解答速報

埼玉医科大学（後期）　数学

2021年 2月27日実施

$\boxed{1}$

次の文章を読み，下の問い (問 1〜4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$f(x)$ が実数を係数とする x の多項式のとき，複素数 α を方程式 $f(x)=0$ の解とすると，共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解である。

p，q を実数として，$g(x)=x^4+px^2+q$ とする。方程式 $g(x)=0$ は $x=\dfrac{1}{2}+i$ を解にもつとする。

問 1　$g(x)$ は，実数を係数とする x の多項式

$$h_1(x)=x^2-\boxed{1}\,x+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

で割り切れる。

問 2　複素数平面において，$g(x)=0$ の解を頂点とする四角形の面積は $\boxed{4}$ である。

問 3　$g(x)$ を問 1 の $h_1(x)$ で割った商 $h_2(x)$ とする。このとき，

$$\frac{4x^2-5}{g(x)}=\frac{\boxed{5}\,x-\boxed{6}}{h_1(x)}-\frac{\boxed{7}\,x+\boxed{8}}{h_2(x)}$$

が成り立つ。

問 4　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{4x^2-5}{g(x)}dx=\boxed{9}\;\boxed{10}\log\boxed{11}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　$g(x)=0$ は $\alpha=\dfrac{1}{2}+i$ を解にもつので $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{2}-i$ も解にもつから

$$\begin{aligned}h_1(x)&=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\\&=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\\&=\boldsymbol{x^2-x+\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

で割り切れる。

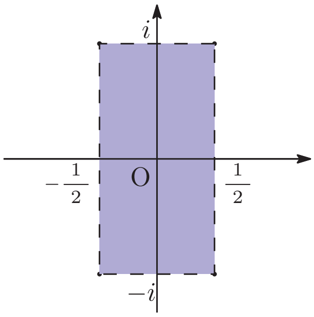
問 2　$g(x)$ を $h_1(x)$ で割ると，商 $x^2+x+p-\dfrac{1}{4}$，余り $\left(p-\dfrac{3}{2}\right)x-\dfrac{5}{4}p+q+\dfrac{5}{16}$ である。

$g(x)$ は $h_1(x)$ で割り切れるので

$$\begin{cases} p-\dfrac{3}{2}=0 \\ -\dfrac{5}{4}p+q+\dfrac{5}{16}=0 \end{cases} \qquad \therefore\ p=\frac{3}{2},\ q=\frac{25}{16}$$

したがって,

$$g(x)=0$$
$$\left(x^2-x+\frac{5}{4}\right)\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)=0$$
$$\therefore\ x=\pm\frac{1}{2}\pm i\ \text{(複号任意)}$$



よって，$g(x)=0$ の解を頂点とする四角形の面積は

$$1\times 2=\mathbf{2}$$

問 3　問 1 より，$h_2(x)=x^2+x+\dfrac{5}{4}$ である。

$a,\ b,\ c,\ d$ を実数の定数として，$\dfrac{4x^2-5}{g(x)}=\dfrac{ax+b}{h_1(x)}-\dfrac{cx+d}{h_2(x)}$ とおくと

$$\frac{4x^2-5}{g(x)}=\frac{(ax+b)h_2(x)-(cx+d)h_1(x)}{h_1(x)h_2(x)}$$
$$\frac{4x^2-5}{g(x)}=\frac{(ax+b)\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)-(cx+d)\left(x^2-x+\frac{5}{4}\right)}{g(x)}$$
$$\frac{4x^2-5}{g(x)}=\frac{(a-c)x^3+(a+b+c-d)x^2+\left(\frac{5}{4}a+b-\frac{5}{4}c+d\right)x+\frac{5}{4}b-\frac{5}{4}d}{g(x)}$$

であり，これが x の恒等式となるのは，両辺を比較して

$$\begin{cases} a-c=0 \\ a+b+c-d=4 \\ \dfrac{5}{4}a+b-\dfrac{5}{4}c+d=0 \\ \dfrac{5}{4}b-\dfrac{5}{4}d=-5 \end{cases}$$

$$\therefore\ a=4,\ b=-2,\ c=4,\ d=2$$

よって，

$$\boldsymbol{\frac{4x^2-5}{g(x)}=\frac{4x-2}{h_1(x)}-\frac{4x+2}{h_2(x)}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$h_1(x) = x^2 - x + \dfrac{5}{4}$，$h_2(x) = x^2 + x + \dfrac{5}{4}$ より

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) = 2x^2 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}(4x^2+5) \\ h_1(x) - h_2(x) = -2x \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} 4x^2 - 5 &= 8x^2 - (4x^2+5) \\ &= 4x \cdot 2x - 2 \cdot \frac{1}{2}(4x^2+5) \\ &= -4x\{h_1(x) - h_2(x)\} - 2\{h_1(x) + h_2(x)\} \\ &= h_2(x)(4x-2) - h_1(x)(4x+2) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-5}{g(x)} &= \frac{h_2(x)(4x-2) - h_1(x)(4x+2)}{h_1(x)h_2(x)} \\ &= \boldsymbol{\frac{4x-2}{h_1(x)} - \frac{4x+2}{h_2(x)}} \end{aligned}$$

問 4

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2-5}{g(x)}dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{4x-2}{h_1(x)} - \frac{4x+2}{h_2(x)} \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x-2}{x^2-x+\frac{5}{4}}dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x+2}{x^2+x+\frac{5}{4}}dx \quad \cdots\cdots ① \\ &= 2\Big[\log\left|x^2-x+\frac{5}{4}\right|\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2\Big[\log\left|x^2+x+\frac{5}{4}\right|\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\Big[\log\left|\frac{x^2-x+\frac{5}{4}}{x^2+x+\frac{5}{4}}\right|\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \boldsymbol{-4\log 2} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

次の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

斜辺 BC の長さが 1 である直角三角形 ABC がある。BC を $(2n+1)$ 等分する点を B に近い方から順に M_1，M_2，$\cdots$，M_{2n} とする。

問 1　5 等分したときは

$$\sum_{k=1}^{4} \mathrm{AM}_k{}^2 = \frac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$$

である。

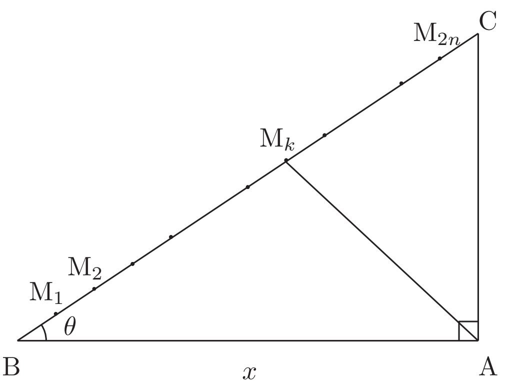
問 2　任意の自然数 n に対し，

$$\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{AM}_k{}^2 = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}} \cdot \frac{n\left(\boxed{16}\,n+1\right)}{\boxed{17}\,n+1}$$

である。

問 3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{AM}_k{}^2 = \frac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ である。

解答



図において，AB$= x$（$x>0$），$\angle\mathrm{ABC}=\theta$（$0^\circ<\theta<90^\circ$）とする。このとき，$\triangle\mathrm{ABM}_k$ において，余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}_k{}^2 &= x^2 + \left(\frac{k}{2n+1}\right)^2 - 2x\cdot\frac{k}{2n+1}\cdot\cos\theta \\ &= x^2 + \frac{k^2}{(2n+1)^2} - \frac{2x^2}{2n+1}k \quad (\because\ \cos\theta = x)\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{AM}_k{}^2 &= \sum_{k=1}^{2n}\left\{x^2 + \frac{k^2}{(2n+1)^2} - \frac{2x^2}{2n+1}k\right\} \\ &= 2nx^2 + \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2x^2}{2n+1}\cdot\frac{2n(2n+1)}{2} \\ &= \frac{n(4n+1)}{3(2n+1)} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

問 1　①において，$n=2$ として

$$\sum_{k=1}^{4} \mathrm{AM}_k{}^2 = \frac{2\cdot 9}{3\cdot 5} = \boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

問 2　①より

$$\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{AM}_k{}^2 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\cdot\frac{n(4n+1)}{2n+1}}$$

問 3　①より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{AM}_k{}^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{3\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{3}$

次の文章を読み，下の問いに (問 1〜4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。必要があれば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 2 = 0.4771$ を用いること。

A と B がさいころを交互に投げるゲームを行う。最初に A が投げるものとする。相手が直前に出した目と同じ目を出した方が負けとし，このゲームは終わる。

問 1　B がさいころを 2 回投げたところで負ける確率は

$$\frac{\boxed{20}\ \boxed{21}}{\boxed{22}\ \boxed{23}\ \boxed{24}}$$

である。

問 2　B がさいころを k 回投げたところで負ける確率は

$$\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}}\left(\frac{\boxed{27}}{\boxed{28}}\right)^{\boxed{29}\,k-\,\boxed{30}}$$

である。

問 3　B がこのゲームに負ける確率は

$$\frac{\boxed{31}}{\boxed{32}\ \boxed{33}}$$

である。

問 4　A と B が n 回ずつ投げても勝ち負けが決まらないときはゲームをやめることにする。B の負ける確率が $\dfrac{1}{2}$ を超えるのは $n \geqq \boxed{34}$ のときである。

解答

問 1　1 回目 (A) はどの目でもよく，2 回目 (B) は 1 回目 (A) と異なる目，3 回目 (A) は 2 回目 (B) と異なる目，4 回目 (B) に 3 回目 (A) と同じ目を出せばよいので

$$1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{216}}$$

問 2　$k \geqq 2$ のとき，1 回目 (A) はどの目でもよく，$2l$ 回目 (B) は $2l-1$ 回目 (A) と異なる目，$2l+1$ 回目 (A) は $2l$ 回目 (B) と異なる目（ただし，l は $k-1$ 以下の自然数)，$2k$ 回目 (B) に $2k-1$ 回目 (A) と同じ目を出せばよいので

$$1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)^{\boldsymbol{2k-2}}\quad(\text{これは } k=1 \text{ のときも成立する。})$$

問 3　問 2 の結果を用いて

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}$$

問 4　ゲームが終わる前に勝ち負けが決まるとき，B の負ける確率は問 2 の結果を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}$ である。

この確率が $\dfrac{1}{2}$ を超えるときを考えて

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}>\frac{1}{2}\\
\Longleftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}>\frac{1}{2}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^{n}}{1-\frac{25}{36}}>\frac{1}{2}\\
\Longleftrightarrow\ &\left(\frac{25}{36}\right)^{n}<\frac{1}{12}\\
\Longleftrightarrow\ &\log_{10}\left(\frac{25}{36}\right)^{n}<\log_{10}\frac{1}{12}\\
\Longleftrightarrow\ &n(\log_{10}25-\log_{10}36)<-\log_{10}12\\
\Longleftrightarrow\ &n(2-4\log_{10}2-2\log_{10}3)<-(2\log_{10}2+\log_{10}3)\\
\Longleftrightarrow\ &n>\frac{1.0790}{0.1582}(=6.82\cdots)
\end{aligned}
$$

よって，n が自然数であることより，$\boldsymbol{n\geqq 7}$

講評

$\boxed{1}$［複素数，積分法］(標準)

前半は複素数の計算と整式の割り算に関する問題で，後半は部分分数分解を用いた積分の計算問題であった。最初でつまずかなければ，あとは計算のみなので計算ミスなく取り切りたい。

$\boxed{2}$［極限］(標準)

図形絡みの極限の問題であった。マーク式なので直角三角形を直角二等辺三角形として計算したり，問 1 より問 2 を先に解くなどすれば，計算量は減らせただろう。

$\boxed{3}$［確率］(標準)

問 4 の計算量が多めであるが，問 3 までは平易なのでここまでは確実に取り切りたい。

昨年度に比べて試験時間が減ったことで，それに伴い大問数 (小問集合) が減った。各大問ごとの難易度，計算量は変化はなかった。今年度の前期が大問数が 4 つで難易度がやや易しめだったので，戸惑った受験生もいるかもしれない。$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ は差がつく問題であった。目標は 60%。