# 解答速報

# 東京医科大学　数学

2021年 2月6日実施

第1問

(1)　正の整数 $m$ と $n$ について等式 $\dfrac{2}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$ が成立するとき，$m =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　すべての面が四角形となっている凸多面体 $\mathbf{P}$ について考える。凸多面体 $\mathbf{P}$ の面の数が 29 のとき，$\mathbf{P}$ の辺の数は $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，$\mathbf{P}$ の頂点の数は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(3)　文字 $x$ についての多項式 $A$ は $x^3 - 2x^2 + 3$ で割ると $4x^2 + 5x + 33$ 余る。このとき $A$ を $x^2 - 3x + 3$ で割った余りは $\boxed{\text{キク}}\,x + \boxed{\text{ケコ}}$ である。

(4)　整数 $n$ は 9 で割ると 4 余り，11 で割ると 7 余る。このとき，$n$ を 99 で割った余りは $\boxed{\text{サシ}}$ である。

(5)　関数 $f(x) = -|x|^{\sqrt{6}}$ の $x = \sqrt{6} \cdot f(\sqrt{6})$ における微分係数は

$$f'\left(\sqrt{6} \cdot f(\sqrt{6})\right) = \boxed{\text{スセソ}}$$

である。

解答

(1)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{12+2\sqrt{7\times5}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{14} - \sqrt{10} \end{aligned}$$

であるから，$m = \mathbf{14}$

(2)　立体 $\mathbf{P}$ の頂点の数，辺の数をそれぞれ $v$，$e$ とすると，
オイラーの多面体定理より

$$v - e + 29 = 2 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。さらに各面は四角形であり，1 つの辺に集まる面の数は 2 つであるから，

$$e = \frac{4 \times 29}{2} = \mathbf{58}$$

①に代入して，$\mathbf{P}$ の頂点の数 $v$ は

$$v - 58 + 29 = 2$$
$$\therefore\ v = \mathbf{31}$$

(3)　$A$ を $x^3 - 2x^2 + 3$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$\begin{aligned} A &= (x^3 - 2x^2 + 3)Q(x) + 4x^2 + 5x + 33 \\ &= (x+1)(x^2 - 3x + 3)Q(x) + 4(x^2 - 3x + 3) + 17x + 21 \\ &= (x^2 - 3x + 3)\{(x+1)Q(x) + 4\} + 17x + 21 \end{aligned}$$

であるから，$A$ を $x^2 - 3x + 3$ で割ったときの余りは $\boldsymbol{17x + 21}$

(4)　条件より，

$$n = 9x + 4 = 11x + 7\ \cdots\cdots ①\ (x,\ y\ \text{は整数})$$
$$9x - 11y = 3\ \cdots\cdots ②$$

であり，

$$9 \cdot 4 - 11 \cdot 3 = 3\ \cdots\cdots ③$$

であるから，② − ③ より

$$9(x-4) - 11(y-3) = 0$$
$$\therefore\ 9(x-4) = 11(y-3)\ \cdots\cdots ④$$

9 と 11 は互いに素であるから，④ を満たす整数 $x$，$y$ は

$$\begin{cases} x = 11k + 4 \\ y = 9k + 3 \end{cases} \quad (k\ \text{は整数})$$

である。これを①に代入して

$$n = 99x + 40$$

よって，$n$ を 99 で割った余りは **40**

(補足)　実践的には，99 までの自然数で 9 で割ると 4 余る自然数は 4, 13, 22, 31, 40, $\cdots$ であり，
このうち，11 で割ると 7 余るものは 40 とするのが早いかもしれない。

(5)　$f(x) = -|x|^{\sqrt{6}}$ より

$$f(\sqrt{6}) = -\sqrt{6}^{\sqrt{6}}$$
$$\sqrt{6} \cdot f(\sqrt{6}) = -\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}^{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}^{\sqrt{6}+1}\ (< 0)$$

$x<0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -(-x)^{\sqrt{6}} \\ f'(x) &= -\sqrt{6}(-x)^{\sqrt{6}-1}\cdot(-1) = \sqrt{6}(-x)^{\sqrt{6}-1} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'\left(\sqrt{6}\cdot f(\sqrt{6})\right) &= \sqrt{6}\left(\sqrt{6}^{\sqrt{6}+1}\right)^{\sqrt{6}-1} \\ &= \sqrt{6}\cdot\sqrt{6}^{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} \\ &= \sqrt{6}\cdot\sqrt{6}^{5} \\ &= \mathbf{216} \end{aligned}$$

## 第 2 問

関数 $f(x)=3\cos\dfrac{x}{9}+4\sin\dfrac{x}{12}$ について考える。関数 $3\cos\dfrac{x}{9}$ のすべての正の周期からなる集合を $A$ とする。すなわち

$$A=\left\{p \mid p>0 \text{ かつすべての実数 } x \text{ について } 3\cos\frac{x+p}{9}=3\cos\frac{x}{9}\right\}$$

とする。同様に，関数 $4\sin\dfrac{x}{12}$ のすべての正の周期からなる集合を $B$ とし，$f(x)$ のすべての正の周期からなる集合を $C$ とする。

集合 $A$ の要素のうち最小の要素は $\boxed{\text{アイ}}\pi$ である。また，集合 $A\cap B$ の要素のうち最小の要素を $p_0$ とすると $p_0=\boxed{\text{ウエ}}\pi$ である。

集合 $A\cap B$ の要素 $p$ については，すべての実数 $x$ について

$$3\cos\frac{x+p}{9}=3\cos\frac{x}{9} \text{ かつ } 4\sin\frac{x+p}{12}=4\sin\frac{x}{12}$$

が成立するので，すべての実数 $x$ について

$$f(x+p)=3\cos\frac{x+p}{9}+4\sin\frac{x+p}{12}=3\cos\frac{x}{9}+4\sin\frac{x}{12}=f(x)$$

が成立し，$p\in C$ となる。したがって，$A\cap B\ \boxed{(\text{あ})}\ C$ が示された。

関数 $f(x)$ の最大値 $M$ とすると $M=\boxed{\text{オ}}$ であり，$f(x)=M$ となる最小の正の実数 $x$ を $c$ とすると $c=\boxed{\text{カキ}}\pi$ である。また $f(a)=M$ となる実数 $a$ に対して整数 $k$ があり $a=c+kp_0$ となるので $A\cap B=C$ が成立する。

(問)　次の⓪〜⑨ の記号のうち，上記の空欄 $\boxed{(\text{あ})}$ に当てはまる最も適当な記号は $\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ $\cap$　① $\cup$　② $\leqq$　③ $\geqq$　④ $\in$
⑤ $\ni$　⑥ $\subset$　⑦ $\supset$　⑧ $\Rightarrow$　⑨ $\perp$

**解答**

関数 $3\cos\dfrac{x}{9}$ の正の周期は $9\cdot 2l\pi$ ($l$ は自然数) であるから，

$$A=\{18l\pi \mid l \text{ は自然数 }\}$$

よって $A$ の要素のうち最小のものは $\boldsymbol{18\pi}\cdots$(アイ)
同様に

$$B=\{24m\pi \mid m \text{ は自然数 }\}$$

である。18 と 24 の最小公倍数は 72 であるから

$$A\cap B=\{72n\pi \mid n \text{ は自然数 }\}$$

である。よって，$A\cap B$ の要素のうち最小の要素 $p_0$ は

$$p_0=\boldsymbol{72}\pi\ \cdots(\text{ウエ})$$

である。
問題文 8 行目から 11 行目までにより

$$p\in A\cap B \text{ ならば } p\in C$$

が導かれたので，

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$ が示された。(6 $\cdots$(あ))

$f(x) = 3\cos\dfrac{x}{9} + 4\sin\dfrac{x}{12}$ の最大値を $M$ とする。

$$3\cos\frac{x}{9} \leqq 3 \text{ かつ } 4\sin\frac{x}{12} \leqq 4 \text{ より}$$
$$f(x) \leqq 3 + 4 = 7$$

が成り立つ。さらに，この不等式の等号は

$$\frac{x}{9} = 2M\pi \text{ かつ } \frac{x}{12} = \frac{\pi}{2} + 2N\pi\text{（}M,\ N \text{ は整数）}$$
$$x = 18M\pi \text{ かつ } x = 6(4N+1)\pi\text{（}M,\ N \text{ は整数）}$$
$$\therefore\ x = 54\pi + 72k\pi\text{（}k \text{ は整数）}\cdots\cdots①$$

のときに成立する。

よって，$f(x)$ の最大値 $M$ は $M = \mathbf{7}$ $\cdots$(オ) であり，

$f(x) = M$ となる $x$ のうち最小の正の実数 $c$ は $c = \boldsymbol{54\pi}\cdots$(カキ)（$\because$ ①）

## 第 3 問

平面上に三点 O，A，B があり
$$\mathrm{OA}=7,\ \mathrm{OB}=8,\ \mathrm{AB}=9$$
となっている。

正の実数 $t$ に対して動点 P を
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
となる点とし，点 P から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を Q とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) 線分 OP の長さの最小値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(3) 線分 OQ の長さの最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) AB$=9$ より
$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=9^2\\
\iff &|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=81\\
\iff &|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=81\\
\iff &\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\mathbf{16}
\end{aligned}
$$

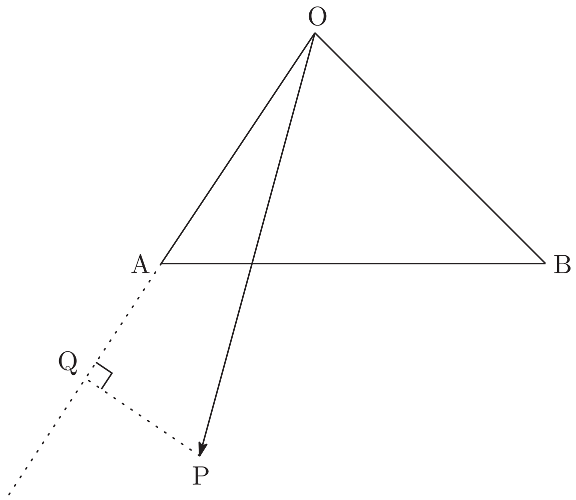
(2) (1) の結果を併せて
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=t^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{t^2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=49t^2+\frac{64}{t^2}+32$$

$t>0$ より，相加平均・相乗平均の関係を用いて
$$49t^2+\frac{64}{t^2}+32\geqq 2\sqrt{49t^2\cdot\frac{t^2}{64}}+32=144$$

ただし，等号は $49^2=\dfrac{64}{t^2}\iff t=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}\quad(\because t>0)$ のとき成立する。

よって，求める最小値は，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|>0$ より
$$\sqrt{144}=\mathbf{12}\quad\left(t=\frac{2\sqrt{14}}{7}\right)$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上への正射影ベクトルであるから
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$




したがって，(1) の結果も併せて

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \\ &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} \\ &= \frac{t|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7} \\ &= \frac{1}{7}(49t+\frac{16}{t}) \quad (\because t>0)\end{aligned}$$

$t>0$ より，相加平均・相乗平均の関係を用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \geqq \frac{1}{7}\cdot 2\sqrt{49t\cdot\frac{16}{t}} = 8$$

等号は $49t=\dfrac{16}{t} \iff t=\dfrac{4}{7}$ $(\because t>0)$ のとき成立する。
よって，求める最小値は

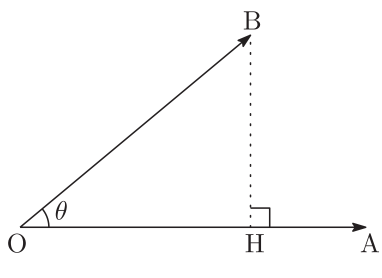
$$\mathbf{8} \quad \left(t=\frac{4}{7}\right)$$

(補足)　正射影ベクトル

下図の 3 点 O，A，B について，点 A から下ろした直線 OB 上に下ろした垂線の足を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上への正射影ベクトルと言い，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と書ける。($\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が逆向きのときも成立する。)



なお，次のように証明できる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\\ &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\quad (\because\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)\\ &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$

点 Q は直線 OA 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$k$ は実数）と書ける。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，(1) の結果も併せて

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0\\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0\\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left\{(k-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}=0\\ \iff &(k-t)\cdot 49-\frac{1}{t}\cdot 16=0\\ \iff &k=t+\frac{16}{49t}\end{aligned}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t+\dfrac{16}{49t}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるので

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\left|t+\frac{16}{49t}\right||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=7\left(t+\frac{16}{49t}\right)$$

$t>0$ より，相加平均・相乗平均の関係を用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\geqq 7\cdot 2\sqrt{t\cdot\frac{16}{49t}}=8$$

等号は $t=\dfrac{16}{49t}\iff t=\dfrac{4}{7}\quad(\because\ t>0)$ のとき成立する。
よって，求める最小値は

$$\mathbf{8}\ \left(t=\frac{4}{7}\right)$$

## 第 4 問

四次方程式

$$x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 11x + 1 = 0 \ \cdots\cdots (*)$$

について考える。$x = 0$ は解ではないので，解 $x$ に対して $y = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと等式

$$y^2 + \boxed{\text{アイ}}\, y + \boxed{\text{ウエ}} = 0$$

が成立する。

四次方程式 $(*)$ の四つの解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$ とすると

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \boxed{\text{オカキ}}$$

であり

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \boxed{\text{クケ}}$$

であり

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = \boxed{\text{コサシス}}$$

である。

**解答**

$x^2 \fallingdotseq\!\!\!\!/\; 0$ より，$x^2$ で $(*)$ の左辺を割って

$$x^2 + 11x + 31 + \frac{11}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 29 = 0$$

よって，$\boldsymbol{y^2 + 11y + 29 = 0}$ $\cdots\cdots$①

ここで，$(*)$ の左辺は $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$ と因数分解できるから，$x^3$ の係数を比較して

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -11 \ \cdots\cdots ②$$

また，① の 2 解を $p$，$q$ とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases} p + q &= -11 \\ pq &= 29 \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで，$p = x + \dfrac{1}{x}$ の 2 解を $\alpha$，$\beta$，$q = x + \dfrac{1}{x}$ の 2 解を $\gamma$，$\delta$ としても一般性を失わない。このとき，

$$\begin{cases} p &= \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \beta + \dfrac{1}{\beta} \\ q &= \gamma + \dfrac{1}{\gamma} = \gamma + \dfrac{1}{\gamma} \end{cases}$$

が成立するので

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} &= (p - \alpha) + (p - \beta) + (q - \gamma) + (q - \delta) \\ &= 2(p + q) - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ &= 2 \cdot (-11) - (-11) \quad (\because ②③) \\ &= \boldsymbol{-11} \end{aligned}$$

$p=x+\dfrac{1}{x} \iff x^2-px+1=0$ の 2 解が $\alpha$，$\beta$，$q=x+\dfrac{1}{x} \iff x^2-qx+1=0$ の 2 解が $\gamma$，$\delta$ であることから，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= p \\ \quad \alpha\beta &= 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} \gamma+\delta &= q \\ \quad \gamma\delta &= 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ。よって，

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta \\ &= p^2-2\cdot 1+q^2-2\cdot 1 \quad (\because ④) \\ &= (p+q)^2-2pq-4 \\ &= (-11)^2-2\cdot 29-4 \quad (\because ③) \\ &= \mathbf{59} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta) \\ &= p^3+q^3-3(p+q) \quad (\because ④) \\ &= (p+q)^3-3pq(p+q)-3(p+q) \\ &= (p+q)\{(p+q)^2-3pq-3\} \\ &= -11\cdot\{(-11)^2-3\cdot 29-3\} \quad (\because ③) \\ &= \mathbf{-341} \end{aligned}$$

## 講評

第 **1** 問［小問集合］((1) 易 (2) 易 (3) 易 (4) やや易 (5) 標準 )

昨年度と比べて全体的に易しめの小問集合であった。(1) は二重根号を外し，有理化する。(2) はオイラーの多面体定理を覚えていれば問題ないだろう。(3) は整式の割り算の基本問題である。(4) はどの問題集でも見かける問題で経験があれば難なく解けるだろう。(5) は見た目はやりにくそうだが，丁寧に微分係数を計算すればよい。

第 **2** 問［三角関数，集合］（やや難）

一見やりにくそうな問題であったが，三角関数の基本周期を問う問題である。場合によっては後半は後回しでよい。

第 **3** 問［平面ベクトル］（やや易）

ベクトルの内積に関する出題である。丁寧に計算を進めていけばよい。

第 **4** 問［高次方程式］（標準）

相反方程式に関する式の値の出題である。解と係数の関係を用いて計算していけばよい。

例年に比べ全体的に易しくなり，昨年度のような難易度の高い問題も見られなかった。目標は 70%。