医学部専門予備校 YMS × 医学部進学予備校 メビオ / 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2021年 2月11日実施

1.

次の $\boxed{}$ に当てはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

次の操作を5回繰り返し，白玉，赤玉を左から順に1列に並べる。

操作：1個のさいころを投げて，4以下の目が出たときには白玉を1個おき，他の目が出たときには赤玉を1個，次に白玉を1個おく。

たとえば，さいころの出た目が順に「1 1 1 5 1」であったとすると，並べられた玉の個数は6個で，玉の色は左から順に「白 白 白 赤 白 白」となる。このとき，

- 並べられた玉の個数が7個で，左から3個目の玉が赤玉である確率は $\boxed{(ア)}$
- 左から5個目の玉が赤玉である確率は $\boxed{(イ)}$

である。

解答

白玉を「W」，赤玉を「R」で表すことにする。

条件により，

$$\begin{cases} 確率\dfrac{2}{3}で「W」 \\ 確率\dfrac{1}{3}で「RW」 \end{cases} \quad が並べられる。$$

(ア)　サイコロを5回投げて，7個の玉が並べられて，左から3個目の玉が赤玉となるのは，

$$\begin{cases} (\mathrm{i})「W,\ W,\ RW,\ ○,\ ○」(○の一方は W，他方は RW）と並ぶ場合 \\ (\mathrm{ii})「RW,\ RW,\ W,\ W,\ W」と並ぶ場合 \end{cases}$$

のいずれかである。

(i) となる確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \left\{ {}_2C_1 \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right) \right\}$

(ii) となる確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

であり，これを加えてを加えて，求める確率は $\mathbf{\dfrac{8}{81}}$

(イ)　サイコロを5回投げて，左から5番目に赤玉が並べられるのは，

$$\begin{cases} (\mathrm{i})「W,\ W,\ W,\ W,\ RW」と並ぶ場合 \\ (\mathrm{ii})「○,\ ○,\ ○,\ RW,\ X」と並ぶ場合（○のうち2つは W，残り1つは RW，X は任意） \\ (\mathrm{ii})「RW,\ RW,\ RW,\ X,\ X」と並ぶ場合（X は任意） \end{cases}$$

のいずれかである。

(i) となる確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \dfrac{1}{3}$

(ii) となる確率は $\left\{ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{3} \right\} \cdot \dfrac{1}{3}$

(iii) となる確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

でるから，これらを加えて，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{61}{243}}$

2.

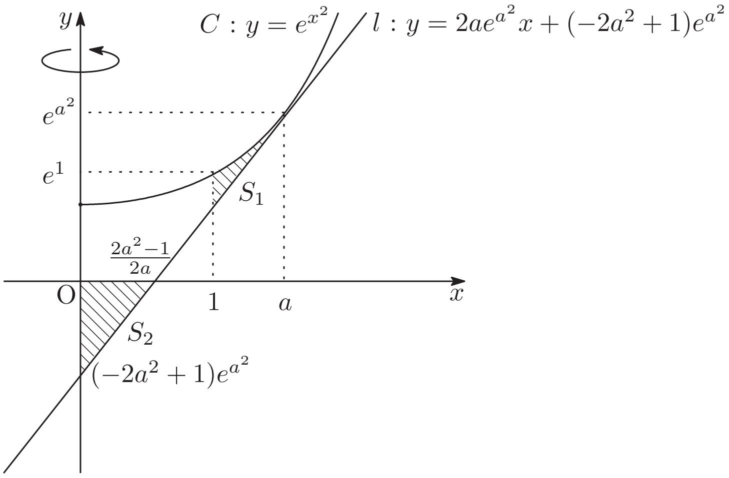
曲線 $y=e^{x^2}$ $(x \geqq 0)$ を C とする。実数 a は $a>1$ をみたす定数とし，C 上の点 $(a,\ e^{a^2})$ における接線を ℓ とする。C と 2 直線 ℓ，$x=1$ で囲まれた部分の面積を S_1，ℓ と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) C と y 軸，および 2 直線 $y=e$，$y=e^{a^2}$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$ を求めよ。

解答

(1)



上図より

$$
\begin{aligned}
V &= \int_e^{e^{a^2}} \pi x^2 dy \\
&= \pi\int_e^{e^{a^2}} \log y dy \quad (\because y=e^{x^2} \iff x^2=\log y) \\
&= \pi\Big[y(\log y-1)\Big]_e^{e^{a^2}} \\
&= \boldsymbol{\pi(a^2-1)e^{a^2}}
\end{aligned}
$$

(2) $l: y=2ae^{a^2}x+(-2a^2+1)e^{a^2}$ であるから，(1) 図より

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_1^a \left[e^{x^2}-\{2ae^{a^2}x+(-2a^2+1)e^{a^2}\}\right]dx \\
&= \int_1^a e^{x^2}dx-\Big[ae^{a^2}x^2+(-2a^2+1)e^{a^2}x\Big]_1^a \\
&= \int_1^a e^{x^2}dx+(a^3-2a^2+1)e^{a^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2-1}{2a}\cdot(2a^2-1)e^{a^2} \\
&= \frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}
\end{aligned}
$$

したがって

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\displaystyle\int_1^a e^{x^2}dx}{\frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}} + \frac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2}$$

ここで，$1 \leqq x$ より，$e^{x^2} \leqq xe^{x^2}$ であるので

$$(0<)\int_1^a e^{x^2}dx < \int_1^a xe^{x^2}dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_1^a = \frac{e^{a^2}-e}{2}$$

が成り立つことから

$$(0<)\frac{\displaystyle\int_1^a e^{x^2}dx}{\frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}} < \frac{\frac{e^{a^2}-e}{2}}{\frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}} \quad \left(\because \frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a} > 0\right)$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{e^{a^2}-e}{2}}{\frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}} = \lim_{a\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{1}{e^{a^2-1}}\right)}{(2a^2-1)^2} = 0$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\displaystyle\int_1^a e^{x^2}dx}{\frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}} = 0$$

また，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{4a(a^3-2a^2+1)}{(2a^2-1)^2} = \lim_{a\to\infty}\frac{4\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}\right)}{\left(2-\frac{1}{a^2}\right)^2} = \frac{4\cdot 1}{2^2} = 1$

よって

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2} = 0+1 = \mathbf{1}$$

3.

a，b は互いに素である自然数の定数で，$a \geqq 2$ であるとする。$0 < x \leqq \pi$ のとき，

$$\begin{cases} \cos x \leqq \cos 2ax \\ \sin 2ax \leqq 0 \end{cases}$$

をみたす x の値の範囲は，互いに共通部分をもたない n 個の閉区間の和集合であり，それら n 個の閉区間の長さの値を小さい方から順に x_1，…，x_n とする。$k = 1$，…，n に対し $\theta_k = 2b(2a+1)x_k$ とおき，xy 平面において，一般角 θ_k の動径と単位円との交点を Z_k とするとき，次の問いに答えよ。ただし，動径は原点を中心とし，x 軸の正の部分を始線とする。

(1) $n = a$ であり，$\theta_k = 2k\pi\dfrac{b}{a}$ $(k = 1,\ \ldots,\ a)$ と表されることを示せ。

(2) $k = 1$，…，a に対し，kb を a で割ったときの商を q_k，余りを r_k とする。$1 \leqq i < j \leqq a$ をみたす任意の自然数 i，j に対し $r_i \neq r_j$ を示し，点 Z_1，…，Z_a は単位円を a 等分する a 個の分点であることを示せ。

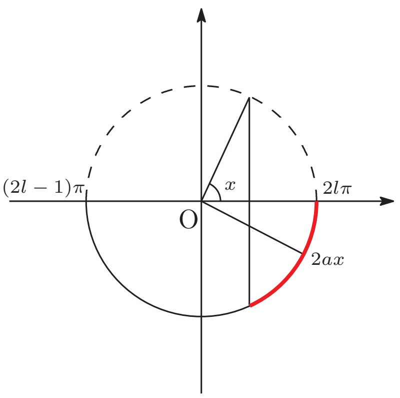
解答

(1)
$$\begin{cases} \cos x \leqq \cos 2ax & \cdots\cdots ① \\ \sin 2ax \leqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$0 < 2ax \leqq 2a\pi$ に注意して②をみたすのは

$$(2l-1)\pi \leqq 2ax \leqq 2l\pi \qquad (l = 1,\ 2,\ \cdots,\ a)$$

このもとで①をみたす x の範囲は



$$2l\pi - x \leqq 2ax \leqq 2l\pi$$

$$\therefore\ \frac{2l\pi}{2a+1} \leqq x \leqq \frac{l\pi}{a} \qquad (l = 1,\ 2,\ \cdots,\ a)$$

したがって，①かつ②をみたす x の閉区間は a 個あるから，$n = a$ である。(前半の証明終わり)

さらに，この区間の長さは

$$\frac{l\pi}{a} - \frac{2l\pi}{2a+1} = \frac{l\pi}{a(2a+1)} \qquad (l = 1,\ 2,\ \cdots,\ a)$$

より，l の増加関数だから，

$$x_k = \frac{k\pi}{a(2a+1)} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ a)$$

となるので，

$$\begin{aligned}\theta_k &= 2b(2a+1)x_k \\ &= 2b(2a+1)\cdot\frac{k\pi}{a(2a+1)} \\ &= 2k\pi\frac{b}{a} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)\ \text{(後半の証明終わり)}\end{aligned}$$

(2)　問題条件より，

$$\begin{cases} ib = aq_i + r_i & (0 \leqq r_i < a) \\ jb = aq_j + r_j & (0 \leqq r_j < a) \end{cases}$$

である。
$1 \leqq i < j \leqq a$ を満たすすべての $i,\ j$ に対して $r_i \fallingdotseq r_j$ であることを示す。
$1 \leqq i < j \leqq a$ を満たすある $i,\ j$ について $r_i = r_j$ であると仮定すると，

$$\begin{aligned}&ib - aq_i = jb - aq_j \\ &(j-i)b = a(q_j - q_i)\end{aligned}$$

より $(j-i)b$ は a の倍数であり，
$a\ (\geqq 2)$ と b は互いに素であるから $j-i$ は a の倍数である $\cdots\cdots$③

一方，$1 \leqq i < j \leqq q$ より，$0 < j-i \leqq a-1$ であるから，
$j-i$ は a の倍数ではない。すなわち③と矛盾する。
ゆえに，$1 \leqq i < j \leqq a$ を満たすすべての $i,\ j$ に対して $r_i \fallingdotseq r_j$ である。(前半の証明終わり)

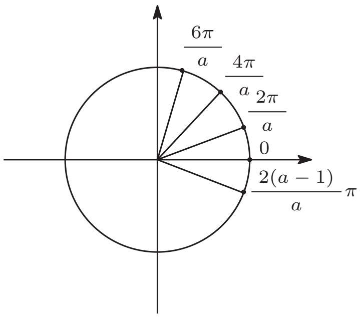
したがって，$kb\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ を a で割った余り r_k はすべて異なり，
$r_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ は $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a-1$ の値を 1 つずつとる。
ここで，

$$\begin{aligned}\theta_k &= \frac{2\pi kb}{a} \\ &= \frac{2\pi(aq_k + r_k)}{a} \\ &= 2\pi q_k + \frac{2\pi r_k}{a}\end{aligned}$$

である。
よって，$\delta_k = \theta_k - 2\pi qk$ とおくと，$0 \leqq \delta_k < 2\pi$ であり
動径 OZ_k の偏角は δ_k である。
δ_k を値の小さい順に並べると，

$$0,\ \frac{2\pi}{a},\ \frac{4\pi}{a},\ \cdots\cdots,\ \frac{2(a-1)\pi}{a}$$

となるので，$\mathrm{Z}_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ は
単位円を a 等分する a 等分点である。(後半の証明終わり)



$\frac{6\pi}{a}$
$\frac{4\pi}{a}$
$\frac{2\pi}{a}$
0
$\frac{2(a-1)}{a}\pi$

4.

実数 t は $0 < t < 1$ をみたす定数とする。1 辺の長さが 1 の正方形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ があり，四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ を次のように帰納的につくる。

四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ が作られたとき，

- 各辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$，$\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$，$\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$，$\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n$ を $t : 1-t$ に内分する点を，順に H_n，I_n，J_n，K_n とする。
- $\mathrm{A}_n\mathrm{J}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n$ の交点 A_{n+1}，$\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n$ と $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_n$ の交点 B_{n+1}，$\mathrm{C}_n\mathrm{H}_n$ と $\mathrm{D}_n\mathrm{I}_n$ の交点 C_{n+1}，$\mathrm{D}_n\mathrm{I}_n$ と $\mathrm{A}_n\mathrm{J}_n$ の交点 D_{n+1} を頂点として，四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ をつくる。

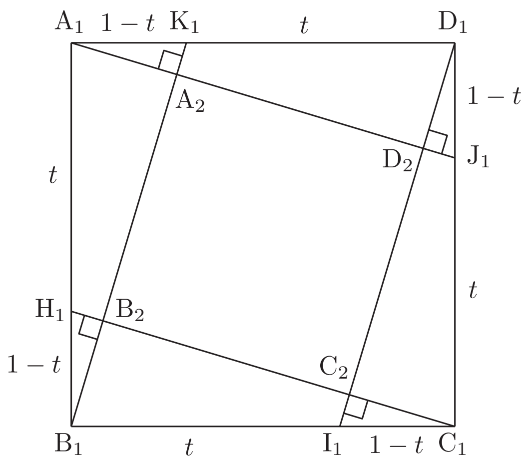
$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{K}_n$ の面積を a_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和が $\dfrac{1}{8}$ となるような定数 t の値を求めよ。

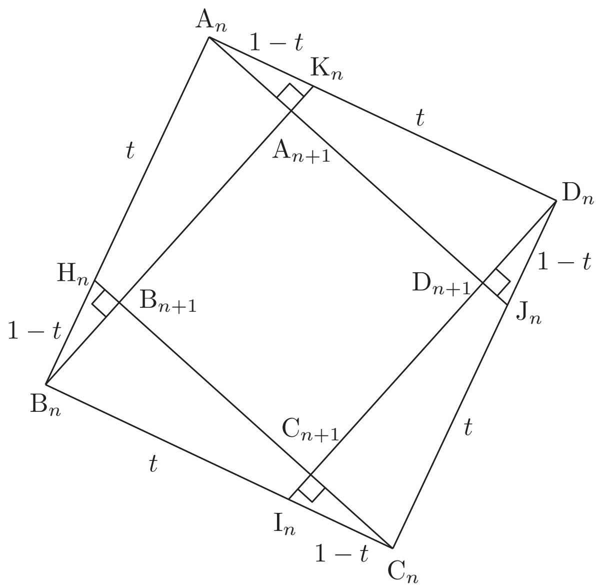
解答

$\triangle\mathrm{A_1K_1B_1} \equiv \triangle\mathrm{D_1J_1A_1}$ より，$\angle\mathrm{A_1K_1A_2} + \angle\mathrm{K_1A_1A_2} = \angle\mathrm{A_1K_1B_1} + \angle\mathrm{D_1A_1J_1} = \dfrac{\pi}{2}$ であるので，$\angle\mathrm{A_1A_2K_1} = \dfrac{\pi}{2}$ となる。同様にして，$\angle\mathrm{B_1B_2H_1} = \angle\mathrm{C_1C_2I_1} = \angle\mathrm{D_1D_2J_1} = \dfrac{\pi}{2}$

また，$\triangle\mathrm{A_1A_2K_1} \equiv \triangle\mathrm{B_1B_2H_1} \equiv \triangle\mathrm{C_1C_2I_1} \equiv \triangle\mathrm{D_1D_2J_1}$ より，$\mathrm{A_2B_2} = \mathrm{B_2C_2} = \mathrm{C_2D_2} = \mathrm{D_2A_2}$ である。

したがって，四角形 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ は正方形であり，以下帰納的に，四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ は正方形である。





このことから，

$$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n \backsim \triangle\mathrm{H}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n \text{ より，} \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1} : \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n\mathrm{H}_n : \mathrm{H}_n\mathrm{B}_n = t : 1-t$$
$$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1} \backsim \triangle\mathrm{A}_n\mathrm{K}_n\mathrm{A}_{n+1} \text{ より，} \mathrm{A}_n\mathrm{D}_n : \mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1} = \mathrm{A}_n\mathrm{K}_n : \mathrm{K}_n\mathrm{A}_{n+1} = 1 : 1-t$$
$$\triangle\mathrm{D}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_n \backsim \triangle\mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1}\mathrm{J}_n \text{ より，} \mathrm{D}_n\mathrm{J}_n : \mathrm{J}_n\mathrm{C}_n = \mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1} : \mathrm{D}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = 1-t : t$$

が言え，$\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1}$ であることに注意すると

$$\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1} : \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1} : \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{K}_n = 1-t : t : (1-t)^2$$

である。したがって，$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n = x_n$ とおくと

$$\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n = \frac{(1-t)+t+(1-t)^2}{t}x_{n+1} = \frac{t^2-2t+2}{t}x_{n+1}$$

である。このとき，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{K}_n\mathrm{B}_n$ において三平方の定理より

$$
\begin{aligned}
&{x_n}^2+\{(1-t)x_n\}^2=\left(\frac{t^2-2t+2}{t}x_{n+1}\right)^2\\
\iff& x_{n+1}=\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}x_n \quad (\because x_n>0,\ x_{n+1}>0,\ t>0)\\
\iff& x_n=\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)^{n-1} \quad (\because x_1=1)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
a_n&=\frac{(1-t)^2}{(1-t)+t+(1-t)^2}\times\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{K}_n\mathrm{B}_n\\
&=\frac{(1-t)^2}{(1-t)+t+(1-t)^2}\times\frac{1}{2}\cdot x_n\cdot(1-t)x_n\\
&=\frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}\left(\frac{t^2}{t^2-2t+2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

ここで，$(t^2-2t+2)-t^2=2(1-t)>0$（$\because 0<t<1$）であるから，$0<\dfrac{t^2}{t^2-2t+2}<1$ となるので

$$
\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}\cdot\frac{1}{1-\frac{t^2}{t^2-2t+2}}=\frac{(1-t)^2}{4}
$$

したがって、この無限級数の和が $\dfrac{1}{8}$ となることより

$$
\frac{(1-t)^2}{4}=\frac{1}{8}\iff t=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

$0<t<1$ より，求める定数 t の値は

$$
t=\mathbf{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}
$$

講評

1.［確率］（やや易）

昨年度に引き続き，小問集合ではなく確率の問題のみ。平易な問題であり，条件を満たす玉の出方を列挙して，確率を計算すればよい。

2.［積分法の応用，極限］（標準）

(1) の体積は基本的で確実に得点したい。(2) は S_1 を計算するのが不可能なので，不等式で評価する必要がある。不等式を作ることに慣れていない受験生には難しく感じたであろう。

3.［三角関数，整数］（やや難）

(1) の題意を把握，計算ともに混乱しやすく，難しく感じた受験生が多いであろう。(2) の証明は有名なものだが，経験がないと難しいと思われる。

4.［無限級数］（標準）

やや計算が多いが題材自体は頻出である。丁寧に計算し得点したい。

全体的に難易度は例年通り。易しめの問題と難しめの問題がはっきりしているので，受験生にとっては例年よりも取り組みやすかったのではないか。大問 1，大問 4，大問 2(1) を確実に得点し，1 次合格のための目標点は 60% 程度。