

## 順天堂大学医学部 数学

2022年 2月3日実施

I  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

(1) 関数  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  について、以下の問に答えよ。

(a)  $f(a) = \frac{1}{2}$  のとき、 $f(-a) = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ 、 $f(2a) = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$  である。

(b)  $f'(x) = \text{カ} - \{f(x)\} \text{キ}$  が成り立つ。

$f(b) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  のとき、 $f'(b) = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$  である。

(c) 方程式  $3\{f(x)\}^2 - 5f(x) - 2 = 0$  の解は  $x = \frac{\text{コサ}}{\text{シ}} \log \text{ス}$  である。

### 解答

(1)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(a)  $f(-a) = \frac{e^{-a} - e^a}{e^{-a} + e^a} = -f(a) = \frac{-1}{2}$

また、 $f(a) = \frac{1}{2}$  のとき

$$\frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \frac{1}{2}$$

$$2e^a - 2e^{-a} = e^a + e^{-a}$$

$$e^a - 3e^{-a} = 0$$

$$\therefore e^{2a} = 3$$

であるから、

$$f(2a) = \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{e^{2a} + e^{-2a}}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{5}$$

(b)  $f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$$= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= 1 - \{f(x)\}^2$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} f'(b) &= 1 - \{f(b)\}^2 \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(c)  $f(x) = X$  とおくと

$$3\{f(x)\}^2 - 5f(x) - 2 = 0$$

$$3X^2 - 5X - 2 = 0$$

$$(3X + 1)(X - 2) = 0$$

$$\therefore X = -\frac{1}{3} \text{ または } X = 2$$

$X = -\frac{1}{3}$  のとき

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\frac{1}{3}$$

$$3(e^x - e^{-x}) = -(e^x + e^{-x})$$

$$e^{2x} = \frac{1}{2}$$

$$e^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log 2$$

$X = 2$  のとき

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2$$

$$e^x - e^{-x} = 2(e^x + e^{-x})$$

$$e^{2x} = -3$$

$\therefore$  解なし

以上により,  $x = -\frac{1}{2} \log 2$

I  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

- (2) 見分けのつかない 3 枚のコイン A, B, C がある。コイン A は表の出る確率と裏の出る確率がともに  $\frac{1}{2}$ , コイン B は表の出る確率が  $\frac{1}{3}$  で裏の出る確率が  $\frac{2}{3}$ , コイン C は表の出る確率が  $\frac{1}{6}$  で裏の出る確率が  $\frac{5}{6}$  である。  
これら 3 枚のコインから 1 枚を選んだ。

(a) 選んだコインを 1 回投げると表が出た。選んだコインが A である確率は  $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$  となり、B である確率は

は  $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$  となる。

(b) さらにもう 1 回投げると 2 回目も表が出た。選んだコインが A である確率は  $\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}$  となり、B である

確率は  $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$  となる。

(c) さらにもう 1 回投げると 3 回目は裏が出た。選んだコインが A である確率は  $\frac{\text{コ}}{\text{サシ}}$  となり、B である

確率は  $\frac{\text{ス}}{\text{セ}}$  となる。

**解答**

事象  $X$  が起こる確率を  $P(X)$  で表す。

- (2) (a) 「選んだコインを投げて表が出る」という事象を  $F_1$ ,  
「選んだコインが A である」という事象を  $A$ ,  
「選んだコインが B である」という事象を  $B$ ,  
とすると、求める確率は  $P_{F_1}(A)$  と  $P_{F_1}(B)$  である。

$$P_{F_1}(A) = \frac{P(A \cap F_1)}{P(F_1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{3}{3+2+1} = \frac{1}{2}$$

同様にして、

$$P_{F_1}(B) = \frac{P(B \cap F_1)}{P(F_1)} = \frac{2}{3+2+1} = \frac{1}{3}$$

- (b) 「選んだコインを 2 回投げて表表が出る」という事象を  $F_2$  とすると、  
求める確率は  $P_{F_2}(A)$  と  $P_{F_2}(B)$  である。

$$P_{F_2}(A) = \frac{P(A \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{9}{9+4+1} = \frac{9}{14}$$

同様にして、

$$P_{F_2}(B) = \frac{P(B \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{4}{9+4+1} = \frac{2}{7}$$

- (c) 「選んだコインを 3 回投げて表表裏が出る」という事象を  $F_3$  とすると、  
求める確率は  $P_{F_3}(A)$  と  $P_{F_3}(B)$  である。

$$P_{F_3}(A) = \frac{P(A \cap F_3)}{P(F_3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{27}{27 + 16 + 5} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}$$

同様にして,

$$P_{F_3}(B) = \frac{P(B \cap F_3)}{P(F_3)} = \frac{16}{27 + 16 + 5} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

I  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

(3) 方程式  $x^3 + 9x + 6 = 0$  において、 $x = y - \frac{\text{ア}}{y}$  の置き換えを行うと

$y^3 - \frac{\text{イウ}}{y^3} + 6 = 0$  となる。これを解いて  $y^3 = \text{エ}$  ,  オカ を得る。これより、方程式  $x^3 + 9x + 6 = 0$

の解は 1 の 3 乗根の一つである  $\omega = \frac{\text{キク} + \sqrt{\text{ケ}} i}{\text{コ}}$  を用いて、

$x = \sqrt[3]{\text{サ}} - \sqrt[3]{\text{シ}}$  ,  $\sqrt[3]{\text{ス}} \omega - \sqrt[3]{\text{セ}} \omega^2$  ,  $\sqrt[3]{\text{ソ}} \omega^2 - \sqrt[3]{\text{タ}} \omega$  と表される。

**解答**

(3)  $x^3 + 9x + 6 = 0 \dots\dots\dots \text{①}$  において  $x = y - \frac{a}{y}$  とおくと、

$$\left(y - \frac{a}{y}\right)^3 + 9\left(y - \frac{a}{y}\right) + 6 = 0$$

$$\left(y^3 - 3ay + \frac{3a^2}{y} - \frac{a^3}{y^3}\right) + 9\left(y - \frac{a}{y}\right) + 6 = 0$$

$$y^3 - \frac{a^3}{y^3} + (-3a + 9)y + \frac{3a^2 - 9a}{y} + 6 = 0 \dots\dots\dots \text{②}$$

②で  $y$  の項と  $\frac{1}{y}$  の項が消えるような  $a$  を求めたいので、

$$\begin{cases} -3a + 9 = 0 \\ 3a^2 - 9a = 0 \end{cases}$$

をともに満たすような  $a$  を求めると、 $a = 3$

したがって、 $x = y - \frac{3}{y}$  とおくと、①は

$$y^3 - \frac{27}{y^3} + 6 = 0$$

となる。これを  $y^3$  の方程式と考えて解くと

$$(y^3)^2 + 6y^3 - 27 = 0$$

$$(y^3 - 3)(y^3 + 9) = 0$$

$$\therefore y^3 = 3, -9$$

ここで、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  とすると、 $z^3 = 1$  の 3 解は 1,  $\omega$ ,  $\omega^2$  であるから、 $y^3 = 3 \iff \left(\frac{y}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 = 1$  の 3

解は  $\frac{y}{\sqrt[3]{3}} = 1, \omega, \omega^2 \iff y = \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\omega, \sqrt[3]{3}\omega^2$  である。したがって、 $x = y - \frac{3}{y}$  より、 $\omega^3 = 1$  を用いて

$$y = \sqrt[3]{3} \text{ のとき, } x = \sqrt[3]{3} - \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$$

$$y = \sqrt[3]{3}\omega \text{ のとき, } x = \sqrt[3]{3}\omega - \frac{3}{\sqrt[3]{3}\omega} = \sqrt[3]{3}\omega - \frac{3\omega^2}{\sqrt[3]{3}\omega^3} = \sqrt[3]{3}\omega - \sqrt[3]{9}\omega^2$$

$$y = \sqrt[3]{3}\omega^2 \text{ のとき, } x = \sqrt[3]{3}\omega^2 - \frac{3}{\sqrt[3]{3}\omega^2} = \sqrt[3]{3}\omega^2 - \frac{3\omega}{\sqrt[3]{3}\omega^3} = \sqrt[3]{3}\omega^2 - \sqrt[3]{9}\omega$$

同様に、 $y^3 = -9 \iff \left(\frac{y}{\sqrt[3]{-9}}\right)^3 = 1$  の 3 解は  $\frac{y}{\sqrt[3]{-9}} = 1, \omega, \omega^2 \iff y = \sqrt[3]{-9}, \sqrt[3]{-9}\omega, \sqrt[3]{-9}\omega^2$

であるから

$$y = \sqrt[3]{-9} \text{ のとき, } x = \sqrt[3]{-9} - \frac{3}{\sqrt[3]{-9}} = -\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$$

$$y = \sqrt[3]{-9}\omega \text{ のとき, } x = \sqrt[3]{-9}\omega - \frac{3}{\sqrt[3]{-9}\omega} = -\sqrt[3]{9}\omega + \frac{3\omega^2}{\sqrt[3]{9}\omega^3} = -\sqrt[3]{9}\omega + \sqrt[3]{3}\omega^2$$

$$y = \sqrt[3]{-9}\omega^2 \text{ のとき, } x = \sqrt[3]{-9}\omega^2 - \frac{3}{\sqrt[3]{-9}\omega^2} = -\sqrt[3]{9}\omega^2 + \frac{3\omega}{\sqrt[3]{9}\omega^3} = -\sqrt[3]{9}\omega^2 + \sqrt[3]{3}\omega$$

よって、方程式  $x^3 + 9x + 6 = 0$  の解は、

1 の 3 乗根 ( $z^3 = 1$  の解) の 1 つである  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  を用いて、

$$x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{3}\omega - \sqrt[3]{9}\omega^2, \sqrt[3]{3}\omega^2 - \sqrt[3]{9}\omega$$

と表される。

Ⅱ  に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の  がある場合は同一の値が入る。

4次関数  $y = f(x)$  のグラフで表される曲線  $C$  と直線  $l$  について、次のような条件 A を考える。

条件 A: 曲線  $C$  と直線  $l$  が  $x = x_1, x_2, x_3, x_4$  ( $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ) で交点を持ち、曲線  $C$  と直線  $l$  で囲まれた図形の3つの部分の面積について、 $S_1 = S_3$  と  $S_1 + S_3 = S_2$  が成り立つ。ここで、 $S_1, S_2, S_3$  はそれぞれ  $x_1 \leq x \leq x_2, x_2 \leq x \leq x_3, x_3 \leq x \leq x_4$  を満たす部分の面積を表す。

- (a) 曲線  $y = g(x) = x^4 - \frac{18}{5}x^2 + a$  と直線  $y = 0$  が条件 A を満たすとする。このとき、 $x_3 = b, x_4 = c$  とおくと、

$$\int_0^c g(x)dx = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}c^5 - \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}c^3 + ac = \text{オ} \text{ となり,}$$

$$a = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}, b = \frac{\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}, c = \sqrt{\text{サ}} \text{ となる。}$$

- (b) 曲線  $y = h(x) = x^4 + 4x^3 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{5}$  に対して条件 A を満たす直線の方程式を求めよう。

まず、 $h(x) = (x+d)^4 - \frac{\text{シス}}{\text{セ}}(x+d)^2 + \text{ソ}(x+d) + \text{タ}$  と変形する。ただし、 $d = \text{チ}$  である。

ここで、 $h_1(x) = (x+d)^4 - \frac{\text{シス}}{\text{セ}}(x+d)^2$  とおくと、曲線  $y = h_1(x)$  に対して条件 A を満たす直線の方程式

は  $y = \frac{\text{ツテ}}{\text{ト}}$  である。したがって、求める直線の方程式は  $y = \text{ナ}x + \frac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}$  である。

- (c) 曲線  $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$  に対して条件 A を満たす直線の方程式は

$$y = \text{ノ}x + \frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}} \text{ である。}$$

**解答**

- (a)  $g(-x) = g(x)$  より  $y = g(x)$  は偶関数であるから、条件 A を満たすとき、 $\frac{S_2}{2} = S_3$  であるので、 $\int_0^c g(x)dx = 0$  である。よって

$$\int_0^c g(x)dx = \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^3 + ax \right]_0^c = \frac{1}{5}c^5 - \frac{6}{5}c^3 + ac = 0 \quad \dots \text{①}$$

ここで、 $y = g(x)$  が偶関数であることより、 $g(x) = 0$  の4解は  $-c, -b, b, c$  であるから、 $x^2 = X$  とおくととき、 $g(x) = 0 \iff X^2 - \frac{18}{5}X + a = 0$  の  $X$  の2解が  $b^2, c^2$  である。したがって、解と係数の関係より

$$b^2 + c^2 = \frac{18}{5}, b^2c^2 = a \quad \dots \text{②}$$

①②を  $b > 0, c > 0$  に注意して解いて

$$a = \frac{9}{5}, b = \frac{\sqrt{15}}{5}, c = \sqrt{3}$$

(b)  $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$  に注意して

$$\begin{aligned} h(x) &= (x+1)^4 - (6x^2 + 4x + 1) + \frac{12}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{5} \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{7}{5} \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + \frac{18}{5}(2x+1) - \frac{26}{5}x + \frac{7}{5} \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + 2x + 5 \\ &= (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + 2(x+1) + 3 \end{aligned}$$

ここで,  $y = h_1(x) = (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2$  は  $y = g(x)$  を  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $a \left( = -\frac{9}{5} \right)$  だけ平行移動したグラフであり,  $y = g(x)$  に対して条件 A を満たす直線の方程式が  $y = 0$  であることから,  $y = h_1(x)$  に対して条件 A を満たす直線の方程式は  $y = -\frac{9}{5}$  である。

さて,  $l: y = mx + n$  とすると, 条件 A により, 一般的に

$$\int_{x_1}^{x_4} \{f(x) - (mx + n)\} dx = 0$$

が成立するので,  $f(x) = h_1(x)$  のとき

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_4} \left\{ h_1(x) - \left( -\frac{9}{5} \right) \right\} dx = 0 \\ \iff &\int_{x_1}^{x_4} \left\{ (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + \frac{9}{5} \right\} dx = 0 \\ \iff &\int_{x_1}^{x_4} \left\{ (x+1)^4 - \frac{18}{5}(x+1)^2 + 2(x+1) + 3 - 2(x+1) - 3 + \frac{9}{5} \right\} dx = 0 \\ \iff &\int_{x_1}^{x_4} \left\{ h(x) - \left( 2x + \frac{16}{5} \right) \right\} dx = 0 \end{aligned}$$

よって,  $y = h(x)$  に対して条件 A を満たす直線の方程式は  $y = 2x + \frac{16}{5}$  である。

(c) まず,  $y = h_2(x) = x^4 - 3x^2 + p$  に対して条件 A を満たす直線の方程式を  $y = 0$  とする。  $x_3 = q$ ,  $x_4 = r$  とおくと, (a) と同様にして

$$\frac{r^5}{5} - r^3 + pr = 0, \quad q^2 + r^2 = 3, \quad q^2 r^2 = p$$

が成立するので,  $q > 0$ ,  $r > 0$  に注意して解いて

$$p = \frac{5}{4}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

続いて,  $y = h_2(x)$  に対して条件 A を満たす直線の方程式は  $y = 0$  であるので,  $h_3(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$  と



すると, (b) と同様にして

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_4} \{h_2(x) - 0\} dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{x_1}^{x_4} \left(x^4 - 3x^2 + \frac{5}{4}\right) dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{x_1}^{x_4} \left\{x^4 - 3x^2 + 2x + 2 - 2x - 2 + \frac{5}{4}\right\} dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{x_1}^{x_4} \left\{h_3(x) - \left(2x + \frac{3}{4}\right)\right\} dx = 0 \end{aligned}$$

よって,  $y = h_3(x)$  に対して条件 A を満たす直線の方程式は  $y = 2x + \frac{3}{4}$  である。

III

四面体 OABC において、点 O と面 ABC の距離が 20、点 A と面 OBC の距離が 15、点 B と面 OCA の距離が 12、点 C と面 OAB の距離が 20 である。 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とし、 $\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$  と表される点 P について、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が面 ABC 上にあるための必要十分条件を  $s, t, u$  を用いて表せ。
- (2) 点 P が四面体 OABC の内部にあり、直線 OP と面 ABC の交点を D とする。 $\vec{OD}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  で表し、OD:PD を求めよ。
- (3) 点 P が四面体 OABC の内部にあり、直線 AP と面 OBC の交点を E とする。 $\vec{OE}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  で表し、AE:PE を求めよ。
- (4) 点 P が四面体 OABC の内接球の中心であるときの  $s, t, u$  を求め、 $\vec{OP}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  で表せ。

解答

(1) 点 P が面 ABC 上にあるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= p\vec{AB} + q\vec{AC}, \quad p + q \leq 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0 \text{ を満たす実数 } p, q \text{ が存在する} \\ \iff \vec{OP} &= (1 - p - q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}, \quad p + q \leq 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0 \text{ を満たす実数 } p, q \text{ が存在する} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、 $\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$  であり、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は同一平面上にないので、 $1 - p - q = s, p = t, q = u \iff s + t + u = 1, p = t, q = u$  である。このとき、①の  $p, q$  が存在する条件は

$$1 - s \leq 1, \quad t \geq 0, \quad u \geq 0 \iff s \geq 0, \quad t \geq 0, \quad u \geq 0$$

よって、点 P が面 ABC 上にあるための必要十分条件を  $s, t, u$  を用いて表すと

$$s + t + u = 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0, \quad u \geq 0$$

(2) 点 P が線分 OD 上にあることより、実数  $k$  ( $k > 0$ ) を用いて

$$\vec{OD} = k\vec{OP} \quad \therefore \vec{OD} = k(s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \quad \dots \textcircled{2}$$

点 D は面 ABC 上の点なので、(1) より

$$k(s + t + u) = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{s + t + u} \quad (\because k > 0 \text{ より}, s + t + u > 0)$$

よって、②より

$$\vec{OD} = \frac{s}{s + t + u} \vec{a} + \frac{t}{s + t + u} \vec{b} + \frac{u}{s + t + u} \vec{c}$$

また、 $k = \frac{1}{s + t + u}$  より、 $OP:OD = 1 : \frac{1}{s + t + u} = s + t + u : 1$  なので

$$OD : DP = 1 : 1 - (s + t + u)$$

(3) 点 P が線分 AE 上にあることより、実数  $l$  ( $l > 0$ ) を用いて

$$\vec{AE} = l\vec{AP} \quad \therefore \vec{OE} = \{1 - l(1 - s)\} \vec{a} + lt\vec{b} + lu\vec{c} \quad \dots \textcircled{3}$$

点 E は面 OBC 上の点なので, (1) より

$$1 - l(1 - s) = 0 \quad \therefore l = \frac{1}{1 - s} \quad (\because l > 0 \text{ より}, 1 - s > 0)$$

よって, ③ より

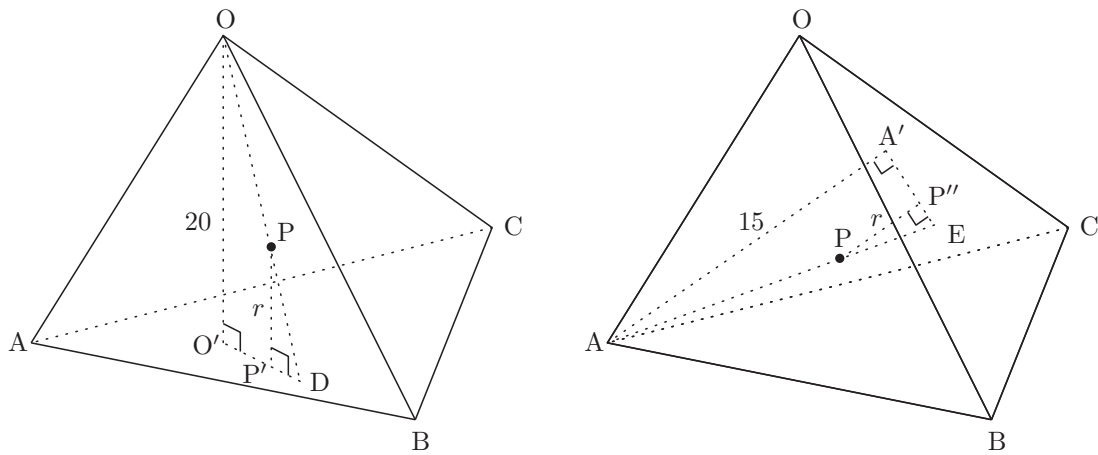
$$\vec{OE} = \frac{t}{1 - s} \vec{b} + \frac{u}{1 - s} \vec{c}$$

また,  $l = \frac{1}{1 - s}$  より,  $AP:AE = 1 : \frac{1}{1 - s} = 1 - s : 1$  なので

$$AE : PE = 1 : s$$

(4) 内接球の半径を  $r$  とする。下左図のように点 O, P から面 ABC に下ろした垂線の足をそれぞれ  $O'$ ,  $P'$  とする。このとき,  $\triangle OO'D$  と  $\triangle PP'D$  が相似であることより, (2) を用いて

$$OO' : PP' = OD : PD \iff 20 : r = 1 : 1 - (s + t + u) \iff r = 20 - 20(s + t + u) \quad \dots \textcircled{4}$$



また, 上右図のように点 A, P から面 OBC に下ろした垂線の足をそれぞれ  $A'$ ,  $P''$  とする。このとき,  $\triangle AA'E$  と  $\triangle PP''E$  が相似であることより, (3) を用いて

$$AA' : PP'' = AE : PE \iff 15 : r = 1 : s \iff r = 15s \quad \dots \textcircled{5}$$

面 OCA, 面 OAB についても同様に考えると

$$r = 12t \quad \dots \textcircled{6}, \quad r = 20u \quad \dots \textcircled{7}$$

したがって, ④~⑦より,  $s, t, u$  を消去して  $r$  を求めると

$$r = 20 - 20 \left( \frac{r}{15} + \frac{r}{12} + \frac{r}{20} \right) \iff r = 4$$

⑤~⑦より,  $(s, t, u) = \left( \frac{4}{15}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right)$  である。

よって

$$\vec{OP} = \frac{4}{15} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{5} \vec{c}$$

## 講評

## I [(1) 数Ⅲ微分法, (2) 場合の数と確率, (3) 複素数と方程式] (やや易)

全体的に取り組みやすい小問であり、昨年度より計算量も少なかった。しっかりと得点したい問題も多く、ここでどれだけ稼げるかが合否を分ける可能性がある。

## II [積分法] (標準)

見慣れない出題であるが、誘導に適切に乗れば難しい問題ではない。2021 年度も積分に関する似たような誘導タイプの問題が出題されている。素早く的確に読解できたが重要であろう。

## III [空間ベクトル] (標準)

(1)~(3) は基本問題である。教科書の内容をしっかりと理解していれば全く問題なくできたであろう。逆にここで落とした場合、差をつけられてしまう可能性がある。(4) は (2)(3) の誘導の意味に気付けたかが勝負の分かれ目だろう。

例年出題されている III の証明がなく、数Ⅲからの出題も少なく計算量も減った。全体的には易化したと言えるが、70 分という時間の中では厳しいことになり変わりなく 1 つの問題に固執し過ぎず解き進める必要がある。I は全完を目指し、II III でも点数を稼ぎたい。一次突破ラインは 65~70% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校

**YMS**

heart of medicine

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>

東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校

**メビオ**

☎ 0120-146-156

<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校

**英進館メビオ** 福岡校

☎ 0120-192-215

<https://www.mebio-eishinkan.com/>



友だち追加で全科目を閲覧!

**LINE 公式アカウント**

◀ YMS の友だち登録はこちらから