

埼玉医科大学(後期) 数学

2021年2月27日実施

1

次の文章を読み、下の問い(問1~4)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$f(x)$ が実数を係数とする x の多項式のとき、複素数 α を方程式 $f(x) = 0$ の解とすると、共役な複素数 $\bar{\alpha}$ も解である。

p, q を実数として、 $g(x) = x^4 + px^2 + q$ とする。方程式 $g(x) = 0$ は $x = \frac{1}{2} + i$ を解にもつとする。

問1 $g(x)$ は、実数を係数とする x の多項式

$$h_1(x) = x^2 - \boxed{1}x + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

で割り切れる。

問2 複素数平面において、 $g(x) = 0$ の解を頂点とする四角形の面積は $\boxed{4}$ である。

問3 $g(x)$ を問1の $h_1(x)$ で割った商 $h_2(x)$ とする。このとき、

$$\frac{4x^2 - 5}{g(x)} = \frac{\boxed{5}x - \boxed{6}}{h_1(x)} - \frac{\boxed{7}x + \boxed{8}}{h_2(x)}$$

が成り立つ。

問4 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 5}{g(x)} dx = \boxed{9} \boxed{10} \log \boxed{11}$ である。

解答

問1 $g(x) = 0$ は $\alpha = \frac{1}{2} + i$ を解にもつので $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - i$ も解にもつから

$$\begin{aligned}
 h_1(x) &= (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) \\
 &= x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \\
 &= x^2 - x + \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

で割り切れる。

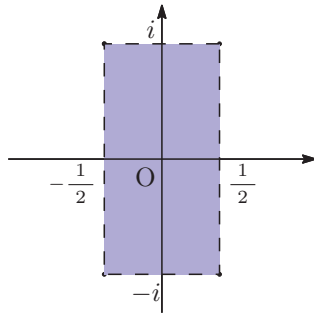
問2 $g(x)$ を $h_1(x)$ で割ると、商 $x^2 + x + p - \frac{1}{4}$ 、余り $\left(p - \frac{3}{2}\right)x - \frac{5}{4}p + q + \frac{5}{16}$ である。

$g(x)$ は $h_1(x)$ で割り切れるので

$$\begin{cases} p - \frac{3}{2} = 0 \\ -\frac{5}{4}p + q + \frac{5}{16} = 0 \end{cases} \quad \therefore p = \frac{3}{2}, q = \frac{25}{16}$$

したがって、

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \left(x^2 - x + \frac{5}{4}\right) \left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) &= 0 \\ \therefore x &= \pm \frac{1}{2} \pm i \text{ (複号任意)} \end{aligned}$$



よって、 $g(x) = 0$ の解を頂点とする四角形の面積は

$$1 \times 2 = 2$$

問3 問1より、 $h_2(x) = x^2 + x + \frac{5}{4}$ である。

a, b, c, d を実数の定数として、 $\frac{4x^2 - 5}{g(x)} = \frac{ax + b}{h_1(x)} - \frac{cx + d}{h_2(x)}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 5}{g(x)} &= \frac{(ax + b)h_2(x) - (cx + d)h_1(x)}{h_1(x)h_2(x)} \\ \frac{4x^2 - 5}{g(x)} &= \frac{(ax + b)\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) - (cx + d)\left(x^2 - x + \frac{5}{4}\right)}{g(x)} \\ \frac{4x^2 - 5}{g(x)} &= \frac{(a - c)x^3 + (a + b + c - d)x^2 + \left(\frac{5}{4}a + b - \frac{5}{4}c + d\right)x + \frac{5}{4}b - \frac{5}{4}d}{g(x)} \end{aligned}$$

であり、これが x の恒等式となるのは、両辺を比較して

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ a + b + c - d = 4 \\ \frac{5}{4}a + b - \frac{5}{4}c + d = 0 \\ \frac{5}{4}b - \frac{5}{4}d = -5 \end{cases}$$

$$\therefore a = 4, b = -2, c = 4, d = 2$$

よって、

$$\frac{4x^2 - 5}{g(x)} = \frac{4x - 2}{h_1(x)} - \frac{4x + 2}{h_2(x)}$$

別解

$$h_1(x) = x^2 - x + \frac{5}{4}, \quad h_2(x) = x^2 + x + \frac{5}{4} \text{ より}$$

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) = 2x^2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(4x^2 + 5) \\ h_1(x) - h_2(x) = -2x \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} 4x^2 - 5 &= 8x^2 - (4x^2 + 5) \\ &= 4x \cdot 2x - 2 \cdot \frac{1}{2}(4x^2 + 5) \\ &= -4x\{h_1(x) - h_2(x)\} - 2\{h_1(x) + h_2(x)\} \\ &= h_2(x)(4x - 2) - h_1(x)(4x + 2) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 5}{g(x)} &= \frac{h_2(x)(4x - 2) - h_1(x)(4x + 2)}{h_1(x)h_2(x)} \\ &= \frac{4x - 2}{h_1(x)} - \frac{4x + 2}{h_2(x)} \end{aligned}$$

問 4

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 5}{g(x)} dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{4x - 2}{h_1(x)} - \frac{4x + 2}{h_2(x)} \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x - 2}{x^2 - x + \frac{5}{4}} dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x + 2}{x^2 + x + \frac{5}{4}} dx \dots\dots \textcircled{1} \\ &= 2 \left[\log \left| x^2 - x + \frac{5}{4} \right| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2 \left[\log \left| x^2 + x + \frac{5}{4} \right| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left[\log \left| \frac{x^2 - x + \frac{5}{4}}{x^2 + x + \frac{5}{4}} \right| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= -4 \log 2 \end{aligned}$$

2

次の文章を読み、下の問い(問1~3)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

斜辺 BC の長さが 1 である直角三角形 ABC がある。BC を $(2n + 1)$ 等分する点を B に近い方から順に M_1, M_2, \dots, M_{2n} とする。

問1 5等分したときは

$$\sum_{k=1}^4 AM_k^2 = \frac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$$

である。

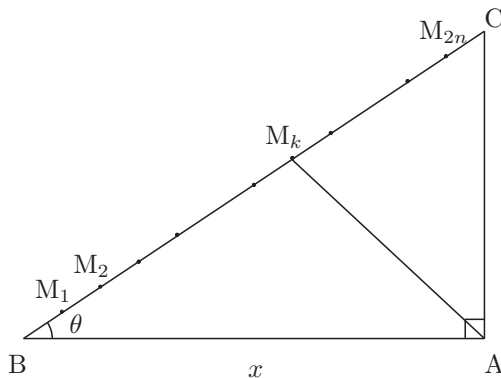
問2 任意の自然数 n に対し、

$$\sum_{k=1}^{2n} AM_k^2 = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}} \cdot \frac{n(\boxed{16}n + 1)}{\boxed{17}n + 1}$$

である。

問3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} AM_k^2 = \frac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ である。

解答



図において、 $AB = x$ ($x > 0$)、 $\angle ABC = \theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とする。このとき、 $\triangle ABM_k$ において、余弦定理より

$$\begin{aligned} AM_k^2 &= x^2 + \left(\frac{k}{2n+1}\right)^2 - 2x \cdot \frac{k}{2n+1} \cdot \cos \theta \\ &= x^2 + \frac{k^2}{(2n+1)^2} - \frac{2x^2}{2n+1} k \quad (\because \cos \theta = x) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} AM_k^2 &= \sum_{k=1}^{2n} \left\{ x^2 + \frac{k^2}{(2n+1)^2} - \frac{2x^2}{2n+1} k \right\} \\ &= 2nx^2 + \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2x^2}{2n+1} \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} \\ &= \frac{n(4n+1)}{3(2n+1)} \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

問1 ①において、 $n = 2$ として

$$\sum_{k=1}^4 AM_k^2 = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{6}{5}$$

問2 ①より

$$\sum_{k=1}^{2n} AM_k^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{n(4n+1)}{2n+1}$$

問3 ①より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} AM_k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{3(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{3(2 + \frac{1}{n})} = \frac{2}{3}$$

3

次の文章を読み、下の問いに (問 1~4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。必要があれば、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いること。

A と B がさいころを交互に投げるゲームを行う。最初に A が投げるものとする。相手が直前に出した目と同じ目を出した方が負けとし、このゲームは終わる。

問 1 B がさいころを 2 回投げたところで負ける確率は

$$\frac{\boxed{20} \boxed{21}}{\boxed{22} \boxed{23} \boxed{24}}$$

である。

問 2 B がさいころを k 回投げたところで負ける確率は

$$\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}} \left(\frac{\boxed{27}}{\boxed{28}} \right)^{\boxed{29}^{k-1} \boxed{30}}$$

である。

問 3 B がこのゲームに負ける確率は

$$\frac{\boxed{31}}{\boxed{32} \boxed{33}}$$

である。

問 4 A と B が n 回ずつ投げても勝ち負けが決まらないときはゲームをやめることにする。B の負ける確率が $\frac{1}{2}$ を超えるのは $n \geq \boxed{34}$ のときである。

解答

問 1 1 回目 (A) はどの目でもよく、2 回目 (B) は 1 回目 (A) と異なる目、3 回目 (A) は 2 回目 (B) と異なる目、4 回目 (B) に 3 回目 (A) と同じ目を出せばよいので

$$1 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

問 2 $k \geq 2$ のとき、1 回目 (A) はどの目でもよく、 $2l$ 回目 (B) は $2l-1$ 回目 (A) と異なる目、 $2l+1$ 回目 (A) は $2l$ 回目 (B) と異なる目 (ただし、 l は $k-1$ 以下の自然数)、 $2k$ 回目 (B) に $2k-1$ 回目 (A) と同じ目を出せばよいので

$$1 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{2k-2} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{2k-2} \quad (\text{これは } k=1 \text{ のときも成立する。})$$

問 3 問 2 の結果を用いて

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{2k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36} \right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

問4 ゲームが終わる前に勝ち負けが決まるとき、Bの負ける確率は問2の結果を用いて $\sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2}$ である。

この確率が $\frac{1}{2}$ を超えるときを考えて

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2} > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n}{1 - \frac{25}{36}} > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{25}{36}\right)^n < \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow & \log_{10} \left(\frac{25}{36}\right)^n < \log_{10} \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow & n(\log_{10} 25 - \log_{10} 36) < -\log_{10} 12 \\ \Leftrightarrow & n(2 - 4\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3) < -(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ \Leftrightarrow & n > \frac{1.0790}{0.1582} (= 6.82 \dots) \end{aligned}$$

よって、 n が自然数であることより、 $n \geq 7$

講評

1 [複素数, 積分法] (標準)

前半は複素数の計算と整式の割り算に関する問題で、後半は部分分数分解を用いた積分の計算問題であった。最初でつまづかなければ、あとは計算のみなので計算ミスなく取り切りたい。

2 [極限] (標準)

図形絡みの極限の問題であった。マーク式なので直角三角形を直角二等辺三角形として計算したり、問1より問2を先に解くなどすれば、計算量は減らせただろう。

3 [確率] (標準)

問4の計算量が多めであるが、問3までは平易なのでここまでは確実に取り切りたい。

昨年度に比べて試験時間が減ったことで、それに伴い大問数(小問集合)が減った。各大問ごとの難易度、計算量は変化はなかった。今年度の前期が大問数が4つで難易度がやや易しめだったので、戸惑った受験生もいるかもしれない。**1**、**2**は差がつく問題であった。目標は60%。

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せは… YMS ☎03-3370-0410 まで

医学部進学予備校
メビオ
受付 9~21時(土日祝可・携帯からOK)
大阪市中央区石町 2-3-12
ベルヴォア天満橋
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
YMS
heart of medicine
受付 8~20時(土日祝可)
東京都渋谷区代々木
1-37-14
<https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ
福岡校
受付 8~20時(土日祝可)
福岡市中央区渡辺通 4-8-20
英進館 天神本館新2号館2階
<https://www.mebio-eishinkan.com/>