解答速報

東北医科薬科大学　数学

2021年 1月23日実施

[I]

自然数 n に対して

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k\sin kx$$

と定める。さらに，

$$S_n=\int_0^{\pi}f_n(x)\,dx,\quad T_n=\int_0^{\pi}\{f_n(x)\}^2\,dx$$

とおく。このとき，次の問に答えなさい。

(1) $S_2=\boxed{\text{ア}}$，$T_2=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である。

(2) S_n を n の式で表すと次のようになる。

n が偶数の場合，$S_n=\boxed{\text{エ}}\,n$

n が奇数の場合，$S_n=\boxed{\text{オ}}\,n+\boxed{\text{カ}}$

(3) T_n を n の式で表すと $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{キク}}}n\left(n+\boxed{\text{ケ}}\right)\left(\boxed{\text{コ}}\,n+\boxed{\text{サ}}\right)$ となる。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{S_n}^3}{T_n}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\pi}$ となる。

解答

(1)

$$S_2=\int_0^{\pi}f_2(x)\,dx=\int_0^{\pi}(\sin x+2\sin 2x)\,dx=\Big[-\cos x-\cos 2x\Big]_0^{\pi}=\mathbf{2}$$

$$\begin{aligned}T_2&=\int_0^{\pi}\{f_2(x)\}^2\,dx=\int_0^{\pi}(\sin^2x+4\sin x\sin 2x+4\sin^2 2x)\,dx\\&=\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+8\sin^2x\cos x+4\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx\\&=\left[\frac{5}{2}x+\frac{8}{3}\sin^3x-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{2}\right]_0^{\pi}\\&=\boldsymbol{\frac{5}{2}\pi}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n} k\sin kx \ dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} k\sin kx \ dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[-\cos kx \Big]_0^{\pi} = \sum_{k=1}^{n} (-\cos k\pi + 1) = n - \sum_{k=1}^{n} \cos k\pi \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{1 \cdot n} & (n\text{ が偶数の場合}) \\ \boldsymbol{1 \cdot n + 1} & (n\text{ が奇数の場合}) \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin lx \sin mx \ dx$（$l$，$m$ は自然数）を計算する。

ｉ）$l \neq m$ のとき

$$\int_0^{\pi} \sin lx \sin mx \, dx = \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\{\cos(l+m)x - \cos(l-m)x\} \, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(l+m)x}{l+m} - \frac{\sin(l-m)x}{l-m}\right]_0^{\pi} = 0$$

ii）$l = m$ のとき

$$\int_0^{\pi} \sin lx \sin mx \ dx = \int_0^{\pi} \sin^2 lx \ dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2lx}{2} \ dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2lx}{4l}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

このことを用いると

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} k\sin kx\right)^2 \ dx = \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin^2 kx \ dx \quad (\because \text{ i }) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} k^2 \sin^2 kx \ dx = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\because \text{ ii }) \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{12} n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

(4)

Ｉ）n が偶数の場合

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{S_n}^3}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\frac{\pi}{12}n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\pi} \cdots\cdots ①$$

II）n が奇数の場合

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{S_n}^3}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{\frac{\pi}{12}n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{1 \cdot (2+\frac{1}{n})} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\pi} \cdots\cdots ②$$

よって，①② が一致するので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{{S_n}^3}{T_n}$ は存在し，その極限値は $\boldsymbol{\dfrac{6}{\pi}}$ である。

［II］

1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものを a_1，a_2，$\cdots$，a_{29}，a_{30} と書くことにし，31 から 60 までの 30 個の異なる整数を並べたものを b_1，b_2，$\cdots$，b_{29}，b_{30} と書くことにする。このとき，次の問に答えなさい。

(1)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} a_k = \boxed{\text{アイウ}}$ となる。

(2)　$0 < l < m$，$0 < p_1 < p_2$ とすると

$$lp_{\boxed{\text{エ}}} + mp_{\boxed{\text{オ}}} < lp_{\boxed{\text{オ}}} + mp_{\boxed{\text{エ}}} \quad \left(\boxed{\text{エ}} \neq \boxed{\text{オ}}\right)$$

(3)　順列 b_1，$\cdots$，b_{30} のとり方をいろいろ変えたとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} kb_k$ の最小値は $\boxed{\text{カキクケコ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{サシスセソ}}$ である。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小となるように順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{30} をとり固定する。1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものを c_1，c_2，$\cdots$，c_{30} とし，これらの取り方をいろいろ変えたとき，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} ka_kc_k$ の最小値は $\boxed{\text{タチツテト}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{ナニヌネノ}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　a_1，a_2，$\cdots$，a_{30} は 1 から 30 を並べたものなので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30} a_k &= 1 + 2 + \cdots + 30 \\ &= \frac{(1+30)\cdot 30}{2} \\ &= \mathbf{465}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(lp_1 + mp_2) - (lp_2 + mp_1) &= p_2(m-l) - p_1(m-l) \\ &= (p_2 - p_1)(m-l) > 0\end{aligned}$$

であるから，

$$\boldsymbol{lp_2 + mp_1 < lp_1 + mp_2}$$

が成り立つ。

(注意)　(2) の結果より，実数の数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ が
$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$，$0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n$ を満たしているとき，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k q_{\sigma(k)} \leqq p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k q_{\sigma(k)} \geqq p_1q_n + p_2q_{n-1} + \cdots + p_nq_1\end{cases}$$

であることがわかる。（ただし，$\{\sigma(k)\}$ は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ を任意に並べ替えた順列を表す。）
すなわち，積の和の値を考える際，

「大きい順同士の積の和」が最大，「小さい順と大きい順の積の和」が最小

ということである。（注意終わり）

(3)　(2) の結果を踏まえると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最小となるのは，$\{b_k\}$ が減少列のとき，すなわち

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{30} \text{ が } 60,\ 59,\ \cdots,\ 31$$

のときである。
このとき $b_k = 61 - k$（$1 \leqq k \leqq 30$）であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{最小値}) &= \sum_{k=1}^{30} k(61-k) \\
&= 61\sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} k^2 \\
&= 61 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 - \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 \\
&= \mathbf{18910}
\end{aligned}$$

また同様に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最大となるのは，$\{b_k\}$ が増加列のとき，すなわち

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{30} \text{ が } 31,\ 32,\ \cdots,\ 60$$

のときである。
このとき $b_k = k + 30$（$1 \leqq k \leqq 30$）であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{最大値}) &= \sum_{k=1}^{30} k(k+30) \\
&= \sum_{k=1}^{30} k^2 + 30\sum_{k=1}^{30} k \\
&= \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 + 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 \\
&= 31(5 \cdot 61 + 15 \cdot 30) \\
&= \mathbf{23405}
\end{aligned}$$

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小となるのは，$\{a_k\}$ が減少列のとき，すなわち

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{30} \text{ が } 30,\ 29,\ \cdots,\ 1$$

のときである。このとき，$a_k=31-k$（$1\leqq k\leqq 30$）である。
したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}ka_kc_k&=\sum_{k=1}^{30}k(31-k)c_k\\&=\sum_{k=1}^{15}k(31-k)c_k+\sum_{k=16}^{30}k(31-k)c_k\\&=\sum_{k=1}^{15}k(31-k)c_k+\sum_{i=1}^{15}(31-i)ic_{31-i}\qquad(31-k=i\text{ とおいた})\\&=\sum_{k=1}^{15}k(31-k)c_k+\sum_{k=1}^{15}(31-k)kc_{31-k}\\&=\sum_{k=1}^{15}k(31-k)(c_k+c_{31-k})\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

である。
ここで，$1\leqq k\leqq 15$ において $\{k(31-k)\}$ は増加列であるから，
① が最小となるのは，

$$\{c_k+c_{31-k}\}\text{ が }30+29,\ 28+27,\ \cdots,\ 2+1$$

のときである。このとき，$c_k+c_{31-k}=(32-2k)+(31-2k)=63-4k$（$1\leqq k\leqq 15$) であるから

$$\begin{aligned}(\text{最小値})&=\sum_{k=1}^{15}k(31-k)(63-4k)\\&=-4\sum_{k=1}^{15}k^3+187\sum_{k=1}^{15}k^2-1953\sum_{k=1}^{15}k\\&=-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 15^2\cdot 16^2+187\cdot\frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 31-1953\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16\\&=\mathbf{60080}\end{aligned}$$

同様に ① が最大となるのは，

$$\{c_k+c_{31-k}\}\text{ が }1+2,\ 3+4,\ \cdots,\ 29+30$$

のときである。このとき，$c_k+c_{31-k}=(2k-1)+2k=4k-1$（$1\leqq k\leqq 15$) であるから

$$\begin{aligned}(\text{最大値})&=\sum_{k=1}^{15}k(31-k)(4k-1)\\&=-4\sum_{k=1}^{15}k^3+125\sum_{k=1}^{15}k^2-31\sum_{k=1}^{15}k\\&=-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 15^2\cdot 16^2+125\cdot\frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 31-31\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16\\&=\mathbf{93680}\end{aligned}$$

[III]

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とし，関数

$$f(\theta) = \sin 3\theta - \cos 3\theta - 4\sin 2\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta - 2$$

とするとき，次の問に答えなさい。

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) $\sin\theta + \cos\theta = t$ とおくとき，関数 $f(\theta)$ を t の式で表すと次のようになる。

$$f(\theta) = \boxed{\text{エ}}\,t^3 - \boxed{\text{オ}}\,t^2 - \boxed{\text{カ}}\,t + \boxed{\text{キ}}.$$

(3) $f(\theta) = 0$ であるとき，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\pi$，$\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ である。

(4) $f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}} + \boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

解答

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{3}{4} \iff 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{4} \iff \sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{-\frac{1}{8}}$$

(2) $\sin\theta + \cos\theta = t$ のとき

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = t^2 \iff 1 + 2\sin\theta\cos\theta = t^2 \iff \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta - (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 8\sin\theta\cos\theta + 2\cos\theta + 2\sin\theta - 2 \\
&= -4(\sin^3\theta + \cos^3\theta) + 5(\sin\theta + \cos\theta) - 8\sin\theta\cos\theta - 2 \\
&= -4\{(\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)\} + 5(\sin\theta + \cos\theta) - 8\sin\theta\cos\theta - 2 \\
&= -4\left(t^3 - 3\cdot\frac{t^2 - 1}{2}\cdot t\right) + 5t - 8\cdot\frac{t^2 - 1}{2} - 2 \\
&= \boldsymbol{2t^3 - 4t^2 - t + 2}
\end{aligned}$$

(3) (2) より

$$f(\theta) = 0 \iff 2t^3 - 4t^2 - t + 2 = 0 \iff (t - 2)(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1) = 0$$

$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ より，$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ なので，

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{2}$$

$$\iff \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi \iff \theta = \boldsymbol{\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi}$$

(4)　$f(\theta)=g(t)$ とする。このとき，$g'(t)=6t^2-8t-1$ なので，$g'(t)=0$ とすると $t=\dfrac{4\pm\sqrt{22}}{6}$

したがって，$g(t)$ の $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における増減は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{4-\sqrt{22}}{6}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$t=\dfrac{4-\sqrt{22}}{6}$（$=t_0$ とおく）のとき最大となり，その値は

$$g(t_0)=g'(t_0)\left(\frac{t}{3}-\frac{2}{9}\right)-\frac{22}{9}t_0+\frac{16}{9}=-\frac{22}{9}\cdot\frac{4-\sqrt{22}}{6}+\frac{16}{9}=\boldsymbol{\frac{4+11\sqrt{22}}{27}}$$

講評

［Ｉ］［積分法，極限］（標準）

昨年度と比べると計算量も少なく解答しやすいが，数IIIの積分計算に慣れていない現役生には厳しい出題であった。

［II］［整数］（やや難）

前半は易しめだが，後半の計算は大変である。時間内に解き切るのは厳しいであろう。

[III]［三角関数，数学II微分法］（やや易〜標準）

三角関数と 3 次関数の典型的な出題である。3 倍角の公式は時間節約のためにも必ず覚えておくべきである。(4) の最大値は $f(\theta)(=g(t))$ を $g'(t)$ で割って要領よく計算したい。

難易度は昨年度と比べ易化し，計算量も少なくなった。［Ｉ］[III] は完答を目指したい。ボーダーは 65%〜70% 程度か。