

解 答 速 報

東北医科薬科大学 数学

2022年 1月22日実施

[1]

p は正の定数とし、 xy 平面の曲線 $C: y = f(x) = x^4 - 4x^3$ 上の点 $(p, f(p))$ における接線 l を $y = ax + b$ とする。このとき、以下の問に答えなさい。

(1) 曲線 C と接線 l の共有点が全て接点であるとき、

(1-1) p が取りうる値の範囲は $\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \leq p$ である。

(1-2) $p = \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ のとき、 $a = \boxed{\text{ウエ}}$ 、 $b = \boxed{\text{オカ}}$ である。

(1-3) $p = \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ のとき、接線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(2) 接線 l が点 $(1, -3)$ を通るとする。連立不等式 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^4 - 4x^3 \leq y \leq ax + b \end{cases}$ で表される図形の面積を S とおく。

(2-1) $p = 1$ のとき、

$$a = \boxed{\text{サシ}}, b = \boxed{\text{ス}}, S = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

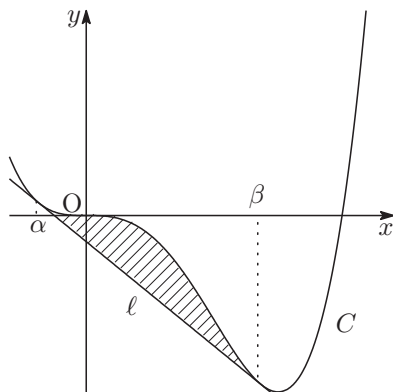
(2-2) $p \neq 1$ のとき、

$$p = \boxed{\text{チ}} + \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}, S = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} + \boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

解答

(1)(1-1) 曲線 C と接線 l の接点が2つであるとき、曲線 C と接線 l は下図のような位置関係になる。



図のように C と l の 2 接点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$f(x) - (ax + b) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

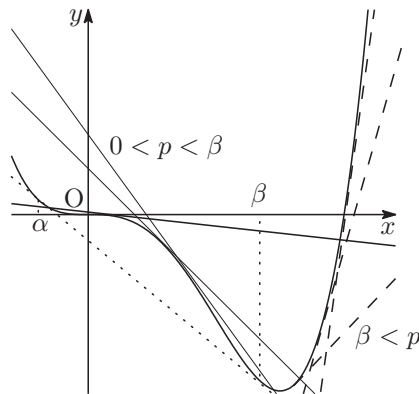
$$\iff x^4 - 4x^3 - ax - b = x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$$

が成立する。これが全ての実数 x について成立するので

$$-2(\alpha + \beta) = -4, \quad -2(\alpha + \beta) = 0, \quad \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = -a, \quad -2\alpha\beta(\alpha + \beta) = -b$$

$$\iff \alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -2, \quad a = -8, \quad b = -4$$

となる。ここで、 $0 < p < \beta$ のときと $\beta < p$ のときの接線 l の様子はそれぞれ次の図の実線部分と破線部分のようになる。



よって、曲線 C と接線 l の共有点が全て接点となるのは $\beta \leq p$ のときである。ここで、 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -2$ より、 α, β ($\alpha < \beta$) は t の 2 次方程式 $t^2 - 2t - 2 = 0$ の 2 解であるから、 $t = 1 \pm \sqrt{3}$, $\alpha < \beta$ より、 $\beta = 1 + \sqrt{3}$ である。したがって、 $1 + \sqrt{3} \leq p$

(参考 1) 問題文に 1 つの接点が与えられていることを踏まえると、次のように解くのが自然と言えるかもしれない。

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ における接線 l は、 $y = (4p^3 - 12p^2)x - 3p^4 + 8p^3$ となるので、 $y = f(x)$ と連立して

$$f(x) = (4p^3 - 12p^2)x - 3p^4 + 8p^3 \iff x^4 - 4x^3 - (4p^3 - 12p^2)x + 3p^4 - 8p^3 = 0$$

$$\iff (x - p)^2 \{x^2 + (2p - 4)x + 3p^2 - 8p\} = 0$$

曲線 C と接線 l の共有点が全て接点であるとき、 $x^2 + (2p - 4)x + 3p^2 - 8p = 0$ は重解をもつ、または実数解をもたないので、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} \leq 0 \iff p^2 - 2p - 2 \geq 0$$

$$\iff p \leq 1 - \sqrt{3}, \quad 1 + \sqrt{3} \leq p$$

よって、 $p > 0$ より、 $1 + \sqrt{3} \leq p$

なお、 $p = 1 + \sqrt{2}$ のとき、重解は $x = -p + 2 = 1 - \sqrt{3}$ となるので、 $\alpha = 1 - \sqrt{3}$, $\beta = 1 + \sqrt{3}$ とわかる。

(1-2) (1-1) より、 $y = -8x - 4$

(1-3) 求める面積は (1-1) 図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - (ax + b)\} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^5}{30} \\ &= \frac{\{(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})\}^5}{30} \\ &= \frac{48\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

(参考 2) (1-3) では、一般的に

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が成立するので、 $m = n = 2$ として

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^5}{30}$$

が成立することを用いた。医学部受験生は常識として知っていたい。

(参考 3) (1-3) では、次のように計算してもよい。

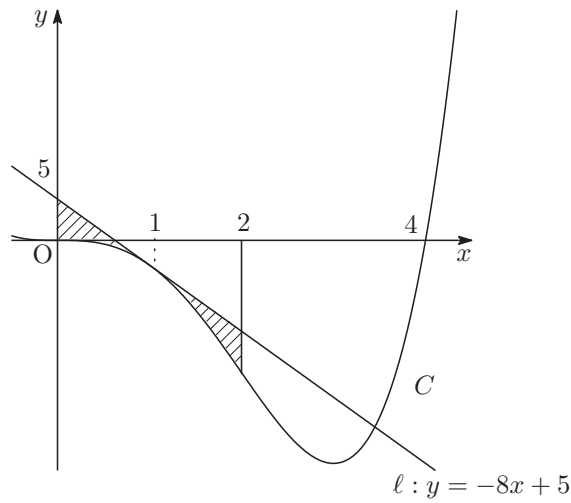
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - (ax + b)\} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 \{(x - \alpha) + (\alpha - \beta)\}^2 dx \\ &= \int_0^{\beta - \alpha} t^2 \{t + (\alpha - \beta)\}^2 dt \quad (x - \alpha = t \text{ と置換した}) \\ &= \int_0^{\beta - \alpha} \{t^4 + 2(\alpha - \beta)t^3 + (\alpha - \beta)^2 t^2\} \\ &= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{\beta - \alpha}{2} t^4 + \frac{(\beta - \alpha)^2}{3} t^3 \right]_0^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^5}{30} \\ &= \frac{\{(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})\}^5}{30} \\ &= \frac{48\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

他には部分積分を用いる方法もある。

(2)(2-1) $p = 1$ のとき、接線 l は曲線 C 上の点 $(1, -3)$ における接線に他ならない。 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ より、接線 l は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \iff y = -8x + 5$$

また、求める面積 S は下図の斜線部分の面積である。



よって

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \{(-8x + 5) - f(x)\} dx \\
 &= \int_0^2 (-x^4 + 4x^3 - 8x + 5) dx \\
 &= \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - 4x^2 + 5x \right]_0^2 \\
 &= \frac{18}{5}
 \end{aligned}$$

(2-2) 曲線 C の $(p, f(p))$ における接線 ℓ の方程式は

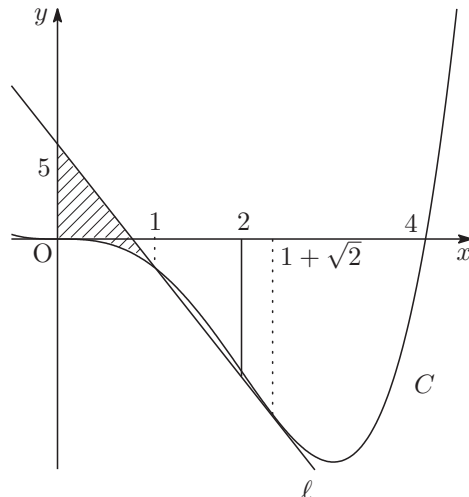
$$y = f'(p)(x - p) + f(p) \iff y = (4p^3 - 12p^2)x - 3p^4 + 8p^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

これが点 $(1, -3)$ を通るとき

$$\begin{aligned}
 -3 &= (4p^3 - 12p^2) \cdot 1 - 3p^4 + 8p^3 \\
 \iff p^4 - 4p^3 + 4p^2 - 1 &= 0 \\
 \iff (p-1)^2(p^2 - 2p - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

となるので、 $p > 0$, $p \neq 1$ のとき、 $p = 1 + \sqrt{2}$ である。

また、求める面積 S は下図の斜線部分の面積である。



よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(ax+b) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 (-x^4 + 4x^3 + ax + b) dx \\ &= \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{5} + \frac{a}{2} + b \end{aligned}$$

ここで, $p = 1 + \sqrt{2}$ のとき, ① $\iff y = (-8 - 4\sqrt{2})x + 5 + 4\sqrt{2}$ であるので, $a = -8 - 4\sqrt{2}$, $b = 5 + 4\sqrt{2}$ であるので

$$S = \frac{-8 - 4\sqrt{2}}{2} + (5 + 4\sqrt{2}) + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} + 2\sqrt{2}$$

[II]

複素数平面上に原点 O を中心とする単位円をとる。その円周上に、異なる 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 を順に反時計回りにとる。ただし、この 4 点は次を満たすとす。点 P_0 は実軸の正の半直線上にあり、 $\angle P_0OP_1 = \theta$ とすると $\angle P_1OP_2 = 2\theta$, $\angle P_2OP_3 = 3\theta$, $\angle P_3OP_0 = 4\theta$ となる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

(1) $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ である。

(2) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ (i は虚数単位), $w = z + \frac{1}{z}$ とおく。このとき、 $w^2 + aw + b = 0$ を満たす整数 a, b の値は $a = \boxed{\text{イウ}}$, $b = \boxed{\text{エオ}}$ である。

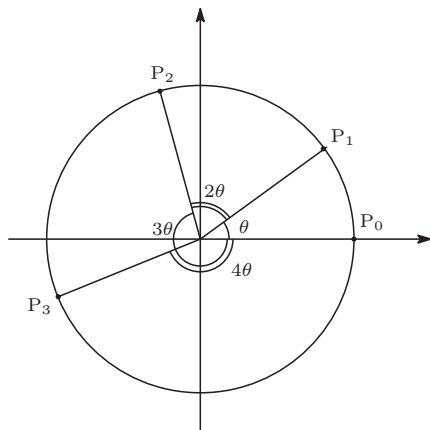
(3) $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$, $\cos 3\theta = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(4) 2 点 P_1, P_2 間の距離を L とするとき、 $L^2 = \frac{\boxed{\text{シ}} - \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(5) $\triangle P_2OP_3$ の面積を S とするとき、 $S^2 = \frac{\boxed{\text{ソ}} - \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

解答

(1)



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 10\theta < 5\pi$ であるから、

$$\angle P_0OP_1 + \angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \angle P_3OP_0 = 2\pi, 4\pi$$

$$\theta + 2\theta + 3\theta + 4\theta = 2\pi, 4\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{5}, \frac{2}{5}\pi$$

$\theta = \frac{2}{5}\pi$ のとき、2 点 P_1 と P_3 が一致するので不適である。

よって、 $\theta = \frac{\pi}{5}$

(2) $\theta = \frac{\pi}{5}$ のとき

$$z^5 = (\cos \theta + i \sin \theta)^5$$

$$z^5 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$z^5 + 1 = 0 \dots\dots ①$$

$$(z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$$

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \quad (\because z \neq -1)$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$\left\{ \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \right\} - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$w^2 - w - 1 = 0 \dots\dots ②$$

よって、 $a = -1, b = -1$

(3) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ のとき

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \cos \theta$$

である。

$\theta = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$ はともに①を満たすので、

$2 \cos \frac{\pi}{5}, 2 \cos \frac{3\pi}{5}$ は②の解である。

さらに、 $2 \cos \frac{\pi}{5} > 2 \cos \frac{3\pi}{5}$ であるから、

$$\text{②の2解は } w = 2 \cos \frac{\pi}{5}, 2 \cos \frac{3\pi}{5}$$

である。よって、②を解いて

$$w = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 2 \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

(4) $\triangle OP_1P_2$ に余弦定理を用いて

$$L^2 = P_1P_2^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 2\theta$$

$$= 2 - 2(2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$= 4 - 4 \cos^2 \theta$$

$$= 4 - 4 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2$$

$$= \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

(5) $S^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 3\theta \right)^2$

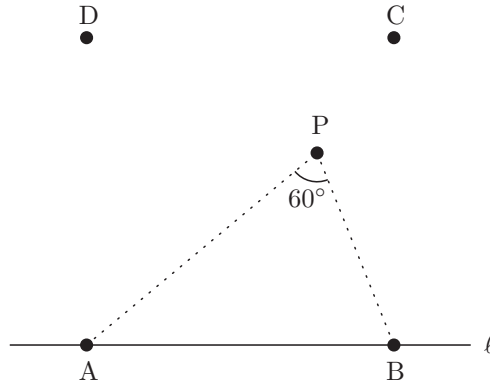
$$= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 3\theta)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{5}}{32}$$

[Ⅲ]

座標平面において x 軸と平行な直線 l 上に 2 点 A, B を $AB = 2\sqrt{3}$ となるようにとる。ここで、 A の x 座標は負とする。また動点 P は $\angle APB = 60^\circ$ を満たしながら直線 l より上側の領域 (境界線を含まない) を動き、原点 O と P の距離は一定であるとする。また、 l より上側の領域 (境界線を含まない) に図の配置のように 2 点 C, D を四角形 $ABCD$ が正方形になるようにとる。このとき、次の問に答えなさい。



- (1) 点 A の座標は $(-\sqrt{\text{ア}}, -\text{イ})$, $OP = \text{ウ}$, $\angle AOB = \text{エオカ}^\circ$ である。
 (2) 点 P が 2 点 C, D から等距離にあるとき、

$$PC = PD = \text{キ} \sqrt{\text{ク}} - \sqrt{\text{ケ}}$$

である。

- (3) $\frac{PD}{PC}$ の値を最小とする点 P を P_1 とする。 P_1 から l におろした垂線と l の交点を P'_1 とするとき、

$$P_1P'_1 = \frac{\text{ク} \sqrt{\text{サ}} + \text{シス}}{\text{セソ}}$$

である。

解答

- (1) 点 P はある円上を動き、その中心は原点 O となるから、 $\triangle ABP$ において正弦定理を考えると

$$2OP = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \angle APB}$$

$$OP = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2$$

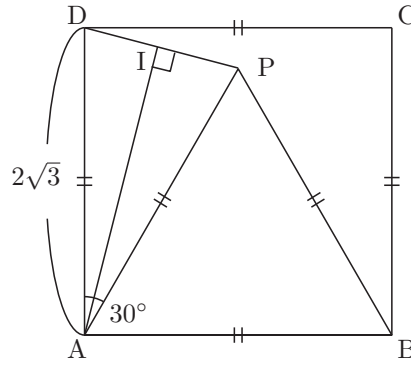
さらに、円周角の定理より

$$\angle AOB = 120^\circ$$

よって、原点 O から線分 AB に下した垂線の足を H とするとき、 $AH = \sqrt{3}$, $OH = 1$ であるから

$$A(-\sqrt{3}, -1)$$

(2) $\triangle ABP$ が正三角形になるとき、 $PC=PD$ となる。



$\triangle ADP$ に注目して、 $AP=AD=2\sqrt{3}$ 、 $\angle PAD = 30^\circ$ であることから、頂点 A から辺 DP におろした垂線の足を I とすると、

$$\begin{aligned} DP &= 2DI = 2\sqrt{3} \sin 15^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6} \end{aligned}$$

(3) $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi \text{としてよい} \right)$ とすると、

$$\begin{cases} PC^2 = (2 \cos \theta - \sqrt{3})^2 + (2 \sin \theta - 2\sqrt{3} + 1)^2 \\ PD^2 = (2 \cos \theta + \sqrt{3})^2 + (2 \sin \theta - 2\sqrt{3} + 1)^2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{PD^2}{PC^2} &= \frac{4 + 4\sqrt{3} \cos \theta + 4(1 - 2\sqrt{3}) \sin \theta + 3 + (1 - 2\sqrt{3})^2}{4 - 4\sqrt{3} \cos \theta + 4(1 - 2\sqrt{3}) \sin \theta + 3 + (1 - 2\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \cos \theta + 4(1 - 2\sqrt{3}) \sin \theta + 20 - 4\sqrt{3}}{-4\sqrt{3} \cos \theta + 4(1 - 2\sqrt{3}) \sin \theta + 20 - 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta + (1 - 2\sqrt{3}) \sin \theta + 5 - \sqrt{3}}{-\sqrt{3} \cos \theta + (1 - 2\sqrt{3}) \sin \theta + 5 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{k \sin(\theta + \alpha) + 5 - \sqrt{3}}{k \sin(\theta - \alpha) + 5 - \sqrt{3}} (= f(\theta) \text{とおく。}) \end{aligned}$$

$$\left(\text{ただし、} k = \sqrt{16 - 4\sqrt{3}}, \cos \alpha = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{k}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{k} \text{とする。} \right)$$

$f'(\theta) = \frac{k \cos(\theta + \alpha) \{k \sin(\theta - \alpha) + 5 - \sqrt{3}\} - k \cos(\theta - \alpha) \{k \sin(\theta + \alpha) + 5 - \sqrt{3}\}}{\{k \sin(\theta - \alpha) + 5 - \sqrt{3}\}^2}$ の分子を $g(\theta)$ とすると、

$$\begin{aligned} g(\theta) &= k^2 \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta - \alpha) - k^2 \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta - \alpha) \\ &\quad + k \cdot (5 - \sqrt{3}) \{ \cos(\theta + \alpha) - \cos(\theta - \alpha) \} \\ &= k^2 \{ \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta - \alpha) - \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta - \alpha) \} \\ &\quad + k \cdot (5 - \sqrt{3}) \cdot 2 \sin \theta \sin \alpha \\ &= k^2 \sin(\theta - \alpha - \theta - \alpha) - 2k(5 - \sqrt{3}) \sin \alpha \sin \theta \quad (\because \text{加法定理}) \\ &= -k^2 \sin 2\alpha - 2k(5 - \sqrt{3}) \sin \alpha \sin \theta \end{aligned}$$

ここで、 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\sqrt{3}(1 - 2\sqrt{3})}{k^2}$ より

$$\begin{aligned}
 g(\theta) &= -k^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}(1-2\sqrt{3})}{k^2} - 2k(5-\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{k} \sin \theta \\
 &= -2\sqrt{3} + 12 - 2(5\sqrt{3}-3) \sin \theta \\
 &= 2(5\sqrt{3}-3) \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{5-\sqrt{3}} - \sin \theta \right)
 \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} < p < \frac{7}{6}\pi$ かつ $\sin p = \frac{2\sqrt{3}-1}{5-\sqrt{3}}$ となる p を考える。 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7}{6}\pi$ において、 $f(\theta)$ の増減表を考えると

θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$		p		$\left(\frac{7}{6}\pi\right)$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		\searrow	$f(p)$	\nearrow	

よって、 $\theta = p$ のとき、 $f(\theta)$ は最小になるので、 P_1 の y 座標は

$$2 \sin p = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}-1}{5-\sqrt{3}} = \frac{1+9\sqrt{3}}{11}$$

であるから、 $P_1P_1' = \frac{1+9\sqrt{3}}{11} + 1 = \frac{12+9\sqrt{3}}{11}$

講評

[I] [微分法 (数Ⅱ), 積分法 (数Ⅱ)] (標準)

4次関数の接線と面積に関する出題であった。(1)は題意の把握に戸惑うかもしれないが4次関数の接線の典型的な問題である。(2)は図がやや描きにくいですが様子が掴めれば平易な問題なので冷静に対処したい。

[II] [複素数平面, 三角関数] (やや易)

36° の三角比に関する出題であった。医学部受験生にとってはなじみの深い出題であり、完答を目指したい。

[III] [平面図形, 図形と方程式] (やや難)

点Pがある円上にあることに気付ければ、(2)までは標準的な出題であろう。(2)までしっかりと取り切りたい。

受験生であれば経験したことがあるテーマからの出題であったものの、問題文の表現などに戸惑った受験生も多かったのではないだろうか。[I][II]のすべてと[III](1)(2)がどこまでできるかの勝負となるだろう。一次突破ラインは60%前後ではなかろうか。

LINE登録で全教科配信！

本解答速報の内容に関するお問合せは…

YMS ☎03-3370-0410 まで

医学部進学予備校 **メビオ**
☎0120-146-156 <https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
YMS
heart of medicine
☎03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ 福岡校
☎0120-192-215 <https://www.mebio-eishinkan.com/>



＊LINE登録はこちらから