\log g_m$ が最大となる $m$ は $m = \mathbf{50}$ である。

(参考) $g_m = {}_{100}\mathrm{C}_m$ であるので，$g_m$ は $m = 0,\ 100$ のとき最小となり，$m = 50$ のとき最大となることは計算しなくてもわかる。（パスカルの三角形）

## 講評

Ⅰ［確率］(易)

教科書レベルの確率の問題であった。いずれも平易な問題ばかりなので，ここでは落とせないだろう。要領よく計算し，大問ⅡⅢに時間を割きたいところ。

Ⅱ［図形と方程式，数Ⅱ積分法］（やや易）

前半は落とせない。後半の 2 次関数は図形的な考察により計算量をいかに減らせるかがポイントとなった。また，最後の面積計算は医学部受験生にとっては必須の公式を利用していこう。

Ⅲ［数列，極限］（標準）

(a) の選択肢問題は対数関数の理解を問う基本的な問題であった。最後の $t$ の値もありふれた考え方を用いるので落としたくない。(b)(c) は一見やりにくそうな問題も多く，苦戦した受験生も多いのではないだろうか。(a)(b)(c) が独立した問題となっている点にも注意が必要である。

大問数が昨年と比べて 4 つから 3 つに変更となったが，難易度・計算量は昨年度と同程度であった。大問Ⅰが易しいため全体的に易しい印象を持つかもしれないが，大問Ⅲが受験生にとっては解きにくいと思われるためボーダーは 65% 程度であろう。