# 解答速報

# 日本大学医学部　数学

2021年 2月8日実施

[ 1 ]

以下の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=2(\log_{16}x)^2-\log_{16}x-2$ は $x=\boxed{1}$ のとき最小値 $-\dfrac{\boxed{2}\,\boxed{3}}{\boxed{4}}$ をとる。

(2)　赤玉が 3 個，白玉が 2 個，青玉が 5 個の合計 10 個の玉が入った袋から同時に 2 個の玉をとり出す試行を 1 回だけ行う場合を考える。2 個とも青玉である確率は $\dfrac{5}{6}$ である。また，赤玉 1 個につき 100 円，白玉 1 個につき 10 円，青玉 1 個につき 50 円の賞金がもらえるとすると，同時に 2 個とり出した場合にもらえる賞金の期待値は $\boxed{7}\,\boxed{8}\,\boxed{9}$ 円である。

(3)　$a$，$b$ を実数とする。つぎの命題の真偽を順に並べた選択肢のうち正しいものは $\boxed{10}$ である。

(A)「$a$，$b$ が無理数ならば，$a^2-b^2$ は無理数である。」

(B)「$a$，$b$ が無理数ならば，$a+b$ と $ab$ の少なくとも一方は無理数である。」

(C)「$a$ が有理数，$b$ が無理数ならば，$ab$ は無理数である。」

＜解答欄＞

① (A) 真 (B) 真 (C) 真　② (A) 真 (B) 偽 (C) 真　③ (A) 真 (B) 偽 (C) 偽

④ (A) 真 (B) 真 (C) 偽　⑤ (A) 偽 (B) 真 (C) 真　⑥ (A) 偽 (B) 真 (C) 偽

⑦ (A) 偽 (B) 偽 (C) 真　⑧ (A) 偽 (B) 偽 (C) 偽

(4)　円に内接する四角形 ABCD において，AB$=3$，BC$=3$，CD$=4$，DA$=5$ を満たしている。このとき，BD$=\sqrt{\boxed{11}\,\boxed{12}}$ であり，四角形 ABCD の面積は $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{14}}\sqrt{\boxed{15}\,\boxed{16}}$ である。

解答

(1)　$\log_{16}x=X$（$X$ は任意の実数）とおくと，

$$\begin{aligned} y&=2X^2-X-2\\ &=2\left(X-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}\end{aligned}$$

よって，$X=\dfrac{1}{4} \iff x=\mathbf{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{8}}$

(2)　玉のとり出し方は ${}_{10}C_2$ 通りで同様に確からしい。

同時に青玉 2 個をとり出すとり出し方は ${}_5C_2$ 通りであるので，求める確率は $\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$

また，玉を 1 個とり出した場合にもらえる賞金の期待値は $\dfrac{3}{10}\times100+\dfrac{2}{10}\times10+\dfrac{5}{10}\times50=57$（円）であ

るので，同時に玉を 2 個とり出した場合のそれは $\mathbf{57 \times 2 = 114}$（円）である。

(3)　⑧

(A)　偽（反例：$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$）

(B)　偽（反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$）

(C)　偽（反例：$a=0$，$b=\sqrt{2}$）

(4)　$\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{BCD}=\pi-\theta$ であり，このとき，$\triangle\mathrm{BAD}$，および $\triangle\mathrm{BCD}$ において余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{3^2+5^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot3\cdot5}\ ,\quad \cos(\pi-\theta)=\frac{3^2+4^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot3\cdot4}$$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ より

$$\frac{3^2+5^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{3^2+4^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot3\cdot4}\iff \mathrm{BD}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$$

したがって，$\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ より，四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD}&=\text{三角形 ABD}+\text{三角形 BCD}\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sin(\pi-\theta)\\&=\frac{27}{2}\sin\theta\quad(\because\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta)\\&=\frac{27}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{35}}{4}}\end{aligned}$$

[ 2 ]

以下の問いに答えなさい。

(1)　数列 $\{a_n\}$ をつぎで定めるとする。

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{6a_n + 5} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

$a_n$ の一般項を求めると $a_n = \dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}^n - \boxed{19}}$ である。

(2)　関数 $y = 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x,\ (0 \leqq x \leqq \pi)$, は $x = \dfrac{\boxed{20}}{\boxed{21}}\pi$ のとき最小値 $\boxed{22} - \boxed{23}\sqrt{\boxed{24}}$ をとる。

(3)　原点 O の座標平面上において，原点以外の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ と $\mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ をとる。さらに点 $\mathrm{C}(\overrightarrow{c})$ を線分 AB が線分 OC の垂直 2 等分線になるように選ぶ。

このとき，$|\overrightarrow{a}| = 3$，$|\overrightarrow{b}| = 4$，$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ ならば，

$$\overrightarrow{c} = \frac{\boxed{25}\,\boxed{26}}{\boxed{27}\,\boxed{28}}\overrightarrow{a} + \frac{\boxed{29}\,\boxed{30}}{\boxed{31}\,\boxed{32}}\overrightarrow{b}$$

である。

(4)　関数 $y = \sqrt{2x+3}$ のグラフと関数 $y = \dfrac{1}{3}x + 1$ のグラフの共有点の個数は $\boxed{33}$ であり，共有点の座標のうち，$x$ 座標が負の座標は $\left(\boxed{34} - \boxed{35}\sqrt{\boxed{36}},\ \boxed{37} - \sqrt{\boxed{38}}\right)$ である。

解答

(1)　$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{6a_n + 5} \end{cases}$ より，帰納的に $a_n > 0$ であるから，

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 5 \cdot \frac{1}{a_n} + 6$$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = 5b_n + 6 \iff b_{n+1} + \frac{3}{2} = 5\left(b_n + \frac{3}{2}\right)$$

数列 $\left\{b_n + \dfrac{3}{2}\right\}$ は初項 $b_1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$，公比 5 の等比数列であるから，

$$b_n + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot 5^{n-1} \iff b_n = \frac{5^n - 3}{2} \iff a_n = \boldsymbol{\frac{2}{5^n - 3}}$$

(2)　与式は

$$y = 4 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$$

と変形でき，$0 \leqq x \leqq \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{9}{4}\pi$ であるから，$y$ は $2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi \iff x = \boldsymbol{\dfrac{5}{8}\pi}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}\cdot(-1) + 2 = \mathbf{2 - 2\sqrt{2}}$ をとる。

(3) 線分 AB と線分 OC の交点を H とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$（$t$ は実数）とおけるので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\
\iff &\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \\
\iff &-(1-t)|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 = 0 \quad (\because\ \vec{a} \perp \vec{b} \text{より，} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \\
\iff &t = \frac{9}{25}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\vec{c} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\frac{32}{25}\vec{a} + \frac{18}{25}\vec{b}}
$$

(4) 2 式を連立して

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2x+3} = \frac{1}{3}x + 1 \\
\iff &2x + 3 = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2, \text{ かつ } 2x + 3 \geqq 0, \text{ かつ } \frac{1}{3}x + 1 \geqq 0 \\
\iff &x^2 - 12x - 18 = 0, \text{ かつ } x \geqq -\frac{3}{2} \\
\iff &x = 6 \pm 3\sqrt{6} \quad \left(x \geqq -\frac{3}{2} \text{ を満たす}\right)
\end{aligned}
$$

したがって，$y = \sqrt{2x+3}$ と $y = \dfrac{1}{3}x + 1$ の共有点の個数は **2** 個であり，共有点のうち，$x$ 座標が負の座標は

$\left(6 - 3\sqrt{6},\ \dfrac{1}{3}(6 - 3\sqrt{6}) + 1\right) \qquad \therefore\ \mathbf{(6 - 3\sqrt{6},\ 3 - \sqrt{6})}$

[ 3 ]

関数 $f(x)=x\sin x+\cos x-1$ について以下の問いに答えなさい。

(1) $0\leqq x\leqq 2\pi$ において，関数 $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{\boxed{39}}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi-\boxed{40}}{\boxed{41}}$ をとり，$x=\dfrac{\boxed{42}}{\boxed{43}}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{\boxed{44}\pi+\boxed{45}}{\boxed{46}}$ をとる。

原点 O の座標平面上に $y=f(x)$ のグラフを考える。

(2) $y=f(x)$ が最大値をとる点を A，最小値をとる点を B で表すとき，三角形 AOB の面積を求めると $\dfrac{\boxed{47}}{\boxed{48}}\pi^2-\dfrac{\pi}{\boxed{49}}$ である。

(3) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において $f(x)=0$ となる $x$ を $\alpha$ で表すとき，

$$\sin\alpha=\frac{\boxed{50}\alpha}{\alpha^2+\boxed{51}},\quad \cos\alpha=-\boxed{52}+\frac{\boxed{53}}{\alpha^2+\boxed{54}}$$

と表せる。このとき，曲線の一部 $y=f(x)$, $(0\leqq x\leqq\alpha)$ と $x$ 軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{55}\alpha}{\alpha^2+\boxed{56}}$ である。

解答

(1) $f'(x)=x\cos x$ より，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{\pi-2}{2}$ | $\searrow$ | $-\dfrac{3\pi+2}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ |

よって

$$\begin{cases} \text{最大値} \ : \ \boldsymbol{\dfrac{\pi-2}{2}} \quad \left(x=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}\right) \\ \text{最小値} \ : \ -\boldsymbol{\dfrac{3\pi+2}{2}} \quad \left(x=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi}\right) \end{cases}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_2,\ y_2)$ とすると，求める面積は $\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ であるから

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{3\pi+2}{2}\right)-\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{\pi-2}{2}\right|=\left|-\left(\frac{3}{4}\pi^2-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi^2-\frac{\pi}{2}}$$

(3) $f(\alpha=0)$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ より

$$\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1=0 \iff \cos\alpha=1-\alpha\sin\alpha \ \cdots\cdots①$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に代入して

$$\sin^2\alpha+(1-\alpha\sin\alpha)^2=1 \iff \sin\alpha=\boldsymbol{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}} \ \cdots\cdots②$$

①より，$\cos\alpha = 1 - \alpha \cdot \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \boldsymbol{-1 + \dfrac{2}{1+\alpha^2}}$ ……③

ここで，(1) の増減表と併せて，$0 \leqq x \leqq \alpha$ において $f(x) \geqq 0$ であるので，求める面積は

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha (x\sin x + \cos x - 1)dx &= \Big[-x\cos x + 2\sin x - x\Big]_0^\alpha \\
&= -\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha - \alpha \\
&= -\alpha\left(-1 + \frac{2}{1+\alpha^2}\right) + 2\cdot\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} - \alpha \quad (\because ②③) \\
&= \boldsymbol{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}}
\end{aligned}$$

[ 4 ]

関数 $f(x)=-x^2(x-3)$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$ における $y=f(x)$ の接線を $\ell$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の極大値を与える $x$ の値および極大値を求めなさい。

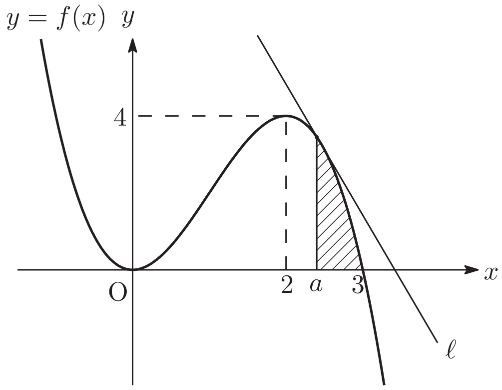
(1) の $x$ の値を $x_0$ で表すとし，以下，$x_0<a<3$ の場合を考える。

(2)　曲線の一部 $y=f(x)$，$(a\leqq x\leqq 3)$，直線 $x=a$ および $x$ 軸で囲まれる部分の面積を求めなさい。

(2) で求めた面積を $S(a)$ で表す。

(3)　$S(a)$ が $4(a-3)^2$ と等しくなるときの $a$ の値を求めなさい。また，この $a$ の値に対して直線 $\ell$ が $x$ 軸と交わる点の $x$ 座標を求めなさい。

解答




(1)

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ |

よって，極大値 **4** **($x=4$ のとき)**

(2)

$$\int_a^3 f(x)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_a^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{a^4}{4}-a^3+\frac{27}{4}}\ \ (=S(a))$$

(3)

$$S(a)=4(a-3)^2$$
$$\frac{a^4}{4}-a^3+\frac{27}{4}=4(a-3)^2$$
$$a^4-4a^3+27=16(a-3)^2$$
$$(a-3)(a^3-a^2-3a-9)=16(a-3)^2$$
$$(a-3)^2(a^2+2a+3)=16(a-3)^2$$
$$a^2+2a+3=16\ \ (\because\ \ 2<a<3)$$

$$
\begin{aligned}
&a^2+2a-13=0\\
&a=-1\pm\sqrt{14}\\
\therefore\ \ &\boldsymbol{a=-1+\sqrt{14}}\ \ (\because\ \ 2<a<3)
\end{aligned}
$$

接線 $\ell$ の方程式は

$$y=(-3a^2+6a)(x-a)-a^3+3a^2$$

であるから，$x$ 軸との交点の $x$ 座標は

$$
\begin{aligned}
&0=(-3a^2+6a)(x-a)-a^3+3a^2\\
\therefore\ \ &x=a+\frac{a^3-3a^2}{-3a^2+6a}=a+\frac{a^2-3a}{-3a+6}=\frac{-2a^2+3a}{-3a+6}
\end{aligned}
$$

であるから，$a=-1+\sqrt{14}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{-2(-1+\sqrt{14})^2+3(-1+\sqrt{14})}{-3(-1+\sqrt{14})+6}\\
&=\frac{-33+7\sqrt{14}}{9-3\sqrt{14}}\\
&=\boldsymbol{\frac{12\sqrt{14}+1}{15}}
\end{aligned}
$$

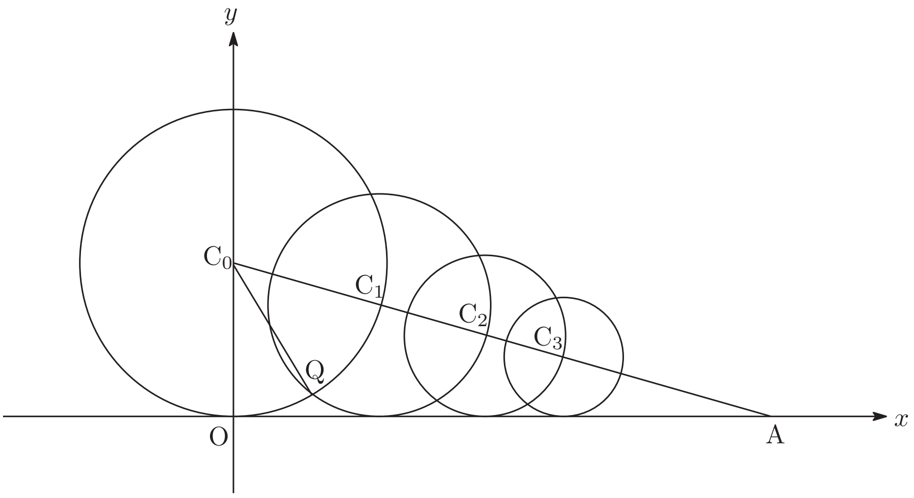
[ 5 ]

$xy$ 平面において，点 $\mathrm{C}_0(0,\ 1)$ を中心とし半径 1 の円と点 $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ がある。ただし，$\alpha > 4$ とする。$\mathrm{C}_0$ と A を線分で結び，円 $C_0$ との交点のうち $x$ 座標が大きい方を $\mathrm{C}_1$ とする。つぎに，$\mathrm{C}_1$ を中心とし $x$ 軸に接する円を描き，これを $C_1$ とする。線分 $\mathrm{C}_0\mathrm{A}$ と円 $C_1$ との交点のうち $x$ 座標が大きい方を $\mathrm{C}_2$ とし，$\mathrm{C}_2$ を中心とし $x$ 軸に接する円を描き，これを円 $C_2$ とする。以下同様にして，点 $\mathrm{C}_3,\ \mathrm{C}_4,\ \cdots\cdots$ をとり，$x$ 軸に接する円 $C_3$，円 $C_4$，$\cdots\cdots$ を描いていく。点 $\mathrm{C}_n$ を中心とする円の半径を $r_n$（$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）で表す。ただし，$r_0 = 1$ である。円 $C_0$ と円 $C_1$ の交点のうち $y$ 座標が小さい方を Q とする。いま $\angle \mathrm{QC_0C_1} = \dfrac{\pi}{4}$ であるとして，以下の問いに答えなさい。

(1)　${r_1}^2$ を求めなさい。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \pi {r_n}^2$ を求めなさい。

(3)　$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，円 $C_n$ の周および内部と円 $C_{n+1}$ の周および内部の共通部分の面積を $E_n$ で表すとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n$ を求めなさい。

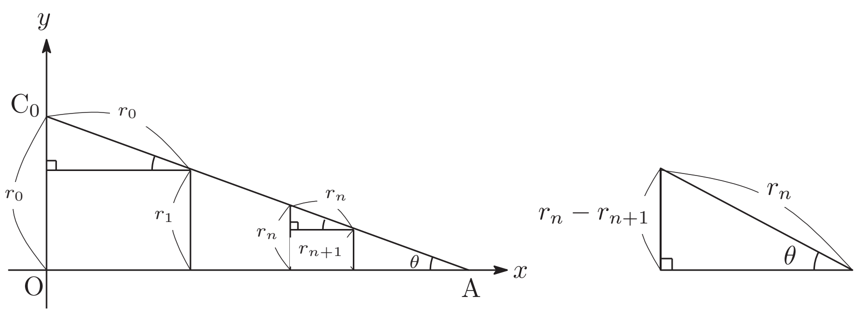



解答

(1)　$\triangle \mathrm{C_0QC_1}$ において余弦定理より

$$ {r_1}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} $$
$$ {r_1}^2 = \mathbf{2 - \sqrt{2}} $$

(2)




$\angle \mathrm{C_0AO} = \theta$ とすると，上図より

$$ \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} = \sin\theta \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) $$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=1-\sin\theta\ \cdots\cdots①$$

$$r_{n+1}{}^2=(1-\sin\theta)^2 r_n{}^2 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

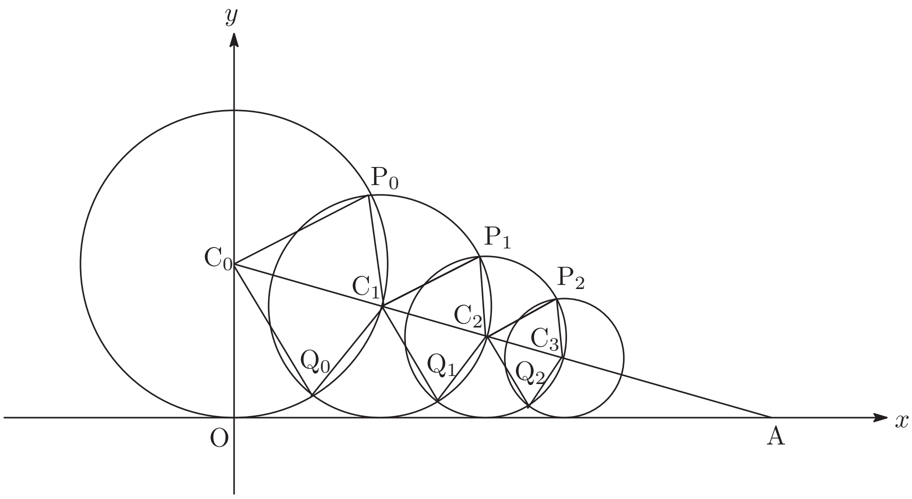
が成り立つから，数列 $\left\{r_n{}^2\right\}$ は初項 $r_0{}^2=1$ の等比数列である。

さらに (1) より $r_1{}^2=(2-\sqrt{2})r_0{}^2$ だから，公比は $(2-\sqrt{2})$ である。

したがって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\pi r_n{}^2$ は，初項 $\pi$，公比 $(2-\sqrt{2})$ の無限等比級数であるから

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\pi r_n{}^2&=\frac{\pi}{1-(2-\sqrt{2})}\quad(\because\ \ -1<2-\sqrt{2}<1)\\&=\boldsymbol{(\sqrt{2}+1)\pi}\end{aligned}$$

(3) 円 $C_n$ と円 $C_{n+1}$ の交点を $y$ 座標の大きいものから順に $\mathrm{P}_n$，$\mathrm{Q}_n$ とする。




① より，

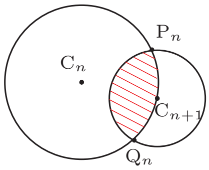
$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=1-\sin\theta\ (=一定)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

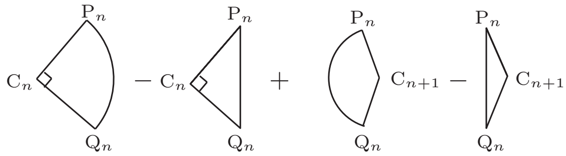
が成り立つので，二等辺三角形 $\mathrm{C}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_{n+1}$（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）はすべて相似であり，

$\angle\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}=\dfrac{\pi}{4}$ である。さらに，直線 $\mathrm{AC}_0$ に関する対称性も併せれば

$$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n\mathrm{Q}_n=\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{P}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\frac{3}{4}\pi,$$

である。

$E_n =$ 


$=$ 


$$= \frac{1}{2}{r_n}^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}{r_n}^2 + \frac{1}{2}{r_{n+1}}^2 \cdot \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}{r_{n+1}}^2 \sin\frac{3}{4}\pi$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right){r_n}^2 + \left(\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}\right){r_{n+1}}^2$$

ここで，(2) の計算より

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} {r_n}^2 = \sqrt{2}+1 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} {r_{n+1}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} {r_n}^2 - {r_0}^2 = (\sqrt{2}+1) - 1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

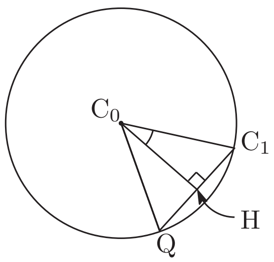
であるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} {r_n}^2 + \left(\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty} {r_{n+1}}^2$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)(\sqrt{2}+1) + \left(\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sqrt{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(5\sqrt{2}+2)\pi - 4\sqrt{2} - 8}{8}}$$

別解

(1)　点 $\mathrm{C_0}$ から $\mathrm{C_1Q}$ に下ろした垂線の足を H とすると，

H は $\mathrm{C_1Q}$ の中点であり，$\angle \mathrm{C_1C_0H} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{QC_0C_1} = \dfrac{\pi}{8}$ である。



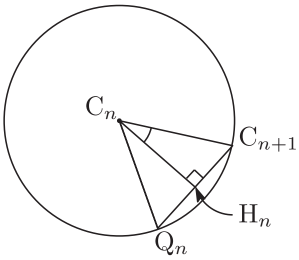

直角三角形 $\mathrm{C_0HC_1}$ に着目して

$$\frac{\mathrm{C_1H}}{\mathrm{C_0C_1}} = \sin\angle \mathrm{C_1C_0H}$$
$$\frac{\frac{r_1}{2}}{1} = \sin\frac{\pi}{8} \qquad \therefore\ r_1 = 2\sin\frac{\pi}{8}$$

であるから，

$${r_1}^2 = 4\sin^2\frac{\pi}{8} = 4\cdot\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \boldsymbol{2-\sqrt{2}}\ \cdots\cdots ②$$

(2)




解答と同様に，二等辺三角形 $C_nQ_nC_{n+1}$（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）はすべて相似であるから，
$C_n$ から $C_{n+1}Q_n$ へ引いた垂線の足を $H_n$ として

$$\frac{C_{n+1}H_n}{C_nC_{n+1}} = \sin\angle C_{n+1}C_nH_n$$

$$\frac{\frac{r_{n+1}}{2}}{r_n} = \sin\frac{\pi}{8}$$

$$r_{n+1}{}^2 = \left(4\sin^2\frac{\pi}{8}\right)r_n{}^2$$

$$\therefore\ \ r_{n+1}{}^2 = (2-\sqrt{2})r_n{}^2 \qquad (\because\ ②)$$

以下，解答と同じ。

## 講評

[ 1 ]［小問集合］((1) 易 (2) やや易 (3) 易 (4) 易 )
(1) は 2 次関数の最小値，(2) は組み合わせの確率および期待値，(3) は命題の審議，(4) は内接四角形の対角線の長さ，面積の問題である。どれも基本的な問題であるが，(2) の期待値の出題に戸惑った受験生も多かったかもしれない。

[ 2 ]［小問集合］((1) 易 (2) やや易 (3) やや易 (4) やや易 )
(1) は分数型の漸化式，(2) は半角公式利用の三角関数の最小値，(3) は法線ベクトル，(4) は無理関数の共有点に関する問題である。[ 1 ] と同じくどれも基本的な問題で，ここでの失点は痛い。

[ 3 ]［微分法］（標準）
(3) は一般角が求まらない典型問題である。受験生であれば何度も経験のある問題であり，取り組みやすかったのではないだろうか。完答を目指したい。

[ 4 ]［数Ⅱ微分法］（標準）
(3) で問題の意味を理解し，計算を工夫する必要がある。やや計算量が多いものの，問題としては平易なので，計算ミスなく進めたい。

[ 5 ]［極限 (数列)］（やや難）
(3) の計算量もそこそこ多く，最後までたどり着くのは難しい。(2)(3) は漸化式は立っても論証不十分の答案も多いのではないだろうか。(2) まで答えを出せていれば十分だろう。

昨年度よりも計算量がやや増し，全体的に計算力を問う問題であったと言える。難易度としては大きく変わらなかった。目標は 75%。