医学部専門予備校 YMS × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

# 解答速報

# 杏林大学医学部　数学

2022年 1月21日実施

I

(1)　三角関数について，次の関係式が成り立つ．

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{アイ}} \sin^2\theta + \boxed{\text{ウ}},$$

$$\sin 3\theta = \boxed{\text{ウエ}} \sin^3\theta + \boxed{\text{カ}} \sin\theta.$$

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数

$$y = -\frac{1}{12}\sin 3\theta + \frac{3}{8}\cos 2\theta - \frac{3}{4}\sin\theta$$

は，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシス}}}$ をとり，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ をとる．また，$y$ の極値を与える $\theta$ の個数は $\boxed{\text{タ}}$ である．

解答

(1)　倍角公式および3倍角公式の導出過程は次のとおりである．

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta) \\
&= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \quad (\because \text{加法定理}) \\
&= (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta \\
&= \boldsymbol{-2\sin^2\theta + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta) \\
&= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \quad (\because \text{加法定理}) \\
&= (\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)\cos\theta + (-2\sin^2\theta+1)\sin\theta \quad (\because \text{加法定理}) \\
&= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (-2\sin^2\theta+1)\sin\theta \\
&= \boldsymbol{-4\sin^3\theta + 3\sin\theta}
\end{aligned}$$

(2)　(1) より

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{12}(-4\sin^3\theta + 3\sin\theta) + \frac{3}{8}(-2\sin^2\theta+1) - \frac{3}{4}\sin\theta \\
&= \frac{1}{3}\sin^3\theta - \frac{3}{4}\sin^2\theta - \sin\theta + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$y$ を $\theta$ で微分すると

$$\begin{aligned}
y' &= \sin^2\theta\cos\theta - \frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta - \cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)
\end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における増減は次のようになる．

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $\cdots$ | $(2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $\frac{3}{8}$ | $\searrow$ | $-\frac{25}{24}$ | $\nearrow$ | $\frac{31}{48}$ | $\searrow$ | $\frac{7}{24}$ | $\nearrow$ | $\frac{31}{48}$ | $\searrow$ | $\left(\frac{3}{8}\right)$ |

よって，$\theta = \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{-25}{24}}$ をとり，$\theta = \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$，すなわち $\sin\theta = \boldsymbol{\frac{-1}{2}}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{31}{48}}$ をとる．
また，$y$ の極値を与える $\theta$ の個数は $\mathbf{4}$ である．

(参考)　(2) は $\sin\theta = t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ と置換するのが計算が早い．最後に $y$ の極値を与える $\theta$ の個数を答えさせているので，上記では都合上置換せずに微分した．

Ⅱ

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ．
自然対数の底を $e$ として，以下の問に答えよ．

(1)　$C$ を積分定数として，指数関数と単項式の不定積分について，次式が成り立つ．

$$\int xe^{-3x}dx = -\left(\frac{\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)e^{-3x}+C$$

$$\int x^2e^{-3x}dx = -\left(\frac{\boxed{\text{エ}}x^2+\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\right)e^{-3x}+C$$

また，定積分について，

$$\int_0^1 |(9x^2-1)e^{-3x}|dx = \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\left(-1+\boxed{\text{コ}}\,e^{\boxed{\text{サシ}}}-\boxed{\text{スセ}}\,e^{-3}\right)$$

が成り立つ．

(2)　$p$, $q$, $r$ を実数の定数とする．関数 $f(x)=\left(px^2+qx+r\right)e^{-3x}$ が $x=0$ で極大，$x=1$ で極小となるための必要十分条件は，

$$p=\boxed{\text{ソタ}},\ q=\boxed{\text{チ}}\,r,\quad \boxed{\text{ツ}}$$

である． さらに，$f(x)$ の極小値が $-1$ であるとすると，$f(x)$ の極大値は $\dfrac{e^{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ となる．このとき，

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$ である．

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ① $r>0$ | ② $r=0$ | ③ $r<0$ | ④ $r>1$ | ⑤ $r=1$ |
| ⑥ $r<1$ | ⑦ $r>\dfrac{1}{3}$ | ⑧ $r=\dfrac{1}{3}$ | ⑨ $r<\dfrac{1}{3}$ | |

解答

(1)　部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int xe^{-3x}dx &= \int x\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)'dx\\ &= x\cdot\frac{e^{-3x}}{-3}-\int 1\cdot\frac{e^{-3x}}{-3}dx\\ &= -\frac{xe^{-3x}}{3}-\frac{e^{-3x}}{9}+C\\ &= \boldsymbol{-\left(\frac{3x+1}{9}\right)e^{-3x}+C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{-3x}dx &= \int x^2 \left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)' dx \\
&= x^2 \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} - \int 2x \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} dx \\
&= -\frac{x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\int x e^{-3x} dx \\
&= -\frac{x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{3x+1}{9}e^{-3x}\right) + C \\
&= \boldsymbol{-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x} + C}
\end{aligned}$$

また，$9x^2-1 \geqq 0 \iff x \leqq -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3} \leqq x$ より

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |(9x^2-1)e^{-3x}|dx &= \int_0^1 |9x^2-1|e^{-3x}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} -(9x^2-1)e^{-3x}dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (9x^2-1)e^{-3x}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} (-9x^2e^{-3x}+e^{-3x})dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (9x^2e^{-3x}-e^{-3x})dx \\
&= -9\left[-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\frac{1}{3}} + 9\left[-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}\right]_{\frac{1}{3}}^1 - \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{\frac{1}{3}}^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}(-1+8e^{-1}-16e^{-3})}
\end{aligned}$$

(2)　条件より，$f'(0)=0,$ かつ $f'(1)=0$ が必要である．$f'(x)=\{-3px^2+(2p-3q)x+q-3r\}e^{-3x}$ であるから

$$\begin{aligned}
f'(0)=0,\ \text{かつ}\ f'(1)=0 &\iff q-3r=0,\ \text{かつ}\ (-p-2q-3r)e^{-3}=0 \\
&\iff p=-9r,\ \text{かつ}\ q=3r
\end{aligned}$$

このとき，$f'(x)=27rx(x-1)e^{-3x}$ であるから，$f(0)$ が極大値，$f(1)$ が極小値となるとき，$r>0$ である．よって，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{p=-9r,\ \text{かつ}\ q=3r,\ \text{かつ}\ r>0}$$

さらに，$f(x)=(-9r^2x+3rx+r)e^{-3x}$ より

$$f(1)=-1 \iff -5re^{-3}=-1 \iff r=\frac{e^3}{5}$$

であるから

$$f(0)(=r)=\boldsymbol{\frac{e^3}{5}}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 r(-9x^2+3x+1)e^{-3x}dx \\
&= r\int_0^1 (-9x^2+3x+1)e^{-3x}dx
\end{aligned}$$

であり，(1) より

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-9x^2+3x+1)e^{-3x}dx &= \int_0^1 (-9x^2e^{-3x}+3xe^{-3x}+e^{-3x})dx \\ &= \left[-9\left(-\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}+3\left(-\frac{3x+1}{9}\right)e^{-3x}+\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^1 \\ &= 4e^{-3}\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^1 f(x)dx = r\cdot 4e^{-3} = \frac{e^3}{5}\cdot 4e^{-3} = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

III

$\boxed{\text{イ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$，および $\boxed{\text{サ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ の解答を該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ．

(1)　座標平面上の 3 点 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, C を頂点とする三角形について考える．点 C の $y$ 座標は正であり，原点を O として，以下の問いに答えよ．

(a) $\angle\mathrm{BAC} < \angle\mathrm{ABC}$ を満たす場合，点 C は第 $\boxed{\text{ア}}$ 象限に存在する．

(b) $\angle\mathrm{ABC} < \angle\mathrm{ACB}$ を満たす場合，点 C は $\boxed{\text{イ}}$ の $\boxed{\text{ウ}}$ に存在する．

(c) $\angle\mathrm{ACB} < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす場合，点 C は $\boxed{\text{エ}}$ の $\boxed{\text{オ}}$ に存在する．

(d) $\angle\mathrm{BAC} \leqq \angle\mathrm{ABC} \leqq \angle\mathrm{ACB} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす点 C が存在する領域 (境界を含む) の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi - \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

① 点 A を中心とし点 B を通る円
② 点 B を中心とし点 A を通る円
③ 線分 AB を直径とする円
④ 離心率が 0.5 で 2 点 O, A を焦点とする楕円
⑤ 離心率が 0.5 で 2 点 O, B を焦点とする楕円
⑥ 離心率が 0.5 で 2 点 A, B を焦点とする楕円
⑦ 線分 AB を一辺にもち，重心の $y$ 座標が正である正三角形
⑧ 線分 AB を一辺にもち，重心の $y$ 座標が正である正方形

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

① 内部
② 周上
③ 外部
④ 重心

(2)　座標空間内の 4 点 A$(-1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 0)$，C$(s,\ t,\ 0)$，D を頂点とし，

$$\angle\mathrm{BAC} < \angle\mathrm{ABC} < \angle\mathrm{ACB}$$

を満たす四面体を考える．$t > 0$ であり，点 D の $z$ 座標は正であるとして，以下の問いに答えよ．

(a) $\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす場合，点 D は $\boxed{\text{サ}}$ に存在する．

(b) $\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BDC} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす場合，点 D の $x$ 座標は $s$ であり，点 D は $\left(s,\ \boxed{\text{シ}},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ス}}$ の円周上にある．

(c) 以下では，$t = \dfrac{4}{3}$ とする．設問 (1) の結果から，点 C の $x$ 座標 $s$ は，

$$\boxed{\text{セ}} < s < -\boxed{\text{ソ}} + \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

の範囲の値をとりうる．この範囲で $s$ が変化するとき，$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BDC} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たす四面体 ABCD

の体積は， $s=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}$ をとる．

$\boxed{サ}$ の解答群

① 線分 AC の中点を通り直線 AC に垂直な平面上

② 線分 AC を直径とする球面上

③ 線分 AC を直径とする球の内部

④ 点 A を中心とし点 C を通る球面上

⑤ 点 A を中心とし点 C を通る球の内部

⑥ 線分 AC を一辺にもつ正四面体の面上

⑦ 線分 AC を一辺にもつ正四面体の内部

⑧ 離心率が 0.5 で 2 点 A，C を焦点とする楕円を直線 AC のまわりに 1 回転させてできる立体の面上

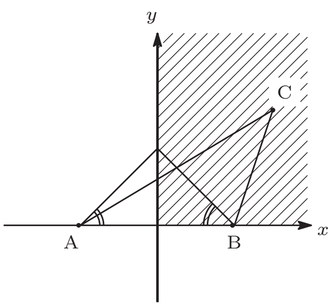
⑨ 離心率が 0.5 で 2 点 A，C を焦点とする楕円を直線 AC のまわりに 1 回転させてできる立体の内部

$\boxed{シ}$， $\boxed{ス}$ の解答群

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ① $s$ | ② $t$ | ③ $2s$ | ④ $2t$ | ⑤ $\dfrac{s}{2}$ |
| ⑥ $\dfrac{t}{2}$ | ⑦ $st$ | ⑧ $\dfrac{s}{t}$ | ⑨ $\dfrac{s+1}{2}$ | ⓪ $\dfrac{s-1}{2}$ |

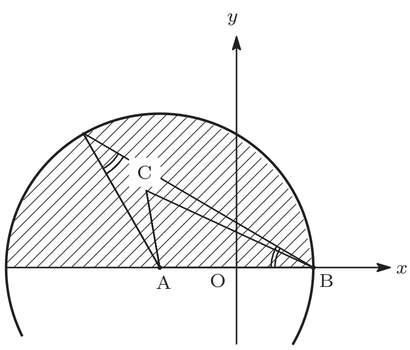
$\boxed{解答}$

(1) (a)



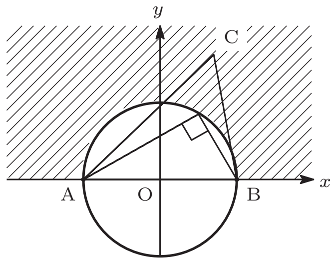

$\angle BAC < \angle ABC$ が成り立つとき，点 C は線分 AB の垂直二等分線に関し，点 B と同じ側に存在する．点 C の $y$ 座標が正であることにも注意すると，点 C は **第 1 象限** に存在する．

(b)



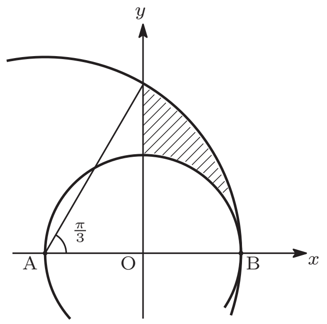

$\angle ABC < \angle ACB$ が成り立つとき，点 C は AC $<$ AB を満たすので，点 C は点 A を中心とし点 B を通る円周 (**①**) の内部 (**①**) に存在する．

(c)




$\angle\mathrm{ACB} < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つとき，点 C は AB を直径とする円 (3) の外部 (3) に存在する．

(d)　(a)(b)(c) より，$\angle\mathrm{BAC} \leqq \angle\mathrm{ABC} \leqq \angle\mathrm{ACB} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす点 C の存在領域は次の図の斜線部（境界を含む）．




したがって，その面積は

$$2^2\pi \times \frac{1}{6} - \left(1^2\pi \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2)　点 $\mathrm{D}(x,\ y,\ z)$ $(z > 0)$ とする．

(a)　$\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つとき，点 D は AC を直径とする球面上に存在する (2)．

(b)　$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{BDC} = \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{BD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1,\ y,\ z) \cdot (x-s,\ y-t,\ z) = 0 \\ (x-1,\ y,\ z) \cdot (x-s,\ y-t,\ z) = 0 \end{cases}$$

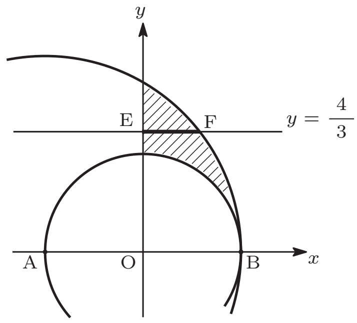
$$\begin{cases} (x+1)(x-s) + y(y-t) + z^2 = 0 \\ (x-1)(x-s) + y(y-t) + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = s \\ y(y-t) + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = s \\ \left(y - \dfrac{t}{2}\right)^2 + z^2 = \dfrac{t^2}{4} \end{cases}$$

したがって，点 D は $x$ 座標が $s$ で，$\left(s,\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$ (6) を中心とする半径 $\dfrac{t}{2}$ (6) の円周上にある．

(c)　(1) と $t=\dfrac{4}{3}$ から，点 C の存在する範囲は次の図の線分 EF 上である．




点 F の $x$ 座標は，円 $(x+1)^2+y^2=4$ と $y=\dfrac{4}{3}$ を連立して，$x=-1+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

よって，点 C の $x$ 座標 $s$ の取りうる値の範囲は

$$\boldsymbol{0<s<-1+\frac{2\sqrt{5}}{3}}$$

である．

四面体 ABCD の体積 $V$ は

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times z\\ &=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t\times z\\ &=\frac{t}{3}z \end{aligned}$$

であるから，$V$ が最大となるのは $z$ が最大のときである．

$\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{\pi}{2}$ より点 D は AB を直径とする球面上あり，

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき点 D は (b) の条件を満たすから

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1\\ x=s\\ y(y-t)+z^2=0 \end{cases}$$

を満たす．よって，

$$y=\frac{1-s^2}{t}$$

であり，

$$\begin{aligned} z&=\sqrt{y(t-y)}\\ &=\sqrt{\frac{1-s^2}{t}\left(t-\frac{1-s^2}{t}\right)}\\ &=\frac{1}{t}\sqrt{u(t^2-u)}\qquad(1-s^2=u\text{ とおいた})\\ &=\frac{1}{t}\sqrt{-u^2+t^2u}\\ &=\frac{1}{t}\sqrt{-\left(u-\frac{t^2}{2}\right)^2+\frac{t^4}{4}} \end{aligned}$$

であるから，

$z$ は $u=\dfrac{t^2}{2}=\dfrac{8}{9}$，すなわち $s=\dfrac{1}{3}$ のときに最大値 $\dfrac{t}{2}=\dfrac{2}{3}$ をとる．

よって，$V$ は $s=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}$ をとる．

## 講評

Ⅰ［三角関数，微分法 (数Ⅱ)］(易)

三角関数と微分法 (数Ⅱ) の基本問題．三倍角の公式は必須である．今後の入試でも必ず出てくる公式である．

Ⅱ［積分法 (数Ⅲ)］（やや易）

部分積分をしっかりできるか，そして絶対値を含む定積分の処理ができるかを問う基本問題．計算がやや煩雑であるが，1 次合格のためには絶対に落とせない問題である．

Ⅲ［平面図形，空間図形］（やや難）

杏林らしい図形と絡んだ問題であり，時間制限を考えると，厳しかったかもしれない．前半の平面図形部分をどれだけとれるかがポイントである．後半の空間図形をとれる受験生はかなり力があると判断される．

大問 1 と大問 2 で満点をしっかりとれるかどうかで 1 次の合否が決まる可能性がある．大問 3 を取れなかったとしても諦める必要はないと思われる．一次突破ラインは 60% 前後だろう．