

# 解 答 速 報

## 順天堂大学医学部 数学

2021年 2月3日実施

I  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

(1) 複素数平面上に2点  $z_1 = \frac{3}{2} + 2i$ ,  $z_2 = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$  がある。

(a)  $|z_1| = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$  であり,  $z_1$  の偏角を  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) とすると  $\sin \alpha = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$  である。

(b) 点  $z_2$  を原点を中心として  $-\alpha$  だけ回転した点を表す複素数を  $z_3$  とすると  $z_3 = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} + \frac{\text{キ}}{\text{ク}}i$  である。

(c) 点  $z_2$  を原点を中心として  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転した点を表す複素数を  $z_4$  とすると  $z_4 = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}} + \frac{\text{シ}}{\text{ス}}i$  である。

(d) 複素数平面上で2点  $z_3, z_4$  からの距離の比が  $1:2$  になる点の全体は点  $\text{セ} + \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}i$  を中心とする半径  $\frac{\text{チツ}}{\text{テ}}$  である。

### 解答

(a)  $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$  であることより,  $z_1 = \frac{5}{2} \left( \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right)$  となるので,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

(b) (a) より,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  なので

$$\begin{aligned} z_3 &= \{\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)\} z_2 \\ &= (\cos \alpha - i \sin \alpha) z_2 \\ &= \left( \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right) \left( \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i \right) \\ &= \frac{9}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

(参考1)  $z_3 = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|} z_2$  と計算してもよい。

(c) (b)と同様にして

$$\begin{aligned} z_4 &= \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) z_2 \\ &= i \left( \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i \right) \\ &= \frac{-9}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

(d) 点  $z_3$  と点  $z_4$  を結ぶ線分を  $1:2$  に内分する点は  $\frac{2z_3 + z_4}{1+2} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}i$  ( $= w_1$ とする)

また、点  $z_3$  と点  $z_4$  を結ぶ線分を  $1:2$  に外分する点は  $\frac{-2z_3 + z_4}{1-2} = \frac{27}{5} + \frac{3}{5}i$  ( $= w_2$ とする)

求める点の軌跡は2点  $w_1, w_2$  を直径とする円であるから

$$\begin{cases} \text{中心: } \frac{w_1 + w_2}{2} = 3 + \frac{3}{5}i \\ \text{半径: } \frac{|w_1 - w_2|}{2} = \frac{12}{5} \end{cases}$$

(参考2) (d) ではアポロニウスの円を用いている。

2点 A, B からの距離の比が  $m:n$  ( $m > 0, n > 0, m \neq n$ ) である点の軌跡は、線分 AB を  $m:n$  に内分する点と外分する点を結ぶ線分を直径とする円となることは、私立医学部受験生は押さえておきたい。

(参考3) (d) は求める軌跡上の点を  $w$  とし、 $|w - z_3| : |w - z_4| = 1:2$  を計算して  $\left| w - \left( 3 + \frac{3}{5}i \right) \right| = \frac{12}{5}$  を得てもよい。

I  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

(2)

(a)  $a \geq 0$  とする。  $\int_0^a (x^3 - a^2x)dx = a^q \int_0^1 (x^3 - x)dx = pa^q$  とする。

ここで  $p = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ ,  $q = \text{エ}$  である。

$a = \text{オ}$  のとき  $\left| \int_0^a x(x^2 - a^2)dx \right| = 4$  とする。

(b) 曲線  $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$  の変曲点は (, ) である。この変曲点を通って  $y = f(x)$  と 3 点で交わる直線で、その直線と曲線  $y = f(x)$  で囲まれる部分の面積が 8 となるものを考える。

3つの交点のうちで  $x$  座標が最も大きい交点の  $x$  座標は  なので、求める直線の方程式は

$$y = \frac{f(\text{ク}) - f(\text{カ})}{(\text{ク} - \text{カ})} (x - \text{カ}) + \text{キ}$$

$$= \text{ケ}x + \text{コ}$$

である。

**解答**

(a) 与式より

$$\int_0^a (x^3 - a^2x)dx = a^q \int_0^1 (x^3 - x)dx = pa^q$$

$$\iff \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^a = a^q \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = pa^q$$

$$\iff -\frac{1}{4}a^4 = -\frac{1}{4}a^q = pa^q$$

したがって、 $p = -\frac{1}{4}$ ,  $q = 4$

また、

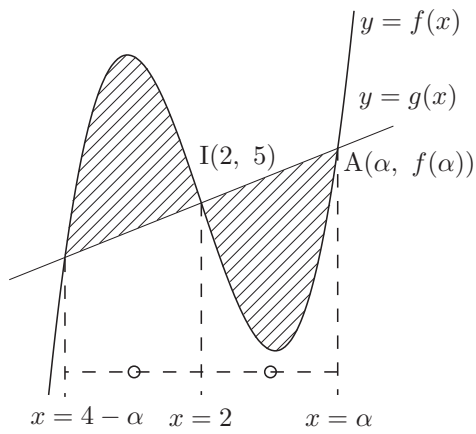
$$\left| \int_0^a x(x^2 - a^2)dx \right| = 4 \iff \left| -\frac{a^4}{4} \right| = 4 \iff \frac{a^4}{4} = 4 \iff a = 2 \quad (\because a \geq 0)$$

(b)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$  より、 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$ ,  $f''(x) = 6x - 12$

したがって、 $f''(x) = 0$  のとき  $x = 2$  であるから、求める変曲点は  $(2, f(2))$   $\therefore (2, 5)$

ここで、曲線  $y = f(x)$  の変曲点を I、題意の直線と曲線  $y = f(x)$  の 3つの交点のうちで  $x$  座標が最も大きい点を  $A(\alpha, f(\alpha))$  ( $\alpha > 2$ ) とする。一般的に 3次関数は変曲点に関して点対称であるから、線分 AI と曲線  $y = f(x)$  で囲まれた部分の面積は  $\frac{8}{2} = 4$  となるので、求める直線の方程式を  $y = g(x)$  とすると

$$\left| \int_2^\alpha \{f(x) - g(x)\}dx \right| = 4 \iff \left| \int_2^\alpha (x-2)(x-\alpha)(x-4+\alpha)dx \right| = 4$$



$x - 2 = t$  とおくと,  $dx = dt$  であり,  $x : 2 \rightarrow \alpha$  のとき  $t : 0 \rightarrow \alpha - 2$  であるので

$$\left| \int_0^{\alpha-2} t\{t - (\alpha - 2)\}\{t + (\alpha - 2)\}dt \right| = 4 \iff \left| \int_0^{\alpha-2} t\{t^2 - (\alpha - 2)^2\}dt \right| = 4$$

$\alpha - 2 > 0$  であるから, (a) において  $a$  を  $\alpha - 2$  で置き換えて,  $\alpha - 2 = 2 \iff \alpha = 4$  したがって,  $I(2, 5)$ ,  $A(4, 9)$  となるので, 求める直線 AI の方程式は

$$y = \frac{9-5}{4-2}(x-2) + 5 \iff \mathbf{y = 2x + 1}$$

(参考) (b) の解答では積分の段階で  $y = f(x)$  を  $x$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動して ( $x - 2 = t$  と置換して) 考えたが, 最初から  $y = f(x)$  を  $x$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動した曲線  $y = f(x + 2)$  を考えて面積を立式してもよい。

I  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

(3)

(a)  $2n+1$  個の整数からなるデータ,  $-n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n$  がある。このデータの分散は  $\frac{56}{3}$  であった。このとき  $n =$   ア  である。

(b) (a) の  $2n+1$  個のデータから 3 個のデータ  $a_1 < a_2 < a_3$  を選んだ。この 3 個のデータの平均値は 1, 分散は  $\frac{26}{3}$  であった。このとき  $a_3$  は  イ , または  ウ  である。ただし,  イ  <  ウ  とする。

(c) (b) の 2 組の 3 個のデータのうち,  ウ  を含む組の 3 個のデータを (a) から取り除いたとき, 残りの  $2n-2$  個のデータの平均値は  $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ , 分散  $\frac{\text{キクケコ}}{\text{サン}}$  となる。

**解答**

(a) データの平均値を  $\bar{x}$ , データの 2 乗の平均値を  $\overline{x^2}$  とすると,

$$\begin{aligned} & \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{(-n)^2 + (-n+1)^2 + \dots + 0^2 + 1^2 + \dots + n^2}{2n+1} - \left\{ \frac{(-n) + (-n+1) + \dots + 0 + 1 + \dots + n}{2n+1} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2n+1} \left( 2 \sum_{k=1}^n k^2 \right) - 0 \\ &= \frac{n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

データの分散が  $\frac{56}{3}$  であることより

$$\frac{n(n+1)}{3} = \frac{56}{3} \iff (n-7)(n+8) = 0 \iff n = 7 \quad (\because n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

(b) 条件より

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 1, \text{ かつ } \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} - 1^2 = \frac{26}{3} \\ \iff a_1 + a_2 + a_3 = 3, \text{ かつ } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 29 \end{aligned}$$

ここで, (a) より 15 個のデータは  $-7, -6, \dots, 0, 1, \dots, 7$  であるから, このうち 2 乗の和が 29 となる 3 個のデータの組み合わせは,  $(\pm 2, \pm 3, \pm 4)$ , または  $(0, \pm 2, \pm 5)$  (複号任意) となり, さらにこのうち和が 3 となる 3 個のデータの組み合わせは,  $(2, -3, 4)$ , または  $(0, -2, 5)$  となる。よって,  $a_1 < a_2 < a_3$  に注意すると, 求める 3 個のデータの組み合わせは

$$(a_1, a_2, a_3) = (-3, 2, 4), \text{ または } (-2, 0, 5)$$

であるから,  $a_3 = 4$ , または  $5$

(c) 条件より,  $(a_1, a_2, a_3) = (-2, 0, 5)$  を考える。このとき, 12 個のデータは

$$-7, -6, -5, -4, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$$

であるから、求める平均値は

$$\frac{(-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-1) + 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7}{12} = \frac{-1}{4}$$

また、求める分散は

$$\begin{aligned} & \frac{(-7)^2 + (-6)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2}{12} - \left(\frac{-1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \left[ 2 \sum_{k=1}^7 k^2 - \{(-2)^2 + 0^2 + 5^2\} \right] - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1001}{48} \end{aligned}$$

I  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

(4) 連立不等式  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  の表す領域を  $D$  とする。

(a) 点  $(x, y)$  が領域  $D$  内を動くとき、 $2x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1$  のとる値の最大値は  アイ  , 最小値は  $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$  である。

(b) 点  $(x, y)$  が領域  $D$  内を動くとき、 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y + 1$  のとる値の最大値は  カキ  , 最小値は  $\frac{\text{クケコ}}{\text{サン}}$  である。

**解答**

(a) 与式を  $x, y$  についてそれぞれ平方完成すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + (y^2 - 2y) + 1 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

したがって、 $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  より、

$$\begin{cases} \text{最大値: } \mathbf{23} & ((x, y) = (2, -2) \text{ のとき}) \\ \text{最小値: } \frac{\mathbf{-9}}{\mathbf{8}} & ((x, y) = \left(-\frac{3}{4}, 1\right) \text{ のとき}) \end{cases}$$

(参考1) (a) は  $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{9}{8} = k \iff \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{(y - 1)^2}{2} = \frac{k}{2} + \frac{9}{16}$  となるので、 $\frac{k}{2} + \frac{9}{16} \geq 0$  のとき、この楕円または点が領域  $D$  と共有点をもつように考えてもよい。(線形計画法)

(b) 与式を変形して

$$(\text{与式}) = (x - 2y)^2 + 2x + y + 1$$

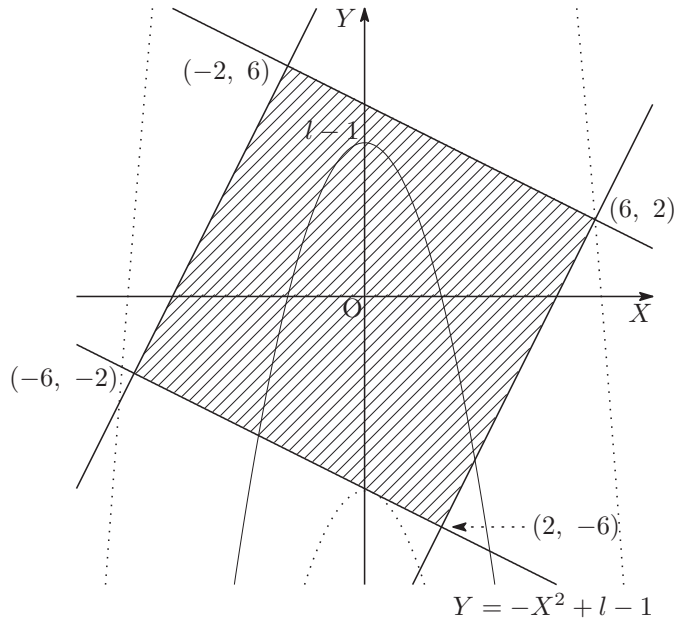
$x - 2y = X$ ,  $2x + y = Y$  とおくと、 $(\text{与式}) = X^2 + Y + 1$  であり、 $x = \frac{X + 2Y}{5}$ ,  $y = \frac{-2X + Y}{5}$  より、

$-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  に代入して、 $-\frac{X}{2} - 5 \leq Y \leq -\frac{X}{2} + 5$ ,  $2X - 10 \leq Y \leq 2X + 10$  を得る。

したがって、以下、 $X^2 + Y + 1 = l \iff Y = -X^2 + l - 1$  が、 $-\frac{X}{2} - 5 \leq Y \leq -\frac{X}{2} + 5$ ,  $2X - 10 \leq Y \leq 2X + 10$

(領域  $D'$  とする) と共有点をもつような  $l$  の値の最大、最小について考える。(線形計画法)

領域  $D'$  は下図の斜線部分(境界を含む)のようになる。



上図より、 $l$ すなわち  $Y$  切片が最大となるのは、 $Y = -X^2 + l - 1$  が点  $(6, 2)$  を通るときで、このとき、 $l = 39$  であり、また、 $(x, y) = (2, -2)$  となる。

続いて、 $l$ すなわち  $Y$  切片が最小となるのは、 $Y = -X^2 + l - 1$  と  $Y = -\frac{X}{2} - 5 \dots\dots ①$  が接するときである。これらを連立して

$$-X^2 + l - 1 = -\frac{X}{2} - 5 \iff 2X^2 - X - 2l - 8 = 0 \dots\dots ②$$

となるので、この判別式を  $D$  とすると、 $D = 0$  より

$$(-1)^2 - 4 \cdot 2(-2l - 8) = 0 \iff l = -\frac{65}{16}$$

また、このとき ①② より、 $(X, Y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{21}{4}\right)$ 、すなわち  $(x, y) = \left(-2, \frac{5}{4}\right)$  である。

よって、以上をまとめて

$$\begin{cases} \text{最大値} : 39 & ((x, y) = (2, -2) \text{ のとき}) \\ \text{最小値} : \frac{-65}{16} & ((x, y) = \left(-2, -\frac{5}{4}\right) \text{ のとき}) \end{cases}$$

(注) (b) の最大値を求めるところで、 $(X, Y) = (6, 2)$ 、 $(-6, -2)$  のどちらで  $l$  が最大になるかは微妙なので、試験ではどちらも調べて最大値を決定する。

(参考2) (b) は (a) のように独立 2 変数関数と考えて計算してもよい。

(参考3) (b) は (与式)  $= (x - 2y + 1)^2 + 5y$  と変形して  $x - 2y + 1 = X'$ 、 $5y = Y'$  とおけると、後半の計算が少なく抑えていくこともできる。



II  に適する解答をマークせよ。

(a) 1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE について考える。(下図)

対角線 AC の長さは  $\frac{\text{ア} + \sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$  である。

$\sin^2 \angle BAC = \frac{\text{エ} - \sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$  なので、この正五角形の外接円の半径を  $r$  とおくと、

$r^2 = \frac{\text{キ} + \sqrt{\text{ク}}}{\text{ケコ}}$  である。またこの正五角形の面積を  $S$  とすると、 $S^2 = \frac{\text{サシ} + \text{スセ} \sqrt{\text{ソ}}}{\text{タチ}}$

である。

(b) (a) の外接円の中心を  $O$  とおく。(a) の正五角形を底面とし、すべての辺の長さが 1 である五角錐を考える。頂

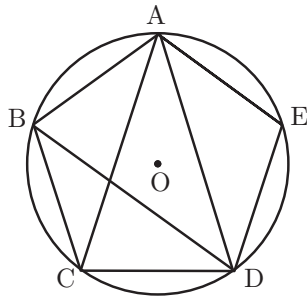
点を  $F$  とおく。この底面に対する高さを  $h$  とすると、 $h^2 = \frac{\text{ツ} - \sqrt{\text{テ}}}{\text{トナ}}$  となる。 $\angle AFO = \theta$  をおく

と、 $\sin 2\theta = \frac{\text{ニ} \sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}$  である。

(c) (b) の  $F$  を 1 辺の長さが 1 である正二十面体の頂点の 1 つとすると、点  $A, B, C, D, E$  は  $F$  と辺でつながる正二

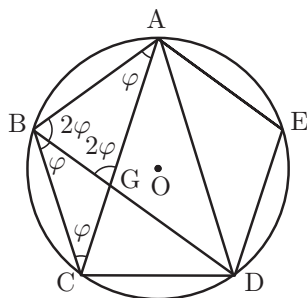
十面体上の頂点と考えることができる。この二十面体の外接球の半径を  $R$  とおくと  $R^2 = \frac{\text{ノ} + \sqrt{\text{ハ}}}{\text{ヒ}}$

である。



解答

(a)



$AC = x$  とし、直線  $AC$  と  $BD$  の交点を  $G$  とする。

上の図において、 $\triangle ABC \sim \triangle BGC$  より

$$BC : AC = GC : BC$$

$$1 : x = x - 1 : 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (> 0)$$

よって、 $AC = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

B から AC に下ろした垂線の足を H とすると、 $\angle BAC = \varphi$  として

$$\cos \varphi = \frac{AH}{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad (\because AH = \frac{1}{2} AC)$$

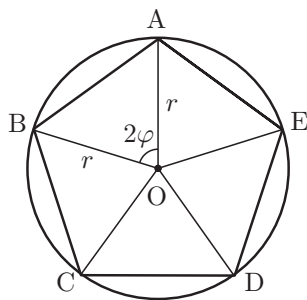
$$\sin^2 \angle BAC = \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$\triangle ABC$  に正弦定理より

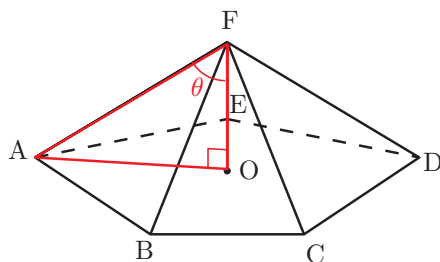
$$r = \frac{BC}{2 \sin \varphi} \quad \therefore r^2 = \frac{1}{4 \sin^2 \varphi} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$

また

$$\begin{aligned} S^2 &= \left( 5 \times \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi \right)^2 \\ &= 25 r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &= 25 \cdot \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right)^2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 \\ &= \frac{25 + 10\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$



(b)



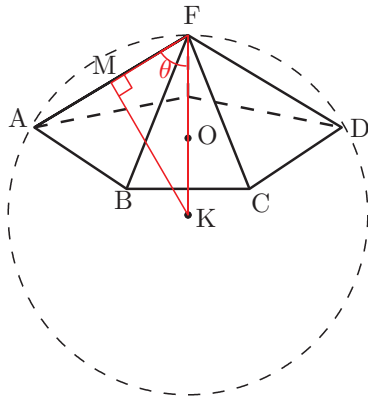
直角三角形 FOA に着目して

$$h^2 = 1^2 - r^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

$$\cos \theta = \frac{FO}{AF} = h, \quad \sin \theta = \frac{AO}{AF} = r$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2rh = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(c)



外接球の中心を  $K$ ,  $AF$  の中点を  $M$  とする。

直角三角形  $FMK$  に着目して

$$\cos \theta = \frac{FM}{FK} = \frac{\frac{1}{2}}{R}$$

$$R^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} = \frac{1}{4h^2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

(注) 外接球の半径を求める問題は、昨年度も出題されている。

III

ある素数  $p$ , および互いに異なる整数  $x, y$  に対して  $p^n$  が  $x - y$  を割り切るような整数  $n$  のうちで最大のものを  $n_p(x - y)$  と表し,

$$d_p(x, y) = p^{-n_p(x-y)}$$

と定義する。また,  $d_p(x, x) = 0$  とする。

- (1)  $d_3(945, 378)$  を求めよ。
- (2) すべての自然数  $m$  と整数  $x$  について  $d_p(mx, 0) \leq d_p(x, 0)$  が成り立つことを示せ。
- (3) すべての整数  $x, y, z$  について  $d_p(x, z) \leq d_p(x, y) + d_p(y, z)$  が成り立つことを示せ。

解答

$$d_p(x, y) = \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p(x-y)} \text{ である。} \left(0 < \frac{1}{p} < 1\right)$$

また, 異なる整数  $x, y$  に対し  $n_p(x - y) \geq 0$  である。

- (1)  $945 - 378 = 567 = 3^4 \cdot 7$  であるから,  $n_3(945 - 378) = 4$  によって,

$$d_3(945, 378) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n_3(945-378)} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

- (2)  $x = 0$  のとき, 示すべき不等式の両辺は 0 となり成立する。  
 $x \neq 0$  のとき,  $x$  が  $p^n$  で割り切れるならば  $mx$  も  $p^n$  で割り切れるので,  $n_p(x - y)$  の定義より

$$n_p(x - 0) \leq n_p(mx - 0)$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p(x-0)} &\geq \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p(mx-0)} \\ \therefore d_p(x, 0) &\geq d_p(mx, 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。

- (3)

$$d_p(x, z) \leq d_p(x, y) + d_p(y, z) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$x, y, z$  のうち少なくとも 2 つが等しいとき, ①は成り立つ。

$x, y, z$  のどの 2 つも等しくないとき,

$n_p(x - y)$  の定義から,  $a + b \neq 0$  を満たす 0 でない任意の整数  $a, b$  に対して

$$n_p((a + b) - 0) \geq \min\{n_p(a - 0), n_p(b - 0)\} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

(ただし,  $\min\{s, t\}$  は  $s, t$  のうち大きくない方を表す。)

が成り立つ（補足 1 参照）ことを用いると、

$$\begin{aligned}
 d_p(x, y) + d_p(y, z) &= \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p(x-y)} + \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p(y-z)} \\
 &\geq \left(\frac{1}{p}\right)^{\min\{n_p(x-y), n_p(y-z)\}} \\
 &\geq \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p(\{(x-y)+(y-z)\}-0)} \quad (\because \textcircled{2}) \\
 &= \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p((x-z)-0)} \\
 &= \left(\frac{1}{p}\right)^{n_p(x-z)} \\
 &= d_p(x, z)
 \end{aligned}$$

よって、 $d_p(x, z) \leq d_p(x, y) + d_p(y, z)$  が成り立つ。

(補足 1)  $n_p(a-0) = \alpha$ ,  $n_p(b-0) = \beta$  とすると

$$\begin{cases} a = p^\alpha A \\ b = p^\beta B \end{cases} \quad (A, B \text{ と } p \text{ は互いに素な整数})$$

と表せるので

$$\begin{cases} \alpha \geq \beta \text{ の場合, } (a+b)-0 = p^\beta(p^{\alpha-\beta}A+B) & \therefore n_p((a+b)-0) \geq \beta \\ \alpha \leq \beta \text{ の場合, } (a+b)-0 = p^\alpha(A+p^{\beta-\alpha}B) & \therefore n_p((a+b)-0) \geq \alpha \end{cases}$$

となるので、

いずれにしても  $n_p((a+b)-0) \geq \min\{n_p(a-0), n_p(b-0)\}$  が成り立つ。

(補足 2)  $n_p(0) = \infty$  と定義すれば、上記解答における場合分けが不要となる。

**別解**

(2)  $x = 0$  のとき、示すべき不等式の両辺は 0 となり成立する。

$x \neq 0$  のとき、

$n_p(x-0) = \alpha$ ,  $n_p(mx-0) = \beta$  とすると、 $\alpha, \beta$  は共に 0 以上の整数で、

$$\begin{cases} x = p^\alpha A \\ mx = p^{\alpha+\beta} B \end{cases} \quad (A, B \text{ は } p \text{ と互いに素な整数})$$

と表せる。よって

$$\begin{cases} d_p(x, 0) = p^{-n_p(x-0)} = p^{-\alpha} \\ d_p(mx, 0) = p^{-n_p(mx-0)} = p^{-(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

であるから

$$d_p(mx, 0) = p^{-(\alpha+\beta)} \leq p^{-\alpha} = d_p(x, 0)$$

$$\therefore d_p(mx, 0) \leq d_p(x, 0)$$

が成り立つ。

(3)  $x, y, z$  のうち少なくとも 2 つが等しいとき、示すべき不等式は成り立つ。

$x, y, z$  のどの 2 つも等しくないとき、

$n_p(x - y) = \alpha, n_p(x - y) = \beta, n_p(y - z) = \gamma$  とすると、 $\alpha, \beta, \gamma$  はすべて 0 以上の整数で

$$\begin{cases} x - z = p^\alpha A \\ x - y = p^\beta B \\ y - z = p^\gamma C \end{cases} \quad (A, B, C \text{ は } p \text{ と互いに素な整数})$$

と表せる。さらに

$$x - z = (x - y) + (y - z)$$

$$p^\alpha A = p^\beta B + p^\gamma C \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

(i)  $\beta \leq \gamma$  のとき

① より、

$$p^\alpha A = p^\beta (B + p^{\gamma-\beta} C)$$

$$\therefore \alpha \geq \beta \quad (\because (B + p^{\gamma-\beta} C) \text{ は } p \text{ の倍数となりうる})$$

であるから

$$d_p(x, z) = p^{-\alpha} \leq p^{-\beta} \leq p^{-\beta} + p^{-\gamma} = d_p(x - y) + d_p(y - z)$$

が成り立つ。

(ii)  $\beta > \gamma$  のとき

① より、

$$p^\alpha A = p^\gamma (p^{\beta-\gamma} B + C)$$

$$\therefore \alpha \geq \gamma \quad (\because (p^{\beta-\gamma} B + C) \text{ は } p \text{ の倍数となりうる})$$

であるから

$$d_p(x, z) = p^{-\alpha} \leq p^{-\gamma} \leq p^{-\beta} + p^{-\gamma} = d_p(x - y) + d_p(y - z)$$

が成り立つ。

以上 (i)(ii) より、示された。

講評

I [小問集合] ((1) 易 (2) やや易 (3) やや易 (4) 標準)

(1) は複素数平面における原点を中心とする回転移動，およびアポロニウスの円に関する問題であり，教科書内容でもありここは落とせないだろう。(2) は3次関数の変曲点に関する対称性を利用した問題で，(b) は(a)の誘導を適切に利用できるかがポイントである。(3) はデータ分析の問題で，分散の公式を利用できれば計算も早く終わられる。(4) は独立2変数に関する問題で，線形計画法などを用いればよい。全体的に取り組みやすいが小問数が多いので，途中でつまづくことなく計算を進めていきたい。

II [空間図形] (やや易)

正二十面体の外接球の半径を求める問題であるが，誘導が丁寧で非常に解きやすい。

III [整数] (やや難)

やりにくく感じるが，意味をしっかりと考えることが大事である。時間を考えれば(2)まで解ければ十分だろう。

個々の問題の難易度は例年に比べるとさほど高くはないが，量が多く，計算勝負になっただろう。どこかでつまずくと一気に崩れかねない。日頃から素早くかつ正確な計算を意識したい。分野としては数Ⅲの微積や2次曲線に関する出題が一切見られなかった。目標は65%。

**メルマガ無料登録で全教科配信！** 本解答速報の内容に関するお問合せは… YMS ☎03-3370-0410 まで

<p>医学部進学予備校 <b>メビオ</b> 受付 9~21時(土日祝可・携帯からOK) 大阪市中央区石町 2-3-12 ベルヴォア天満橋 <a href="https://www.mebio.co.jp/">https://www.mebio.co.jp/</a></p>	<p>医学部専門予備校 <b>YMS</b> heart of medicine 受付 8~20時(土日祝可) 東京都渋谷区代々木 1-37-14 <a href="https://yms.ne.jp/">https://yms.ne.jp/</a></p>	<p>医学部専門予備校 <b>英進館メビオ</b> 福岡校 受付 8~20時(土日祝可) 福岡市中央区渡辺通 4-8-20 英進館 天神本館新2号館2階 <a href="https://www.mebio-eishinkan.com/">https://www.mebio-eishinkan.com/</a></p>
---	---	--