

解 答 速 報

東北医科薬科大学 数学

2021年1月23日実施

[I]

自然数 n に対して

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n k \sin kx$$

と定める。さらに、

$$S_n = \int_0^\pi f_n(x) dx, \quad T_n = \int_0^\pi \{f_n(x)\}^2 dx$$

とおく。このとき、次の間に答えなさい。

(1) $S_2 = \boxed{\text{ア}}$, $T_2 = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である。

(2) S_n を n の式で表すと次のようになる。

n が偶数の場合, $S_n = \boxed{\text{エ}} n$

n が奇数の場合, $S_n = \boxed{\text{オ}} n + \boxed{\text{カ}}$

(3) T_n を n の式で表すと $\frac{\pi}{\boxed{\text{キク}}} n (n + \boxed{\text{ケ}}) (\boxed{\text{コ}} n + \boxed{\text{サ}})$ となる。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\pi}$ となる。

解答

(1)

$$S_2 = \int_0^\pi f_2(x) dx = \int_0^\pi (\sin x + 2 \sin 2x) dx = \left[-\cos x - \cos 2x \right]_0^\pi = 2$$

$$T_2 = \int_0^\pi \{f_2(x)\}^2 dx = \int_0^\pi (\sin^2 x + 4 \sin x \sin 2x + 4 \sin^2 2x) dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + 8 \sin^2 x \cos x + 4 \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x + \frac{8}{3} \sin^3 x - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{2} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{5}{2}\pi$$

(2)

$$\begin{aligned}
 S_n &= \int_0^\pi \sum_{k=1}^n k \sin kx \, dx = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi k \sin kx \, dx \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[-\cos kx \right]_0^\pi = \sum_{k=1}^n (-\cos k\pi + 1) = n - \sum_{k=1}^n \cos k\pi \\
 &= \begin{cases} \mathbf{1 \cdot n} & (n \text{ が偶数の場合}) \\ \mathbf{1 \cdot n + 1} & (n \text{ が奇数の場合}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

(3) $\int_0^\pi \sin lx \sin mx \, dx$ (l, m は自然数) を計算する。

i) $l \neq m$ のとき

$$\int_0^\pi \sin lx \sin mx \, dx = \int_0^\pi -\frac{1}{2} \{ \cos(l+m)x - \cos(l-m)x \} \, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(l+m)x}{l+m} - \frac{\sin(l-m)x}{l-m} \right]_0^\pi = 0$$

ii) $l = m$ のとき

$$\int_0^\pi \sin lx \sin mx \, dx = \int_0^\pi \sin^2 lx \, dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2lx}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2lx}{4l} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

このことを用いると

$$\begin{aligned}
 T_n &= \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n k \sin kx \right)^2 \, dx = \int_0^\pi \sum_{k=1}^n k^2 \sin^2 kx \, dx \quad (\because \text{i}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi k^2 \sin^2 kx \, dx = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\because \text{ii}) \\
 &= \frac{\pi}{12} \mathbf{n(n+1)(2n+1)}
 \end{aligned}$$

(4)

I) n が偶数の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\frac{\pi}{12} n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\pi} \dots\dots \textcircled{1}$$

II) n が奇数の場合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{\frac{\pi}{12} n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{(1 + \frac{1}{n})^2}{1 \cdot (2 + \frac{1}{n})} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\pi} \dots\dots \textcircled{2}$$

よって、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ が一致するので $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{T_n}$ は存在し、その極限值は $\frac{6}{\pi}$ である。

[II]

1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものを $a_1, a_2, \dots, a_{29}, a_{30}$ と書くことにし, 31 から 60 までの 30 個の異なる整数を並べたものを $b_1, b_2, \dots, b_{29}, b_{30}$ と書くことにする。このとき, 次の問に答えなさい。

(1) 和 $\sum_{k=1}^{30} a_k = \boxed{\text{アイウ}}$ となる。

(2) $0 < l < m, 0 < p_1 < p_2$ とすると

$$lp_{\boxed{\text{エ}}} + mp_{\boxed{\text{オ}}} < lp_{\boxed{\text{オ}}} + mp_{\boxed{\text{エ}}} \quad (\boxed{\text{エ}} \neq \boxed{\text{オ}})$$

(3) 順列 b_1, \dots, b_{30} のとり方をいろいろ変えたとき, $\sum_{k=1}^{30} kb_k$ の最小値は $\boxed{\text{カキクケコ}}$ であり, 最大値は $\boxed{\text{サシスセソ}}$ である。

(4) $\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小となるように順列 a_1, a_2, \dots, a_{30} をとり固定する。1 から 30 までの 30 個の異なる整数を並べたものを c_1, c_2, \dots, c_{30} とし, これらの取り方をいろいろ変えたとき, 和 $\sum_{k=1}^{30} ka_k c_k$ の最小値は $\boxed{\text{タチツテト}}$ であり, 最大値は $\boxed{\text{ナニヌネノ}}$ である。

解答

(1) a_1, a_2, \dots, a_{30} は 1 から 30 を並べたものなので

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} a_k &= 1 + 2 + \dots + 30 \\ &= \frac{(1 + 30) \cdot 30}{2} \\ &= \mathbf{465} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (lp_1 + mp_2) - (lp_2 + mp_1) &= p_2(m - l) - p_1(m - l) \\ &= (p_2 - p_1)(m - l) > 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$lp_2 + mp_1 < lp_1 + mp_2$$

が成り立つ。

(注意) (2) の結果より, 実数の数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ が

$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n, 0 < q_1 < q_2 < \dots < q_n$ を満たしているとき,

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n p_k q_{\sigma(k)} \leq p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n \\ \sum_{k=1}^n p_k q_{\sigma(k)} \geq p_1 q_n + p_2 q_{n-1} + \dots + p_n q_1 \end{cases}$$

であることがわかる。(ただし、 $\{\sigma(k)\}$ は $\{1, 2, \dots, n\}$ を任意に並べ替えた順列を表す。) すなわち、積の和の値を考える際、

「大きい順同士の積の和」が最大、「小さい順と大きい順の積の和」が最小

ということである。(注意終わり)

- (3) (2) の結果を踏まえると、 $\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最小となるのは、 $\{b_k\}$ が減少列のとき、すなわち

$$b_1, b_2, \dots, b_{30} \text{ が } 60, 59, \dots, 31$$

のときである。

このとき $b_k = 61 - k$ ($1 \leq k \leq 30$) であるから、

$$\begin{aligned} (\text{最小値}) &= \sum_{k=1}^{30} k(61 - k) \\ &= 61 \sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} k^2 \\ &= 61 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 - \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 \\ &= \mathbf{18910} \end{aligned}$$

また同様に、 $\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最大となるのは、 $\{b_k\}$ が増加列のとき、すなわち

$$b_1, b_2, \dots, b_{30} \text{ が } 31, 32, \dots, 60$$

のときである。

このとき $b_k = k + 30$ ($1 \leq k \leq 30$) であるから、

$$\begin{aligned} (\text{最大値}) &= \sum_{k=1}^{30} k(k + 30) \\ &= \sum_{k=1}^{30} k^2 + 30 \sum_{k=1}^{30} k \\ &= \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 + 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 \\ &= 31(5 \cdot 61 + 15 \cdot 30) \\ &= \mathbf{23405} \end{aligned}$$

- (4) $\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小となるのは、 $\{a_k\}$ が減少列のとき、すなわち

$$a_1, a_2, \dots, a_{30} \text{ が } 30, 29, \dots, 1$$

のときである。このとき、 $a_k = 31 - k$ ($1 \leq k \leq 30$) である。
したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} k a_k c_k &= \sum_{k=1}^{30} k(31-k)c_k \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31-k)c_k + \sum_{k=16}^{30} k(31-k)c_k \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31-k)c_k + \sum_{i=1}^{15} (31-i)ic_{31-i} \quad (31-k=i \text{ とおいた}) \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31-k)c_k + \sum_{k=1}^{15} (31-k)kc_{31-k} \\ &= \sum_{k=1}^{15} k(31-k)(c_k + c_{31-k}) \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。

ここで、 $1 \leq k \leq 15$ において $\{k(31-k)\}$ は増加列であるから、
① が最小となるのは、

$$\{c_k + c_{31-k}\} \text{ が } 30 + 29, 28 + 27, \dots, 2 + 1$$

のときである。このとき、 $c_k + c_{31-k} = (32-2k) + (31-2k) = 63-4k$ ($1 \leq k \leq 15$) であるから

$$\begin{aligned} (\text{最小値}) &= \sum_{k=1}^{15} k(31-k)(63-4k) \\ &= -4 \sum_{k=1}^{15} k^3 + 187 \sum_{k=1}^{15} k^2 - 1953 \sum_{k=1}^{15} k \\ &= -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 15^2 \cdot 16^2 + 187 \cdot \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 - 1953 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \\ &= \mathbf{60080} \end{aligned}$$

同様に ① が最大となるのは、

$$\{c_k + c_{31-k}\} \text{ が } 1 + 2, 3 + 4, \dots, 29 + 30$$

のときである。このとき、 $c_k + c_{31-k} = (2k-1) + 2k = 4k-1$ ($1 \leq k \leq 15$) であるから

$$\begin{aligned} (\text{最大値}) &= \sum_{k=1}^{15} k(31-k)(4k-1) \\ &= -4 \sum_{k=1}^{15} k^3 + 125 \sum_{k=1}^{15} k^2 - 31 \sum_{k=1}^{15} k \\ &= -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 15^2 \cdot 16^2 + 125 \cdot \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 - 31 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \\ &= \mathbf{93680} \end{aligned}$$

[III]

$0 \leq \theta \leq \pi$ とし、関数

$$f(\theta) = \sin 3\theta - \cos 3\theta - 4 \sin 2\theta + 2 \sin \theta + 2 \cos \theta - 2$$

とするとき、次の間に答えなさい。

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) $\sin \theta + \cos \theta = t$ とおくと、関数 $f(\theta)$ を t の式で表すと次のようになる。

$$f(\theta) = \boxed{\text{エ}} t^3 - \boxed{\text{オ}} t^2 - \boxed{\text{カ}} t + \boxed{\text{キ}}.$$

(3) $f(\theta) = 0$ であるとき、 $\theta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}} \pi, \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}} \pi$ である。

(4) $f(\theta)$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{ソ}} + \boxed{\text{タチ}} \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

解答

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{3}{4} \iff 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4} \iff \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$$

(2) $\sin \theta + \cos \theta = t$ のとき

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = t^2 \iff 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = t^2 \iff \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta - (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta + 2 \cos \theta + 2 \sin \theta - 2 \\ &= -4(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) + 5(\sin \theta + \cos \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta - 2 \\ &= -4\{(\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)\} + 5(\sin \theta + \cos \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta - 2 \\ &= -4 \left(t^3 - 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \cdot t \right) + 5t - 8 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} - 2 \\ &= 2t^3 - 4t^2 - t + 2 \end{aligned}$$

(3) (2) より

$$f(\theta) = 0 \iff 2t^3 - 4t^2 - t + 2 = 0 \iff (t - 2)(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1) = 0$$

$$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4} \pi \text{ より, } -1 \leq t \leq \sqrt{2} \text{ なので,}$$

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\iff \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6} \pi, \frac{7}{6} \pi \iff \theta = \frac{7}{12} \pi, \frac{11}{12} \pi$$

(4) $f(\theta) = g(t)$ とする。このとき、 $g'(t) = 6t^2 - 8t - 1$ なので、 $g'(t) = 0$ とすると $t = \frac{4 \pm \sqrt{22}}{6}$

したがって、 $g(t)$ の $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における増減は次のようになる。

t	-1	...	$\frac{4 - \sqrt{22}}{6}$...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		↗	極大	↘	

よって、 $t = \frac{4 - \sqrt{22}}{6}$ ($= t_0$ とおく) のとき最大となり、その値は

$$g(t_0) = g'(t_0) \left(\frac{t}{3} - \frac{2}{9} \right) - \frac{22}{9} t_0 + \frac{16}{9} = -\frac{22}{9} \cdot \frac{4 - \sqrt{22}}{6} + \frac{16}{9} = \frac{4 + 11\sqrt{22}}{27}$$

講評

[I] [積分法, 極限] (標準)

昨年度と比べると計算量も少なく解答しやすいが、数Ⅲの積分計算に慣れていない現役生には厳しい出題であった。

[II] [整数] (やや難)

前半は易しめだが、後半の計算は大変である。時間内に解き切るのは厳しいであろう。

[III] [三角関数, 数学Ⅱ微分法] (やや易～標準)

三角関数と3次関数の典型的な出題である。3倍角の公式は時間節約のためにも必ず覚えておくべきである。(4)の最大値は $f(\theta)(=g(t))$ を $g'(t)$ で割って要領よく計算したい。

難易度は昨年度と比べ易化し、計算量も少なくなった。[I][III]は完答を目指したい。ボーダーは65%～70%程度か。

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せは… YMS ☎03-3370-0410 まで

医学部進学予備校
メビオ
 受付 9～21時(土日祝可・携帯からOK)
 大阪市中央区石町 2-3-12
 ベルヴォア天満橋
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
YMS
 heart of medicine
 受付 8～20時(土日祝可)
 東京都渋谷区代々木
 1-37-14
<https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ
 福岡校
 受付 03-3370-0410
 福岡市中央区渡辺通 4-8-20
 英進館 天神本館新2号館2階
<https://www.mebio-eishinkan.com/>