

## 日本医科大学(前期) 数学

2021年2月2日実施

[I]

3枚の硬貨 X, Y, Z を同時に投げて、表裏を調べるといふ試行 T を繰り返し行う。座標空間内の動点 P は点  $A(a, b, c)$  から出発し、硬貨の表裏に応じて、次の規則にしたがって移動する。

- [規則1] X が表の場合は  $x$  軸方向に +1, 裏の場合は  $x$  軸方向に -1 だけ平行移動する。
- [規則2] Y が表の場合は  $y$  軸方向に +1, 裏の場合は  $y$  軸方向に -1 だけ平行移動する。
- [規則3] Z が表の場合は  $z$  軸方向に +1, 裏の場合は  $z$  軸方向に -1 だけ平行移動する。

このとき、以下の各問いに答えよ。

問1 はじめに、試行 T を続けて6回行ったところ、X, Y, Z が表となった回数はそれぞれ 2, 3, 4 であり、このとき、P は原点にあったという。 $a, b, c$  の値をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問2 次に、動点 P を問1 で定まった定点 A に戻してから、試行 T を続けて5回行った。このとき、点 P が次の集合に属する確率を求めよ。答えのみでよい。ただし、有理数は既約分数で表すこと。

- (1)  $\{(x, y, z) \mid z = -1\}$
- (2)  $\{(x, y, z) \mid y \leq 4, z = -1\}$
- (3)  $\{(x, y, z) \mid x > 2, y + z = 2\}$

**解答**

問1 X, Y, Z が表となった回数はそれぞれ 2, 3, 4 であるから動点 P は定点 A から  $x$  軸方向に -2,  $y$  軸方向に 0,  $z$  軸方向に 2 だけ平行移動したこととなる。よって、 $(a-2, b, c+2) = (0, 0, 0)$  より、 $a = 2, b = 0, c = -2$

問2 硬貨 X, Y, Z が表となった回数をそれぞれ  $p, q, r$  ( $p, q, r$  は 0 以上 5 以下の整数) とすると、5 回の試行による移動は

$$\begin{aligned}
 &x \text{ 軸方向への平行移動が } 1 \cdot p + (-1) \cdot (5 - p) = 2p - 5 \dots\dots\textcircled{1} \\
 &y \text{ 軸方向への平行移動が } 1 \cdot q + (-1) \cdot (5 - q) = 2q - 5 \dots\dots\textcircled{2} \\
 &z \text{ 軸方向への平行移動が } 1 \cdot r + (-1) \cdot (5 - r) = 2r - 5 \dots\dots\textcircled{3}
 \end{aligned}$$

(1) 硬貨 X, Y は  $z$  軸方向への平行移動に影響しないので、硬貨 Z に注目する。

動点 P の  $z$  座標が -1 より求める条件は③から、 $-2 + (2r - 5) = -1 \iff r = 3$ , すなわち硬貨 Z は表が 3 回、裏が 2 回となるときであるから、求める確率は

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

(2) (1)と同様に考えて硬貨 Y, Z のみに注目する。

硬貨 Y に注目すると、動点 P の  $y$  座標が 4 以下より求める条件は②から  $0 + (2q - 5) \leq 4 \iff q \leq \frac{9}{2}$ , すなわち硬貨 Y の表の回数が 4 回以下のときであるから、5 回すべてが表である事象の余事象と考えて、 $y \leq 4$  となる確率は

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32}$$

また、硬貨 Z に注目すると、動点 P の  $z$  座標が  $-1$  となる確率は (1) から  $\frac{5}{16}$   
 $y \leq 4$  となる事象と  $z = -1$  となる事象は互いに独立であるから、求める確率は

$$\frac{31}{32} \cdot \frac{5}{16} = \frac{155}{512}$$

(3) 硬貨 X に注目すると、動点 P の  $x$  座標が 2 より大きいことより求める条件は  $2 + (2p - 5) > 2 \iff p > \frac{5}{2}$ , すなわち硬貨 X の表の回数が 3 回以上のときであるから、 $x > 2$  となる確率は

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2}$$

また、硬貨 Y, Z に注目すると、動点 P が点 A にあるときは  $y + z = -2$  であり、硬貨 Y, Z がともに表である (事象 A とする) とき  $y + z$  の値は 2 だけ増え、表と裏が 1 枚ずつである (事象 B とする) とき  $y + z$  の値は変わらず、2 回とも裏である (事象 C とする) とき  $y + z$  の値は 2 だけ減ることから、事象 A, B, C の回数を  $(A, B, C)$  と表すこととすると、 $(A, B, C) = (2, 3, 0), (3, 1, 1)$  のいずれかとなる。したがって、 $y + z = 2$  となる確率は

$$\frac{5!}{2!3!0!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5!}{3!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{128}$$

$x > 2$  となる事象と  $y + z = 2$  となる事象は互いに独立であるから、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{128} = \frac{15}{256}$$

[II]

$a$  を実数の定数とする。O を原点とする座標平面において、曲線  $C: y = |x|(6-x) + x$  と直線  $L: y = 5ax + a^4$  の共有点の個数を  $N(a)$  とおくと、以下の各問いに答えよ。

問1 直線  $L$  が原点を通るような定数  $a$  の値をすべて求めよ。答えのみでよい。

問2 曲線  $C$  上の点  $(1, 6)$  における接線の方程式を求めよ。

問3  $N(a)$  を求めよ。

解答

問1  $L: y = 5ax + a^4$  が原点を通ることより、 $0 = a^4 \iff a = 0$

問2 曲線  $C$  は

$$y = \begin{cases} -x^2 + 7x & (x > 0) \\ x^2 - 5x & (x \leq 0) \end{cases}$$

であるので、 $x > 0$  のとき  $y' = -2x + 7$  であるから、 $x = 1$  のとき  $y' = 5$  したがって、求める接線の方程式は、 $y = 5(x - 1) + 6 \iff y = 5x + 1$

問3 まず、 $C$  と  $L$  が接するときの  $a$  の値を求める。 $a^4 \geq 0$  より、 $L$  の  $y$  切片は  $0$  以上であるので、 $C$  と  $L$  は  $x > 0$  において接する。ゆえに、 $y = -x^2 + 7x$  と  $y = 5ax + a^4$  を連立して

$$-x^2 + 7x = 5ax + a^4 \iff x^2 + (5a - 7)x + a^4 = 0$$

より、判別式を  $D$  とすると

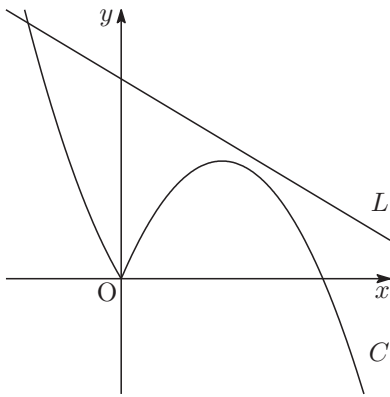
$$D = (5a - 7)^2 - 4a^4 = (5a - 7 - 2a^2)(5a - 7 + 2a^2) = -(2a^2 - 5a + 7)(2a^2 + 5a - 7)$$

したがって、 $C$  と  $L$  が接するとき  $D = 0$  より

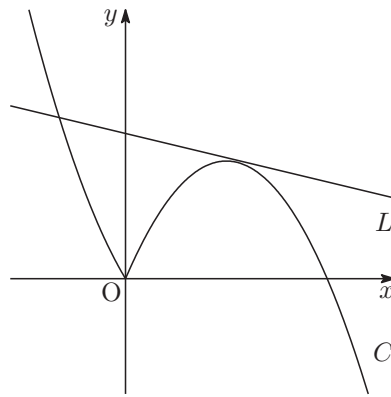
$$\begin{aligned} D = 0 &\iff 2a^2 + 5a - 7 = 0 \quad (\because 2a^2 - 5a + 7 = 2\left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} > 0) \\ &\iff (2a + 7)(a - 1) = 0 \\ &\iff a = -\frac{7}{2}, 1 \end{aligned}$$

また、 $a < -\frac{7}{2}$ 、 $1 < a$  において  $D < 0$ 、 $-\frac{7}{2} < a < 1$  において  $D > 0$  となることに注意して、 $C$  と  $L$  のグラフの位置関係は次のようになる。

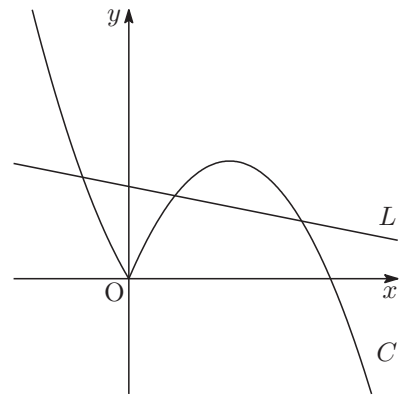
i)  $a < -\frac{7}{2}$  のとき



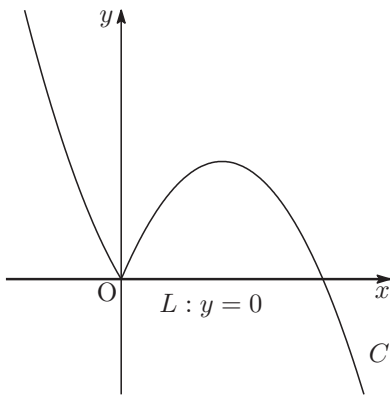
ii)  $a = -\frac{7}{2}$  のとき



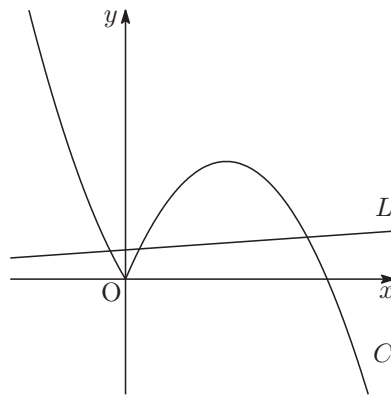
iii)  $-\frac{7}{2} < a < 0$  のとき



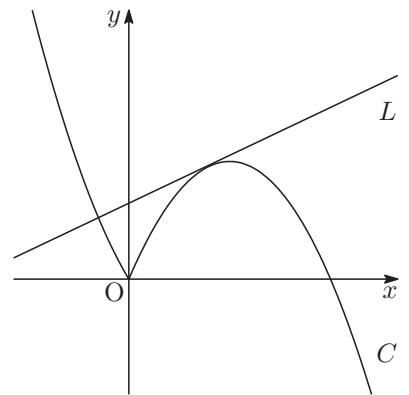
iv)  $a = 0$  のとき



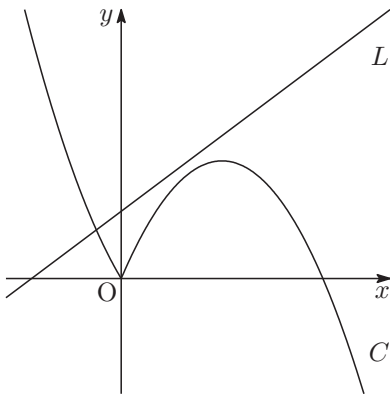
v)  $0 < a < 1$  のとき



vi)  $a = 1$  のとき



vii)  $1 < a$  のとき



よって、求める共有点の個数  $N(a)$  は

$$\begin{cases} a < -\frac{7}{2}, 1 < a \text{ のとき} & N(a) = 1 \\ a = -\frac{7}{2}, 0, 1 \text{ のとき} & N(a) = 2 \\ -\frac{7}{2} < a < 0, 0 < a < 1 \text{ のとき} & N(a) = 3 \end{cases}$$

[III]

O を原点とする座標平面における放物線  $C: y^2 = 4px$  ( $p > 0$ ) に対して、 $C$  の焦点を  $F$ 、 $C$  上の異なる 2 点  $A\left(\frac{\alpha^2}{4p}, \alpha\right)$ 、 $B\left(\frac{\beta^2}{4p}, \beta\right)$  (ただし、 $\alpha < 0 < \beta$ ) における 2 接線も交点を  $P$  とする。 $C$  と 2 直線  $AF$ 、 $BF$  で囲まれる部分の面積を  $S$ 、 $C$  と 2 直線  $AP$ 、 $BP$  で囲まれる部分の面積を  $T$  とするとき、以下の各問いに答えよ。

問 1  $S$  を  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $p$  を用いて表せ。答えのみでよい。

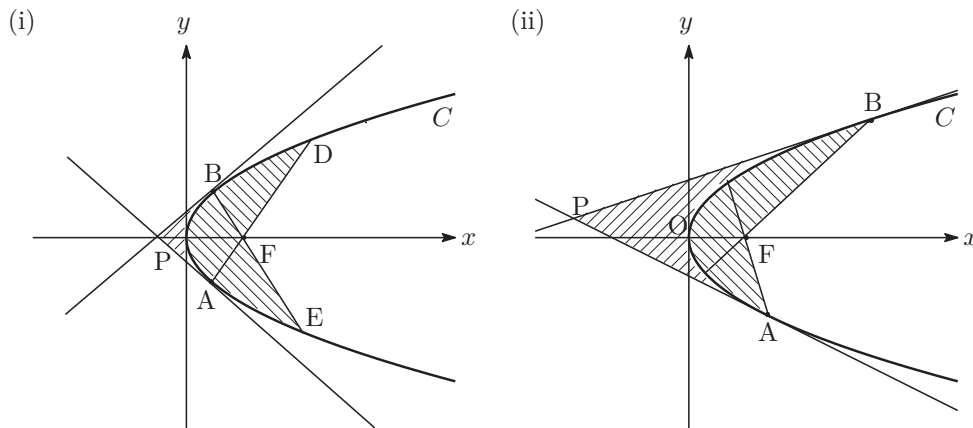
問 2  $T$  を  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $p$  を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3  $S = T$  が成り立つとき、 $-\frac{\beta}{\alpha}$  がとり得る値の範囲を求めよ。

解答

問 1 「曲線  $C$  と 2 直線  $AF$ 、 $BF$  で囲まれる部分」を

「曲線  $C$  と直線  $AF$  で囲まれる部分」と「曲線  $C$  と直線  $BF$  で囲まれる部分」の和集合と解釈する。



直線  $AB$  の方程式は

$$x = \frac{1}{4p}(\alpha + \beta)y - \frac{1}{4p}\alpha\beta$$

直線  $AB$  と  $x$  軸の交点は  $\left(-\frac{1}{4p}\alpha\beta, 0\right)$  であり、

これと焦点  $F(p, 0)$  の位置関係で場合分けする。

(i)  $-\frac{1}{4p}\alpha\beta < p \iff \alpha\beta > -4p^2$  のとき

直線  $AF$  と曲線  $C$  の交点のうち  $A$  と異なる方を  $D$  とすると、 $D$  の  $y$  座標は  $y_D = -\frac{4p^2}{\alpha}$

直線  $BF$  と曲線  $C$  の交点のうち  $A$  と異なる方を  $E$  とすると、 $E$  の  $y$  座標は  $y_E = -\frac{4p^2}{\beta}$

このとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{y_E}^{y_D} \left\{ -\frac{1}{4p}(y - y_D)(y - y_E) \right\} dy - \frac{1}{2}(y_D - y_E) \left( -\frac{4p^3}{\alpha\beta} - p \right) \\ &= -\frac{1}{4p} \cdot \left( -\frac{1}{6} \right) (y_D - y_E)^3 - \frac{1}{2}(y_D - y_E) \left( -\frac{4p^3}{\alpha\beta} - p \right) \\ &= \frac{8}{3}p^5 \frac{(\alpha - \beta)^3}{\alpha^3\beta^3} - \frac{2p^3}{\alpha^2\beta^2}(\beta - \alpha)(4p^2 + \alpha\beta) \end{aligned}$$

(ii)  $-\frac{1}{4p}\alpha\beta \geq p \iff \alpha\beta \leq -4p^2$  のとき

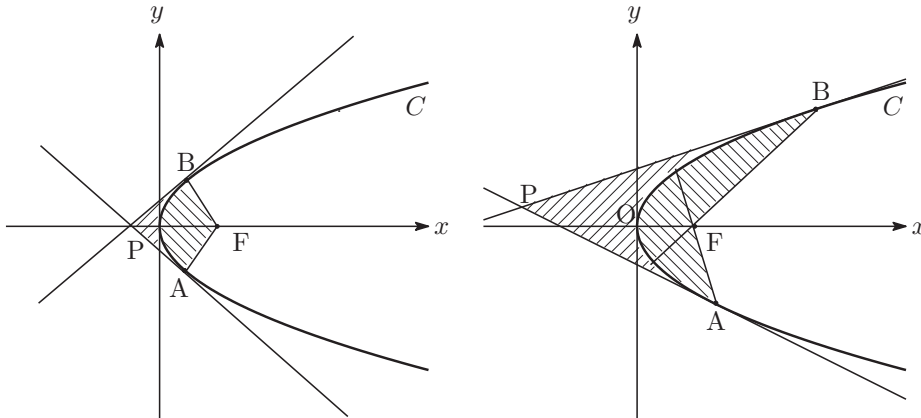
2点 A, B の  $y$  座標をそれぞれ  $y_A, y_B$  として

$$\begin{aligned} S &= \int_{y_A}^{y_B} \left\{ -\frac{1}{4p}(y - y_A)(y - y_B) \right\} dy - \frac{1}{2}(y_B - y_A) \left( -\frac{1}{4p}\alpha\beta - p \right) \\ &= -\frac{1}{4p} \cdot \left( -\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \left( \frac{1}{4p}\alpha\beta + p \right) \\ &= \frac{1}{24p}(\beta - \alpha)^3 + \frac{1}{8p}(\beta - \alpha)(\alpha\beta + 4p^2) \\ &= \frac{1}{24p}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{1}{2}p(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

(補足) 曲線  $C$  と「線分」AF, BF で囲まれた部分の面積を  $S$  とおくと  
共に

$$S = \frac{1}{24p}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{1}{2}p(\beta - \alpha)$$

と得られる。



問2 P の  $y$  座標は  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  である。

$$\begin{aligned} T &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{1}{4p}(y - \alpha)^2 dy + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{1}{4p}(y - \beta)^2 dy \\ &= \frac{1}{4p} \left[ \frac{(y - \alpha)^3}{3} \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{4p} \left[ \frac{(y - \beta)^3}{3} \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\ &= \frac{1}{48p}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

問3  $\alpha\beta > -4p^2$  のときは明らかに  $S > T$  であるから、

$\alpha\beta \leq -4p^2$  のときを考える。

$S = T$  のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{24p}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{1}{2}p(\beta - \alpha) &= \frac{1}{48p}(\beta - \alpha)^3 \\ \frac{1}{24p}(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + \frac{1}{2}p &= \frac{1}{48p}(\beta - \alpha)^2 \quad (\because \beta - \alpha \neq 0) \\ \frac{1}{24p}(x^2 - x + 1) + \frac{p}{2\alpha^2} &= \frac{1}{48p}(-x - 1)^2 \quad \left( -\frac{\beta}{\alpha} = x \text{ とおいた} \right) \end{aligned}$$

$$2(x^2 - x + 1) + \frac{24p^2}{\alpha^2} = x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{24p^2}{\alpha^2} = -x^2 + 4x - 1$$

$$\frac{24p^2}{\alpha^2} > 0 \text{ より}$$

$$x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \mathbf{2 - \sqrt{3} < -\frac{\beta}{\alpha} < 2 + \sqrt{3}}$$

[IV]

$a, b$  を正の定数とする。 $xy$  平面上の2つの曲線  $C_1: y = e^{x^2}$  ( $x > 0$ ),  $C_2: y = a \log x + b$  ( $x > 0$ ) に対して、 $C_1$  と  $C_2$  はただ一つの共有点  $(\alpha, e^{\alpha^2})$  ( $0 < \alpha < 1$ ) をもつとする。また、曲線  $C_1$ , 曲線  $C_2$ , 直線  $x = \alpha^{\frac{3}{2}}$  で囲まれた図形を  $y$  軸の周りに1回転してできる回転体の体積を  $V(\alpha)$  とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問1  $a, b$  を  $\alpha$  を用いて表せ。

問2  $V(\alpha)$  を  $\alpha$  のみを用いて表せ。

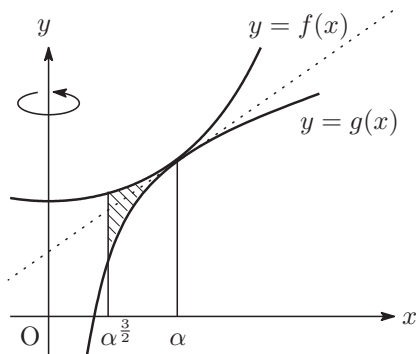
問3  $0 \leq t \leq 1$  のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{t^3}{6} \leq e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} \leq 0$$

問4 極限  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$  が存在し、かつその極限值が正となるような正の定数  $c$  の値を求めよ。また、そのときの極限値を答えよ。ただし、必要ならば  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$  であることを証明なしに用いてよい。

解答

問1



$f(x) = e^{x^2}$ ,  $g(x) = a \log x + b$  とする。

$f''(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2} > 0$  より曲線  $C_1$  は下に凸であり、

$g''(x) = -\frac{a}{x^2} < 0$  より曲線  $C_2$  は上に凸であることを踏まえると、

2曲線  $C_1$  と  $C_2$  がただ1つの共有点をもつのは、

上の図のように、共有点において2曲線の接線が一致するときである。(補足1参照)

$$f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad g'(x) = \frac{a}{x}$$

より、条件は

$$\begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} e^{\alpha^2} = a \log \alpha + b \\ 2\alpha e^{\alpha^2} = \frac{a}{\alpha} \end{cases}$$

これらより、

$$a = 2\alpha^2 e^{\alpha^2}, \quad b = e^{\alpha^2} - 2\alpha^2 e^{\alpha^2} \log \alpha$$



問2 バームクーヘン分割 (補足2参照) を用いて立式すると

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha} 2\pi x \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha} 2\pi (xe^{x^2} - ax \log x - bx) dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{4}a(2x^2 \log x - x^2) - \frac{1}{2}bx^2 \right]_{\alpha^{\frac{3}{2}}}^{\alpha} \\ &= \pi \left\{ e^{\alpha^2} - e^{\alpha^3} - \frac{1}{2}a(2\alpha^2 \log \alpha - 3\alpha^3 \log \alpha + \alpha^2 - \alpha^3) - b(\alpha^2 - \alpha^3) \right\} \end{aligned}$$

ここへ、問1の結果を代入して、整理すると

$$V(\alpha) = \pi \left\{ (1 - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \alpha^5 \log \alpha) e^{\alpha^2} - e^{\alpha^3} \right\}$$

問3  $0 \leq t \leq 1$  のとき

$$\begin{aligned} -\frac{t^3}{6} &\leq e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} \leq 0 \\ \therefore -\frac{t^3}{6}e^t &\leq 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t + \frac{t^3}{6}e^t \\ &= 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right)e^t \end{aligned}$$

とする。

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right)e^t \\ &= \frac{t^3}{6}e^t \geq 0 \end{aligned}$$

よって、 $0 \leq t \leq 1$  において  $F(t)$  は単調増加であり、 $F(0) = 0$  も合わせると  $F(t) \geq 0$  である。

$$\begin{aligned} G(t) &= 0 - \left\{ 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t \right\} \\ &= \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t - 1 \end{aligned}$$

とする。

$$\begin{aligned} G'(t) &= (-1 + t)e^t + \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t \\ &= \frac{t^2}{2}e^t \geq 0 \end{aligned}$$

よって、 $0 \leq t \leq 1$  において  $G(t)$  は単調増加であり、 $G(0) = 0$  も合わせると  $G(t) \geq 0$  である。

以上により、示された。

問4 問2より

$$V(\alpha) = \pi \left\{ (1 - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \alpha^5 \log \alpha) - e^{\alpha^3 - \alpha^2} \right\} e^{\alpha^2} \dots\dots ①$$

問3より、 $0 \leq t \leq 1$ において

$$1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

が成り立つ。 $t = \alpha^2 - \alpha^3$ とすると、( $0 < \alpha < 1$ より、 $0 < \alpha^2 - \alpha^3 < 1$ )

$$1 - (\alpha^2 - \alpha^3) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^3)^2 - \frac{1}{6}(\alpha^2 - \alpha^3)^3 \leq e^{\alpha^3 - \alpha^2} \leq 1 - (\alpha^2 - \alpha^3) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^3)^2$$

が成り立つので、①と併せて

$$\begin{aligned} & \pi \left\{ (1 - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \alpha^5 \log \alpha) - \left( 1 - (\alpha^2 - \alpha^3) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^3)^2 \right) \right\} e^{\alpha^2} \leq V(\alpha) \\ & \leq \pi \left\{ (1 - \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 - \alpha^5 + \alpha^5 \log \alpha) - \left( 1 - (\alpha^2 - \alpha^3) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha^3)^2 - \frac{1}{6}(\alpha^2 - \alpha^3)^3 \right) \right\} e^{\alpha^2} \\ & \pi \left( \frac{1}{2}\alpha^4 - \frac{1}{2}\alpha^6 + \alpha^5 \log \alpha \right) e^{\alpha^2} \leq V(\alpha) \leq \pi \left\{ \frac{1}{2}\alpha^4 - \frac{1}{2}\alpha^6 + \alpha^5 \log \alpha + \frac{1}{6}(\alpha^2 - \alpha^3)^3 \right\} e^{\alpha^2} \\ & \pi \left( \frac{\frac{1}{2}\alpha^4 - \frac{1}{2}\alpha^6 + \alpha^5 \log \alpha}{\alpha^c} \right) e^{\alpha^2} \leq \frac{V(\alpha)}{\alpha^c} \leq \pi \left\{ \frac{\frac{1}{2}\alpha^4 - \frac{1}{2}\alpha^6 + \alpha^5 \log \alpha + \frac{1}{6}\alpha^6(1 - \alpha)^3}{\alpha^c} \right\} e^{\alpha^2} \\ \therefore \pi \left( \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha \log \alpha}{\alpha^{c-4}} \right) e^{\alpha^2} \leq \frac{V(\alpha)}{\alpha^c} \leq \pi \left\{ \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha \log \alpha + \frac{1}{6}\alpha^2(1 - \alpha)^3}{\alpha^{c-4}} \right\} e^{\alpha^2} \dots\dots ② \end{aligned}$$

が成り立つ。

$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha \log \alpha = 0$ であることと併せて

$$\begin{cases} 4 < c \text{ のとき,} & \text{(②の左辺)} \rightarrow \infty \text{ より } \frac{V(\alpha)}{\alpha^c} \rightarrow \infty \quad (\alpha \rightarrow +0) \\ c = 4 \text{ のとき,} & \text{(②の左辺)} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{(②の右辺)} \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ より } \frac{V(\alpha)}{\alpha^c} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\alpha \rightarrow +0) \\ 0 < c < 4 \text{ のとき,} & \text{(②の左辺)} \rightarrow 0, \text{(②の右辺)} \rightarrow 0 \text{ より } \frac{V(\alpha)}{\alpha^c} \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow +0) \end{cases}$$

となるので、 $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{V(\alpha)}{\alpha^c}$  が存在し、かつその極限值が正となるのは、 $c = 4$ 、 $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{V(\alpha)}{\alpha^4} = \frac{\pi}{2}$

(補足1)

$C_1$  と  $C_2$  の共有点がただ1つある。

$\iff f(x) = g(x) \ (x > 0)$  の解がただ1つある。

$\iff f(x) - g(x) = 0 \ (x > 0)$  の解がただ1つある。

である。 $h(x) = f(x) - g(x) \ (x > 0)$  とする。

$$h'(x) = 2xe^{x^2} - \frac{a}{x}$$

$$h'(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2} + \frac{a}{x^2} > 0$$

より、 $h'(x)$  は単調増加であり、 $\lim_{x \rightarrow +0} h'(x) = -\infty$  と  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \infty$  をあわせると、 $h'(x) = 0$  となる  $x (> 0)$  がただ 1 つ存在し (これを  $x = \beta$  とする)、 $h(x)$  の増減は次のようになる。

$x$	(0)	...	$\beta$	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		↘		↗

さらに、 $\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = \infty$  と  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$  を併せれば、

$h(x) = 0$  となる  $x$  がただ 1 つ存在するのは  $h(\beta) = 0$  のときである。

このとき、 $\alpha = \beta$  であるから

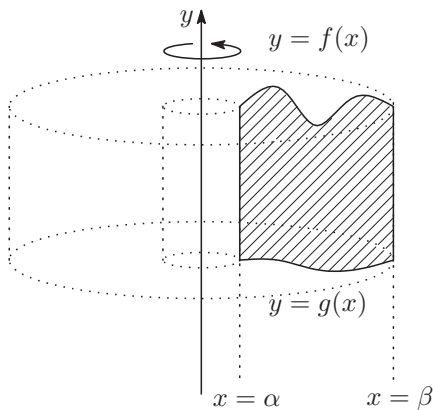
$$\begin{cases} h(\alpha) = 0 \\ h'(\alpha) = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} f(\alpha) = g(\alpha) \\ f'(\alpha) = g'(\alpha) \end{cases}$$

を満たすこととなり、解答と同様となる。

(補足 2) 問 2 の  $V(\alpha)$  の立式は次の公式を用いている (いわゆる「バウムクーヘン分割」)。

下図の斜線部分を  $y$  軸まわりに回転してできる立体の体積  $V_y$  は

$$V_y = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x |f(x) - g(x)| dx$$



(補足 3) 問 2 で  $y$  軸に垂直に細分する方法で  $V(\alpha)$  を立式すると

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \int_{\frac{3}{2}a \log \alpha + b}^{e^{\alpha^2}} \pi x^2 dy - \int_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}} \pi x^2 dy - \pi \left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left\{ e^{\alpha^3} - \left(\frac{3}{2}a \log \alpha + b\right) \right\} \\ &= \int_{\frac{3}{2}a \log \alpha + b}^{e^{\alpha^2}} \pi \left(e^{\frac{y-b}{a}}\right)^2 dy - \int_{e^{\alpha^3}}^{e^{\alpha^2}} \pi \log y dy - \pi \left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left\{ e^{\alpha^3} - \left(\frac{3}{2}a \log \alpha + b\right) \right\} \end{aligned}$$

であり、こちらを計算しても (当然ながら) 同じ結果となる。

## 講評

### [I] [確率] (やや易)

設定がしっかりと読めれば確実に点数が取れる。一次突破のためにはここは落とせない。

### [II] [2次関数, 微分法] (標準)

問1問2は教科書レベルの問題である。問3の図形的考察がやや複雑だが、完答を目指したいところ。[I][II]で時間をかけずに、[III][IV]に時間を割いていきたい。

### [III] [数II積分法の応用] (難)

問1の面積 $S$ を求める際の問題設定の解釈が難しい。とまどった受験生も多いのではないだろうか。補足も参照してほしい。問3はやや見慣れない形の存在条件を考えるさせる問題であり、完答までたどり着くのは難しいだろう。

### [IV] [積分法の応用, 極限] (やや難)

考え方は標準的であるが計算量が多く、完答は難しいだろう。特に問4は時間内での計算が厳しいので、問3まで確実に解き切れれば十分だろう。

全体的な難易度、計算量は例年と大きく変わらなかった。[I]の出題形式が昨年度から変更となったが、ほかに大きな変更点は見られなかった。[I][II]で完答を目指し、[III][IV]でとれるところで点数を稼いでいきたい。目標は55%。

**メルマガ無料登録で全教科配信!** 本解答速報の内容に関するお問合せは… YMS ☎03-3370-0410 まで

医学部進学予備校  
**メビオ**  
 受付 9~21時(土日祝可・携帯からOK)  
 大阪市中央区石町 2-3-12  
 ベルヴォア天満橋  
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校  
**YMS**  
 heart of medicine  
 受付 8~20時(土日祝可)  
 東京都渋谷区代々木  
 1-37-14  
<https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校  
**英進館メビオ**  
 福岡校  
 受付 8~20時(土日祝可)  
 福岡市中央区渡辺通 4-8-20  
 英進館 天神本館新2号館2階  
<https://www.mebio-eishinkan.com/>