解答速報

東京女子医科大学　数学

2022年 2月2日実施

※聞き取りによる再現問題です。一部誤りを含む可能性があります。

1

放物線 $y=x^2$ 上に $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$（$p<0<q$）があり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=6$ を満たしている。

(1)　pq を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を $p,\ q$ を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最小値を求めよ。また，このときの $p,\ q$ を求めよ。

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=6$ より

$$
\begin{aligned}
&(p,\ p^2)\cdot(q,\ q^2)=0\\
\iff\ & pq+p^2q^2=6\\
\iff\ & (pq)^2+pq-6=0\\
\iff\ & (pq+3)(pq-2)=0\\
\iff\ & pq=-3,\ 2
\end{aligned}
$$

よって，$p<0<q$ より，$pq=\boldsymbol{-3}$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x_2,\ y_2)$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ と表すことができるので，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|pq^2-p^2q|=\frac{1}{2}\cdot|pq||q-p|=\boldsymbol{\frac{3}{2}(q-p)}\quad(\because\ p<0<q,\ pq=-3)$$

(3)　$pq=-3$ より $p=-\dfrac{q}{3}$ であるので

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{3}{2}\left(q+\frac{3}{q}\right)\\
&\geqq\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{q\cdot\frac{3}{q}}\quad\left(q>0,\ \frac{3}{q}>0\text{ より，相加平均・相乗平均の関係を用いた}\right)\\
&=3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

等号は，$q=\dfrac{3}{q}$，すなわち $p=-\sqrt{3},\ q=\sqrt{3}$ のとき成立する。
よって，求める S の最小値は $3\sqrt{3}$ であり，このとき，$p=\boldsymbol{-\sqrt{3}}$，$q=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ である。

2

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，a_n と S_n の間に $S_n = {a_n}^2 + \dfrac{1}{2}a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の関係がある。

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2)　$\{a_n\}$ のすべての項が正であるとき，a_n を n の式で表せ。

(3)　$\{a_n\}$ の第 1000 項までを考える。第 1000 項のみ負で，ほかのすべての項が正であるとき，a_{1000} を求めよ。

(4)　$\{a_n\}$ の第 10 項までを考える。この 10 項のうち 1 つの項のみが負で，ほかのすべての項が正であるとき，a_{10} を求めよ。

解答

(1)　$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから

$$a_{n+1} = {a_{n+1}}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1} - \left({a_n}^2 + \frac{1}{2}a_n\right)$$
$$\iff ({a_{n+1}}^2 - {a_n}^2) - \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) = 0$$
$$\iff (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) - \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) = 0$$
$$\iff (a_{n+1} + a_n)\left(a_{n+1} - a_n - \frac{1}{2}\right) = 0$$

したがって

$$\boldsymbol{a_{n+1} = -a_n},\ \text{または}\ \boldsymbol{a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}}$$

(2)　与式に $n = 1$ を代入して

$$S_1 = {a_1}^2 + \frac{1}{2}a_1 \iff a_1 = {a_1}^2 + \frac{1}{2}a_1 \iff a\left(a - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff a_1 = 0,\ \text{または}\frac{1}{2}$$

$a_1 > 0$ であるから，$a_1 = \dfrac{1}{2}$

ここで, (1) より $a_{n+1} = -a_n$, または $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}$ であるが, $\{a_n\}$ のすべての項が正であるとき $a_{n+1} = -a_n$ は明らかに不適である。したがって，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}$ であるので，題意の条件を満たすとき，$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列なので

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{n}{2}}$$

(3)　$\{a_n\}$ の初項から第 999 項は正であるから，(2) より

$$a_n = \frac{n}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 999)$$

したがって，$a_{999} = \dfrac{999}{2}$ である。

続いて，第 1000 項が負であるので (1) より，$a_{1000} = -a_{999}$ である。

よって

$$a_{1000} = \boldsymbol{-\frac{999}{2}}$$

(4)　$a_1 = 0$ は条件を満たさないので，$a_1 = \dfrac{1}{2}$ である。

i)　a_2〜a_9 のうち 1 つが負のとき

負となる項を $a_k(<0)$ とすると（$k = 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$），(1) より

$$a_{k-1} = \frac{k-1}{2}, a_k = -\frac{k-1}{2},\ a_{k+1} = \frac{k-1}{2}$$

である。第 $(k+1)$ 項以降は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$a_{10} = \frac{k-1}{2} + \{10 - (k+1)\} \cdot \frac{1}{2} = 4$$

i)　a_{10} が負のとき

(3) と同様にして，$a_{10} = -\dfrac{9}{2}$ である。

よって，以上より

$$a_{10} = \mathbf{4},\ \text{または}\ \boldsymbol{-\frac{9}{2}}$$

(参考)　実践的には，$a_2 < 0$ のときに a_{10} がどうなるか，続いて $a_3 < 0$ のときに a_{10} がどうなるか，$\cdots$ と具体的に調べていくのがいいだろう。そうすれば $a_k < 0$ のとき（$k = 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$），$a_{10} = 4$ となることに気付けるだろう。ただし，解説にあるように $a_{10} < 0$ のときのみ様子が異なるので注意しよう。

3

1から8までの番号があるルーレットと，スタートからゴールまで10個のマスがある双六があり，以下の操作をおこなう。まずルーレットをまわし，出た数字の分だけ双六のマス目を進める。これを繰り返して，双六のゴールにぴったり辿り着いたら終了し，ゴールを超えてしまう分はマス目を戻り，そこから再びゴールに向かうものとする。例えば，3回ルーレットをまわして順に5，8，3と数字が出た場合には，双六はスタート→5マス目→7マス目→ゴールと進むことになる。
n 回の操作後にゴールに到達する確率を P_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P_2 を求めよ。

(2)　P_3 を求めよ。

(3)　$n \geqq 4$ のとき，P_n を n を用いて表せ。

解答

(1)　ルーレットを2回まわすとき，数字の出方は全部で $8^2 = 64$ 通りあり，
それらの出方はすべて同様に確からしい。
2回後にゴールに到達する数字の出方は

$$(1\text{回目},\ 2\text{回目}) = (8,2),\ (7,\ 3),\ (6,\ 4), (5,\ 5),\ (4,\ 6),\ (3,\ 7),\ (2,\ 8)$$

の7通りあるから，求める確率は

$$\boldsymbol{P_2 = \frac{7}{64}}$$

(2)　3回後にゴールに到達するのは，
2回後に k マス目 $(k = 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$ に到達し (確率 $1 - P_2$)，
3回目のルーレットで $(10 - k)$ が出て (確率 $1/8$) ゴールに到達するときである。
よって，確率は

$$\begin{aligned} P_3 &= (1 - P_2) \times \frac{1}{8} \\ &= \left(1 - \frac{7}{64}\right) \times \frac{1}{8} \\ &= \boldsymbol{\frac{57}{512}} \end{aligned}$$

(3)　$n\ (\geqq 4)$ 回後にゴールに到達するのは，
2回後までにゴールに到達せず (確率 $1 - P_2$)，
3回目 $\sim n-1$ 回目で到達せず (確率 $(7/8)^{n-3}$)，
n 回目にちょうどゴールに到達する数字が出る (確率 $1/8$)
をすべて満たす場合だから，求める確率は

$$\begin{aligned} P_n &= (1 - P_2) \times \left(\frac{7}{8}\right)^{n-3} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{57}{512}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-3} \\ &= \boldsymbol{\frac{57 \cdot 7^{n-3}}{8^n}} \end{aligned}$$

4

　xy 平面上に，焦点が F(0, 1)，準線が $y=-1$ である放物線 m がある。m 上の点 P(P_x, P_y) を中心として準線 $y=-1$ に接する円を C とし，点 P における m の接線と C の交点のうち原点に近い点を Q，C と y 軸との交点のうち F ではない方を A とする。
$\angle\mathrm{QPF}=\theta$ として，以下の問いに答えよ。

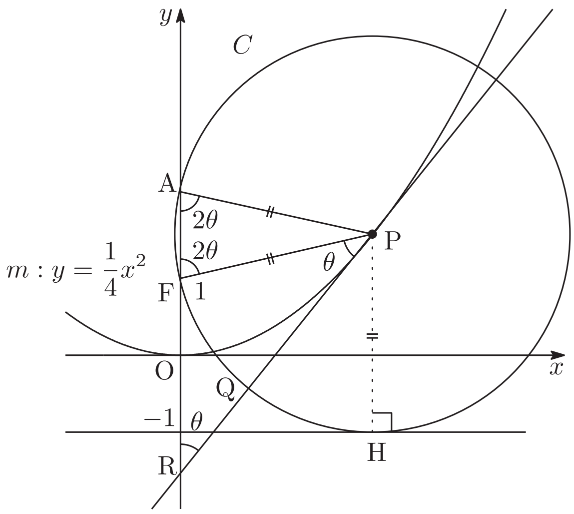
(1)　放物線 m の方程式を求めよ。

(2)　扇型 PQF の面積 S_1 を p_y，θ を用いて表せ。

(3)　三角形 APF の面積 S_2 を p_y，θ を用いて表せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{p_x\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

解答



(1)　求める放物線上の点を K(x, y)，K から準線 $y=-1$ に下ろした垂線の足を H とすると，
放物線の定義より

$$\mathrm{KF}=\mathrm{KH}$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y-(-1)|$$

両辺は共に 0 以上だから，両辺を 2 乗しても同値であり

$$x^2+(y-1)^2=|y+1|^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=\frac{1}{4}x^2}$$

(2)　(C の半径) $=\mathrm{PH}=P_y+1$ であるから

$$S_1=\frac{1}{2}(\text{半径})^2\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}(P_y+1)^2\theta}$$

(3)　P における m の接線 l と y 軸との交点を R とすると，

$$\angle\mathrm{FRP}=\angle\mathrm{FPR}=\theta$$

であるから (→ (注意 1))，

$$\angle\mathrm{PFA}=\angle\mathrm{PAF}=2\theta$$

したがって，

$\angle \mathrm{FPA} = \pi - 4\theta$ とわかる。

よって，

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{PF} \cdot \mathrm{PA} \cdot \sin(\angle \mathrm{FPA})$$
$$= \frac{1}{2}(P_y + 1)^2 \sin(\pi - 4\theta)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(P_y + 1)^2 \sin 4\theta} \quad (\to (\text{注意 } 2))$$

(注意 1)　m の P における接線の方程式は $y = \dfrac{1}{2}P_x x - P_y$ だから $\mathrm{R}(0,\ -P_y)$

したがって

$$\begin{cases} \mathrm{FR} = 1 - (-P_y) = 1 + P_y \\ \mathrm{FP} = \mathrm{PH} = P_y - (-1) = 1 + P_y \end{cases}$$

であるから，$\triangle\mathrm{FRP}$ は $\mathrm{FR} = \mathrm{FP}$ の二等辺三角形。

$$\therefore\ \angle \mathrm{FRP} = \angle \mathrm{FPR}$$

(注意 2)　この表現以外にも，$S_2 = 2\sqrt{P_y}\,|P_y - 1|$ など，複数の表し方が存在する。

(4)　$P_x \to \infty$ のとき，$\theta \to +0$ であることに注意すると，

$$\lim_{P_x \to \infty} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{\theta \to +0} \frac{\frac{1}{2}(P_y + 1)^2 \sin 4\theta}{\frac{1}{2}(P_y + 1)^2 \theta}$$
$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{\sin 4\theta}{\theta}$$
$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{\sin 4\theta}{4\theta} \cdot 4$$
$$= \mathbf{4}$$

講評

1［ベクトル，式と証明］(標準)
すべての大問の中で最もやりやすい問題であった。ここでいかにとれるかが勝負になるかもしれない。

2［数列］（やや難）
a_{n+1} を 2 通りで表せる問題で，経験がないと厳しい問いもあった。

3［確率］（やや難）
素直に丁寧に計算していきたい。ただし，時間を考えると落ち着いて解くのは厳しいかもしれない。

4［2 次曲線］（やや難）
(3) は 2 次曲線の性質に関する出題であったが，S_2 は P_y だけでも表せてしまうので戸惑ったかもしれない。

昨年度よりかなり難化した。大問 1 で完答を目指し，大問 2〜4 は前半は確実にとっていきたい。40% 程度で他科目次第では十分に勝負できるのではないだろうか。