

日本医科大学(後期) 数学

2021年 3月4日実施

[1]

袋の中に0, 1, 2, 3という1つの番号が書かれたカードがそれぞれ2枚ずつ、合計8枚入っている。この袋からカードを4枚続けて取り出す。ただし、取り出したカードは袋に戻さない。カードに書かれて番号を取り出した順に a, b, c, d とするとき、以下の問いに答えよ。答えのみでよい。有理数は既約分数で表すこと。

問1 $abcd = 0$ となる確率を求めよ。

問2 $ab + bc + cd = 0$ となる確率を求めよ。

問3 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ が5の倍数となる確率を求めよ。

問4 $ab^2 + b^2c + cd^2 + d^2a$ が5の倍数となる確率を求めよ。

解答

問1 $abcd = 0$ となるのは、

a, b, c, d のうち、少なくとも1つが0となる場合

である。この余事象は

a, b, c, d のすべてが0でない場合

であり、その確率は

$$\frac{{}_6P_4}{{}_8P_4} = \frac{3}{14}$$

よって、求める確率は

$$1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}$$

問2 $ab + bc + cd = 0$ となるのは「 $ab = 0$ かつ $bc = 0$ かつ $cd = 0$ 」の場合であり、それは次の3つのいずれかの場合である。

(i) $a = 0$ かつ $c = 0$

(ii) $b = 0$ かつ $c = 0$

(iii) $b = 0$ かつ $d = 0$

(i)(ii)(iii) となる確率は、それぞれ $\frac{2 \times 1}{8 \times 7}$ であり、これらは排反であるから、求める確率は

$$\frac{2 \times 1}{8 \times 7} \times 3 = \frac{3}{28}$$

問3 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ が5の倍数となるのは、 a, b, c, d の内訳が次の4つのいずれかの場合である。

$$(i) 0 \text{ が } 2 \text{ 個, } 2 \text{ が } 1 \text{ 個, } 3 \text{ が } 1 \text{ 個の場合} \left(\text{確率} \frac{{}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 4!}{8P_4} \right) \dots \textcircled{1}$$

$$(ii) 0 \text{ が } 1 \text{ 個, } 1 \text{ が } 2 \text{ 個, } 3 \text{ が } 1 \text{ 個の場合} \left(\text{確率} \frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \times 4!}{8P_4} \right) \dots \textcircled{2}$$

$$(iii) 0 \text{ が } 1 \text{ 個, } 1 \text{ が } 1 \text{ 個, } 2 \text{ が } 2 \text{ 個の場合} \left(\text{確率} \frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_2 \times 4!}{8P_4} \right) \dots \textcircled{3}$$

$$(iv) 2 \text{ が } 2 \text{ 個, } 3 \text{ が } 2 \text{ 個の場合} \left(\text{確率} \frac{{}_2C_2 \cdot {}_2C_2 \times 4!}{8P_4} \right) \dots \textcircled{4}$$

これらは排反であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} &= \frac{(4 + 4 + 4 + 1) \times 4!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \\ &= \frac{13}{70} \end{aligned}$$

問4 2つの事象 A, B をそれぞれ

$A : a + c \equiv 0 \pmod{5}$ となる事象

$B : b^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{5}$ となる事象

と定めると、

$$ab^2 + b^2c + cd^2 + d^2a = (a + c)(b^2 + d^2) \equiv 0 \pmod{5}$$

となる確率は $P(A \cup B)$ である。さらに

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \dots \textcircled{1}$$

であるから、 $P(A), P(B), P(A \cap B)$ を求める。

事象 A が起こるのは、 $\{a, c\} = \{0, 0\}$ または $\{2, 3\}$ となる場合だから、確率は

$$P(A) = \frac{{}_2C_2 \times 2! + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2!}{8 \cdot 7} = \frac{5}{28}$$

事象 B が起こるのは、 $\{b, d\} = \{0, 0\}$ または $\{1, 2\}$ または $\{1, 3\}$ となる場合だから、確率は

$$P(A) = \frac{{}_2C_2 \times 2! + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2! + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2!}{8 \cdot 7} = \frac{9}{28}$$

事象 $A \cap B$ が起こるのは、

$\{a, c\}$	$\{b, d\}$	確率 $\frac{({}_2C_2 \times 2!) \times ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2!)}{8P_4} = \frac{16}{8P_4} \dots \textcircled{2}$
	$\{1, 2\}$	
$\{0, 0\}$	$\{1, 3\}$	確率 $\frac{({}_2C_2 \times 2!) \times ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2!)}{8P_4} = \frac{16}{8P_4} \dots \textcircled{3}$

$$\begin{array}{l}
 \{a, c\} \\
 \\
 \{2, 3\}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \{b, d\} \\
 \{0, 0\} \\
 \\
 \{1, 2\} \\
 \\
 \{1, 3\}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{確率 } \frac{({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2!) \times ({}_2C_2 \cdot {}_2 \times 2!)}{{}_8P_4} = \frac{16}{{}_8P_4} \dots \textcircled{4} \\
 \\
 \text{確率 } \frac{({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2!) \times ({}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \times 2!)}{{}_8P_4} = \frac{32}{{}_8P_4} \dots \textcircled{5} \\
 \\
 \text{確率 } \frac{({}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \times 2!) \times ({}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \times 2!)}{{}_8P_4} = \frac{32}{{}_8P_4} \dots \textcircled{6}
 \end{array}$$

の場合であるから、確率は

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= \textcircled{2} + \textcircled{3} + \dots + \textcircled{6} \\
 &= \frac{16 \times 4 + 32 \times 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \\
 &= \frac{1}{15}
 \end{aligned}$$

である。

以上を①に代入して、求める確率は

$$P(A \cap B) = \frac{5}{28} + \frac{9}{28} - \frac{1}{15} = \frac{13}{30}$$

[II]

以下の文章中の空欄に適する数値や数式を解答欄に記入せよ。なお、ク に関してはその導出過程も解答欄に記述せよ。

O を原点とする xyz 空間において $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(a, b, 0)$ ($a > 0, b > 0$) として、長方形 OAPB を、対角線 OP を軸として 1 回転させる。B は平面 ア $x +$ イ $y =$ ウ 上の中心 (エ, オ, 0), 半径 カ の円周上を動く (以下この円を C とする)。 xy 平面に垂直で対角線 OP を含む平面と円 C の交点 1 つを Q とするとき、線分 AQ の長さは キ となる。特に P が

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

を満たしながら動くとき、線分 AQ の長さは最小値 ク をとる。

解答

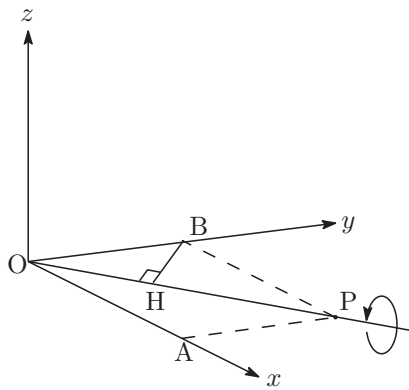


fig.1

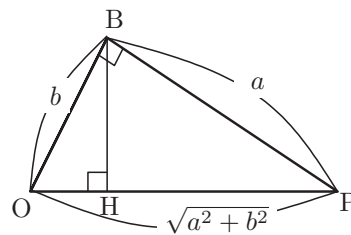


fig.2

点 B から直線 OP に下ろした垂線の足を H とする。

点 B は

$B(0, b, 0)$ を通り $\vec{OP} = (a, b, 0)$ に垂直な平面 π 上で、H を中心とする半径 BH の円周を描く

平面 π 上の点を $X(x, y, z)$ とすると、

$$\begin{aligned} \vec{BX} \perp \vec{OP} &\iff \vec{BX} \cdot \vec{OP} = 0 \\ &\iff \{(x, y, z) - (0, b, 0)\} \cdot (a, b, 0) = 0 \\ &\iff ax + b(y - b) = 0 \\ &\iff ax + by = b^2 \end{aligned}$$

を満たす。よって、点 B は平面 $ax + by = b^2$ 上を動く。

また、 \vec{OH} は、 \vec{OB} の \vec{OP} 方向への正射影ベクトルなので

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OP}|^2} \vec{OP} \\ &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} (a, b, 0) \end{aligned}$$

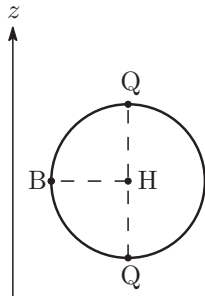
より、中心 H $\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, 0 \right)$

さらに、 $\triangle OBP$ が $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形なので (fig.2)

$$BH = b \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} (= \text{半径})$$

以上より、点 B は

$$\text{平面 } ax + by = b^2 \text{ 上の中心 } \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, 0 \right), \text{ 半径 } \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ の円周を動く}$$



点 Q は点 H から z 軸の正の方向 (または負の方向) に BH だけ平行移動した点であるから、

$$Q \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, \pm \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\therefore \vec{AQ} = \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, \pm \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)$$

よって、

$$AQ = \sqrt{\frac{a^6 + b^6 + a^2b^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^3 - 2a^2b^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2}{a^2 + b^2}} \quad \left(= \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}} \right)$$

さらに、 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \iff a^2 + b^2 = a^2b^2$ を満たすとき

$$AQ = \sqrt{\frac{(a^2b^2)^2 - 2a^2b^2}{a^2b^2}}$$

$$= \sqrt{a^2b^2 - 2}$$

となる。ここで、相加平均・相乗平均の関係の不等式により

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{ab}$$

$$\therefore ab \geq 2 \quad (\text{等号成立は } a = b = \sqrt{2} \text{ のとき})$$

であるから、AQ は

$$ab = 2 \text{ のときに最小値 } \sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2} \text{ をとる。}$$

[III]

関数 $f(x) = (\log x)^2 + 2 \log x$ ($x > 0$) に対し、方程式 $f(x) = 0$ の解のうち最小の値を a とし、 $a \leq x \leq t$ における $|f(x)|$ の最大値を $M(t)$ とする。また、定積分 I を

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} M(t) dt$$

とするとき、以下の各問いに答えよ。

問1 $f(x)$ の極小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問2 a の値を求めよ。答えのみでよい。

問3 $M(t)$ を求めよ。

問4 I の値を求めよ。

解答

問1 $f(x) = (\log x)^2 + 2 \log x$ ($x > 0$) より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x}(\log x + 1) \end{aligned}$$

であるので、増減表は次のようになる。

x	(0)	...	e^{-1}	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗

よって

$$\text{極小値: } f(e^{-1}) = -1 \quad (x = e^{-1})$$

問2

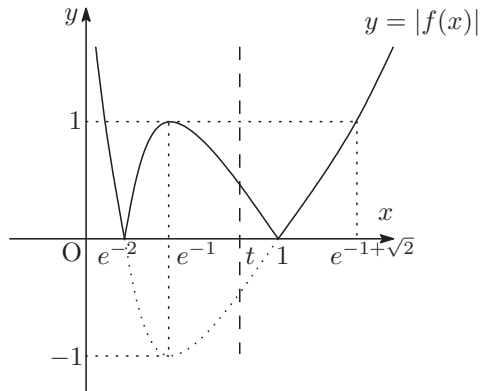
$$f(x) = 0 \iff (\log x)(\log x + 2) \iff \log x = 0, -2 \iff x = 1, e^{-2}$$

よって、 $e^{-2} < 1$ より

$$a = e^{-2}$$

問3 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (\log x)^2 \left(1 + \frac{2}{\log x}\right) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ に注意すると、 $y = |f(x)|$ のグラフは次の

ようになる。



ここで

$$f(x) = 1 \iff (\log x)^2 + 2 \log x - 1 = 0 \iff \log x = -1 \pm \sqrt{2} \iff x = e^{-1 \pm \sqrt{2}}$$

よって, 図より

$$M(t) = \begin{cases} -(\log t)^2 - 2 \log t & (e^{-2} \leq t < e^{-1}) \\ 1 & (e^{-1} \leq t < e^{-1+\sqrt{2}}) \\ (\log t)^2 + 2 \log t & (e^{-1+\sqrt{2}} \leq t) \end{cases}$$

問4 問3より

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{\frac{1}{a}} M(t) dt \\ &= \int_{e^{-2}}^{e^2} M(t) dt \\ &= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \{ -(\log t)^2 - 2(\log t) \} dt + \int_{e^{-1}}^{e^{-1+\sqrt{2}}} dt + \int_{e^{-1+\sqrt{2}}}^{e^2} \{ (\log t)^2 + 2(\log t) \} dt \\ &= - \left[t(\log t)^2 \right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} + \left[t \right]_{e^{-1}}^{e^{-1+\sqrt{2}}} + \left[t(\log t)^2 \right]_{e^{-1+\sqrt{2}}}^{e^2} \\ &= 4e^{-2} - 2e^{-1} + 2(\sqrt{2} - 1)e^{-1+\sqrt{2}} + 4e^2 \end{aligned}$$

[IV]

$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とし、複素数 z に共役な複素数を \bar{z} で表す。原点を O とする複素数平面上において、次の3つの条件で定まる図形を C とする。

$$|z^2 - 1| = 1, \quad \frac{z + \bar{z}}{2} > 0, \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} > 0$$

C 上の点 $P(z)$ に対して、点 $Q(\bar{z})$ を通り直線 OQ と垂直な直線を L とし、直線 OP と直線 L の交点を $A(\alpha)$ とする。また、点 $B(\beta)$ を、原点と点 $R(z^2)$ を通る直線上の点であり、かつ、直線 AB と直線 L が垂直となるようにとる。 z の絶対値を r とし、 z の偏角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とするとき、以下の各問いに答えよ。

問1 θ がとりうる値の範囲を求めよ。また、 r を θ の関数として表せ。答えのみでよい。

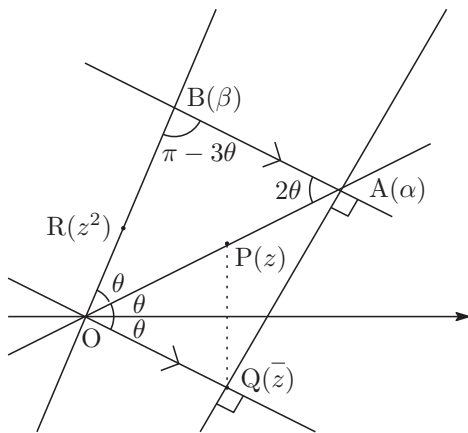
問2 $\cos \theta, \sin \theta$ をそれぞれ r の関数として表せ。答えのみでよい。

問3 $|\alpha|$ を r の関数として表せ。答えのみでよい。

問4 $|\beta|$ を r の関数として表せ。

問5 点 $P(z)$ が C 上を動くとき、 $|z|^2 \left| \frac{z}{\alpha} - 1 \right| \left| \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right|$ の最大値と、最大値をとる複素数 z に対する r の値を答えよ。

解答



問1 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ より

$$\begin{aligned} |z^2 - 1| = 1 &\iff |r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) - 1| = 1 \quad (\because \text{ド・モアブルの定理}) \\ &\iff |(r^2 \cos 2\theta - 1) + i \cdot r^2 \sin 2\theta|^2 = 1 \\ &\iff (r^2 \cos 2\theta - 1)^2 + r^4 \sin^2 2\theta = 1 \\ &\iff r^4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2r^2 \cos 2\theta = 0 \\ &\iff r^2(r^2 - 2 \cos 2\theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{z + \bar{z}}{2} > 0, \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} > 0 \text{ より, } r \neq 0 \text{ であるので}$$

$$r^2 = 2 \cos 2\theta \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで、 $\frac{z+\bar{z}}{2} > 0$, $\frac{z-\bar{z}}{2i} > 0$ より、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ……②である。

また、 $r^2 > 0$ より

$$2 \cos 2\theta > 0 \iff \cos 2\theta > 0 \dots\dots③$$

である。したがって、②を満たす θ のうち③を満たす θ の範囲を考えて、求める θ の範囲は

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

である。このとき、①より

$$r = \sqrt{2 \cos 2\theta}$$

問2 θ の範囲に注意して、①より

$$r^2 = 2(2 \cos^2 \theta - 1) \iff \cos^2 \theta = \frac{2+r^2}{4} \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2+r^2}}{2}$$

また、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \iff \sin^2 \theta = \frac{2-r^2}{4} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2-r^2}}{2}$$

問3 直角三角形 OAQ に注目して、 $OQ = OA \cos 2\theta \iff r = |\alpha| \cos 2\theta$ より

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \frac{r}{\cos 2\theta} \\ &= \frac{r}{2 \cos^2 \theta - 1} \\ &= \frac{r}{2 \cdot \frac{2+r^2}{4} - 1} \quad (\because \text{問2}) \\ &= \frac{2}{r} \end{aligned}$$

問4 三角形 OAB において正弦定理を用いると、 $\frac{OB}{\sin \angle OAB} = \frac{OA}{\sin \angle OBA} \iff \frac{|\beta|}{\sin 2\theta} = \frac{|\alpha|}{\sin(\pi - 3\theta)}$ より

$$\begin{aligned} |\beta| &= \frac{|\alpha| \sin 2\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \cdot \frac{2}{r} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta} \cdot \frac{2}{r} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{3 - 4 \sin^2 \theta} \cdot \frac{2}{r} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2+r^2}}{2}}{3 - 4 \cdot \frac{2-r^2}{4}} \cdot \frac{2}{r} \quad (\because \text{問2}) \\ &= \frac{2\sqrt{2+r^2}}{r(1+r^2)} \end{aligned}$$

問 5

$$\begin{aligned}
 |z|^2 \left| \frac{z}{\alpha} - 1 \right| \left| \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right| &= |z|^2 \cdot \frac{|z - \alpha|}{|\alpha|} \cdot \frac{|\beta - \alpha|}{|\alpha|} \\
 &= \frac{|z|^2}{|\alpha|^2} \cdot \left| |\alpha| - |z| \right| \cdot \frac{|\beta|}{2 \cos \theta} \\
 &(\because \text{三角形 OAB において正弦定理より,}) \\
 &\frac{AB}{\sin \angle AOB} = \frac{OB}{\sin \angle OAB} \iff \frac{|\beta - \alpha|}{\sin \theta} = \frac{|\beta|}{\sin 2\theta} \\
 &= \frac{r^2}{\left(\frac{2}{r}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{r} - r\right) \cdot \frac{\frac{2\sqrt{2+r^2}}{r(1+r^2)}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2+r^2}}{2}} \\
 &(\because \text{問 2 問 3 問 4, また問 1 より } 0 < r < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{r} - r > 0) \\
 &= \frac{r^2(2-r^2)}{2(1+r^2)} \dots\dots\dots \textcircled{4} \\
 &= -\frac{r^2}{2} - \frac{3}{2(1+r^2)} + \frac{3}{2} \\
 &= -\left\{ \frac{1+r^2}{2} + \frac{3}{2(1+r^2)} \right\} + 2 \\
 &\leq -2\sqrt{\frac{1+r^2}{2} \cdot \frac{3}{2(1+r^2)}} + 2 \\
 &(\because \frac{1+r^2}{2} > 0, \frac{3}{2(1+r^2)} > 0 \text{ より, 相加平均} \cdot \text{相乗平均の関係を用いた}) \\
 &= 2 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

等号は, $\frac{1+r^2}{2} = \frac{3}{2(1+r^2)} \iff r^2 = -1 + \sqrt{3} \iff r = \sqrt{-1 + \sqrt{3}}$ のとき成立する。

よって, 求める最大値と, 最大値をとる複素数 z に対する r の値は

$$\text{最大値: } 2 - \sqrt{3} \quad (r = \sqrt{-1 + \sqrt{3}})$$

(参考) ④において, $1 + r^2 = x$ とおいて相加平均・相乗平均に持ち込むと計算が少し楽になる。また, $r^2 = x$

($0 < x < 2$) とおいて $f(x) = \frac{x(2-x)}{2(1+x)}$ を微分して計算していてもよい。

講評

[I] [確率] (やや難)

丁寧に数え上げる必要がある。問3までは確実に押さえない。問4はやや難しめであるから、場合によっては飛ばして[II]以降を優先して解いていくのがよいだろう。

[II] [空間図形] (やや易)

空間における平面に関する平易な問題であった。誘導も丁寧なので完答したい。

[III] [微積分] (やや易)

微積分の計算問題である。本学にしては計算量も少なく、解きやすい問題であった。問題もわかりやすく、ここは落とせないだろう。

[IV] [複素数平面] (やや難)

複素数平面の図形的意味を問う出題である。式の意味をしっかりと考えたい。適宜、図形の性質を用いると計算量が減らせるので、図形問題の基本に立ち返りたいところである。

全体的な難易度、計算量は例年と大きく変わらなかった。[I]の出題形式が昨年度から変更となったが、ほかに大きな変更点は見られなかった。[II][III]で完答を目指し、[I][IV]でとれるところで点数を稼いでいきたい。目標は65%。

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せは… YMS ☎03-3370-0410 まで

医学部進学予備校
メビオ
 受付 9~21時(土日祝可・携帯からOK)
 大阪市中央区石町 2-3-12
 ベルヴォア天満橋
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
YMS
 heart of medicine
 受付 8~20時(土日祝可)
 東京都渋谷区代々木
 1-37-14
<https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ
 福岡校
 受付 03-120-192-215
 福岡市中央区渡辺通 4-8-20
 英進館 天神本館新2号館2階
<https://www.mebio-eishinkan.com/>