解答速報

慶應義塾大学医学部　数学

2022年 2月19日実施

［I］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1)　方程式 $4\left||x|-1\right| = x+2$ の解をすべて求めると $x=$ $\boxed{(あ)}$ となる。

(2)　整式 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ は, 整数を係数とし, 次数が 1 以上で, かつ最高次の項の係数が 1 であるような 3 つの整式 $\boxed{(い)}$, $\boxed{(う)}$, $\boxed{(え)}$ の積に因数分解される。

(3)　関数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3x^3-2x^2}$ と $g(x) = \log_9 \left(3x^2-2\right)$ の定義域をそれぞれ集合 $A,\ B$ で表すと, $A \cap B = \{x \mid x$ は $x >$ $\boxed{お}$ をみたす実数 $\}$ である。実数 x が集合 $A \cap B$ の要素であるとき, $f(x)+g(x)<0$ となるための条件は, $\boxed{(お)}$ $< x <$ $\boxed{(か)}$ または $x >$ $\boxed{(き)}$ となることである。

(4)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ (ただし $a_1 \fallingdotseq 0$ かつ $a_1 \fallingdotseq 1$) に対して 1 次関数 $f_n(x) = a_n x + b_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ を定める。また, $\alpha = a_1,\ \beta = b_1$ とおく。すべての自然数 n に対して $(f_n \circ f_1)(x) = f_{n+1}(x)$ が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を α と β の式で表すと $a_n =$ $\boxed{(く)}$, $b_n =$ $\boxed{(け)}$ となる。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$4\left||x|-1\right| = x+2$

(左辺)$\geqq 0$ であるから　$x \geqq -2$

$x \geqq -2$ において　$4(|x|-1) = \pm(x+2)$

（i）　$x \geqq 0$ において　　$4(x-1) = \pm(x+2)$

これを解いて　$x = \dfrac{2}{5},\ 2$（$x \geqq 0$ をみたす）

（ii）　$-2 \leqq x \leqq 0$ において　　$4(-x-1) = \pm(x+2)$

これを解いて　$x = -\dfrac{6}{5},\ -\dfrac{2}{3}$（$-2 \leqq x \leqq 0$ をみたす）

（i）(ii) より $x = \boldsymbol{-\dfrac{6}{5},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{5},\ 2}$

(2)

$$\begin{aligned}
&x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
=&x^4(x+1)+x^2(x+1)+x+1\\
=&(x+1)\left(x^4+x^2+1\right)\\
=&(x+1)\left\{\left(x^2+1\right)^2-x^2\right\}\\
=&(x+1)\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)\\
=&\boldsymbol{(x+1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}
\end{aligned}$$

(3)　$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3x^3-2x^2}$, $g(x)=\log_9\left(3x^2-2\right)$

真数条件より，$3x^3-2x^2>0$，かつ $3x^2-2>0$ が成り立つ。

$3x^3-2x^2>0 \iff x^2(3x-2)>0$　よって $x>\dfrac{2}{3}$

$3x^2-2>0 \iff x<-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}<x$

ゆえに, 定義域は $x>\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

$x>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ において，$f(x)+g(x)<0$ となる x のとりうる値の範囲を求める。

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3x^3-2x^2}+\log_9\left(3x^2-2\right)<0\\
\iff&\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(3x^3-2x^2\right)+\log_9\left(3x^2-2\right)<0\\
\iff&\frac{1}{2}\frac{\log_9\left(3x^3-2x^2\right)}{\log_9\frac{1}{3}}+\log_9\left(3x^2-2\right)<0\\
\iff&-\log_9\left(3x^3-2x^2\right)+\log_9\left(3x^2-2\right)<0\\
\iff&\log_9\left(3x^2-2\right)<\log_9\left(3x^3-2x^2\right)\\
\iff&3x^2-2<3x^3-2x^2\quad(\because\ \text{底が 1 より大きい})\\
\iff&0<3x^3-5x^2+2\\
\iff&0<(x-1)\left(3x^2-2x-2\right)
\end{aligned}$$

よって，これを解くと $\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}<x<1,\ \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}<x$

$x>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であるから $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}<x<1,\ \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}<x}$

(4)　$f_n(x)=a_nx+b_n$, $a_1=\alpha$, $b_1=\beta$ より $f_1(x)=a_1x+b_1=\alpha x+\beta$

ここで

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x)=&\left(f_n\circ f_1\right)(x)\\
=&f_n\left(f_1(x)\right)\\
=&a_nf_1(x)+b_n\\
=&\alpha a_nx+\beta a_n+b_n
\end{aligned}$$

$f_{n+1}(x)=a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるので，すべての自然数 n で $\alpha a_nx+\beta a_n+b_n=a_{n+1}x+b_{n+1}$ が成り立つ。し

たがって

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha a_n \\ b_{n+1} = \beta a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つ。
数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \alpha$，公比 α の等比数列であるから

$$a_n = \boldsymbol{\alpha^n}$$

よって $b_{n+1} = b_n + \beta\alpha^n$ であるから，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項が $\beta\alpha^n$ であるので，$n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} b_n =& b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta\alpha^k \\ =& \beta + \alpha\beta \cdot \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \ (\because \alpha \fallingdotseq 1) \\ =& \beta + \frac{\alpha\beta - \beta\alpha^n}{1-\alpha} \\ =& \boldsymbol{\frac{\beta\left(1-\alpha^n\right)}{1-\alpha}} \quad (n = 1 \text{ のときも成り立つ}) \end{aligned}$$

[II]

以下の文章の空欄に適切な式を入れて文章を完成させなさい。ただし (い)〜(か) に記入する式は文字 n についての分数式で，可能な限り約分され，また分母と分子は可能な限り実数の範囲で因数分解されたものとする。

$2n$ 個の玉があり, そのうち k 個は赤, 他は白とする。ただし $n > k > 1$ である。また袋 A, B が用意されているとする。

(1) $2n$ 個の玉から n 個を無作為に選んで袋 A に入れ，残りを袋 B に入れる。袋 A に i 個 $(0 \leqq i \leqq k)$ の赤玉が入る確率を $p(n,\ k,\ i)$ とおく。k と i を固定して $n \to \infty$ とするときの $p(n,\ k,\ i)$ の極限値を k と i の式で表すと $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p(n,\ k,\ i) = \boxed{(あ)}$ となる。また $n > 3$ のとき $p(n,\ 3,\ 1) = \boxed{(い)}$ である。

以下 $n > k = 3$ として，袋 A に赤玉が 1 個，袋 B に赤玉が 2 個入っている状態を状態 S と呼ぶ。また袋 A, B のそれぞれから同時に玉を 1 個ずつ無作為に取り出して，玉が入っていた袋と逆の袋に入れる操作を操作 T と呼ぶ。

(2) 状態 S から始めて操作 T を 1 回行なった後で袋 A から玉を 1 個無作為に取り出すとき，取り出した玉が赤玉である確率は $\boxed{(う)}$ である。また，取り出した玉が赤玉だったとき，操作 T 終了後に袋 A に赤玉が 2 個入っていた条件つき確率は $\boxed{(え)}$ である。

(3) 状態 S から始めて操作 T を 3 回繰り返し行なった後に，袋 A に赤玉が 3 個入っている確率は $\boxed{(お)}$ である。

(4) 状態 S から始めて袋 A，B のそれぞれから同時に玉を 3 個ずつ無作為に取り出して，それらを玉が入っていた袋と逆の袋に入れた後に, 袋 A に赤玉が 3 個入っている確率は $\boxed{(か)}$ である。

解答

(1)
$$p(n,\ k,\ i) = \frac{{}_k\mathrm{C}_i \cdot {}_{2n-k}\mathrm{C}_{n-i}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p(n,\ k,\ i) &= \lim_{n\to\infty} \frac{{}_k\mathrm{C}_i \cdot {}_{2n-k}\mathrm{C}_{n-i}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \\
&= {}_k\mathrm{C}_i \lim_{n\to\infty} \frac{{}_{2n-k}\mathrm{C}_{n-i}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \\
&= {}_k\mathrm{C}_i \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-k)!}{(n-i)!\cdot(n-k+i)!} \cdot \frac{n!\cdot n!}{(2n)!} \\
&= {}_k\mathrm{C}_i \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-k)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!\cdot n!}{(n-i)!\cdot(n-k+i)!} \\
&= {}_k\mathrm{C}_i \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}^{i\text{ 個}} \times \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+i+1)}^{k-i\text{ 個}}}{\underbrace{(2n)(2n-1)\cdots(2n-k+1)}_{k\text{ 個}}} \\
&= {}_k\mathrm{C}_i \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \times 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-i-1}{n}\right)}{2\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{k-1}{n}\right)} \\
&= {}_k\mathrm{C}_i \cdot \frac{1}{2^k} = \boldsymbol{\frac{{}_k\mathrm{C}_i}{2^k}}
\end{aligned}$$

また，

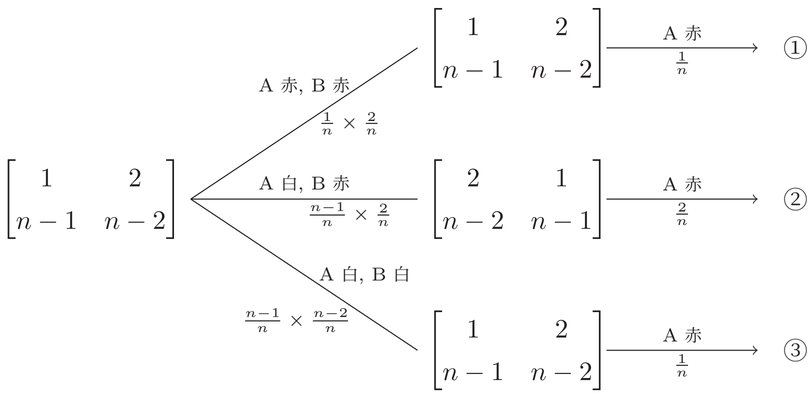
$$
\begin{aligned}
p(n,\ 3,\ 1) &= \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_{2n-3}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \\
&= 3 \cdot \frac{(2n-3)!}{(n-1)! \cdot (n-2)!} \times \frac{n! \cdot n!}{(2n)!} \\
&= 3 \cdot \frac{n \times n(n-1)}{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)} \\
&= \boldsymbol{\frac{3n}{4(2n-1)}}
\end{aligned}
$$

(2)　以下，袋 A に赤玉が x 個，白玉が y 個入っていて，袋 B に赤玉 z 個，白玉 w 個入っている状況を

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{array} \\
\begin{array}{c} 赤 \\ 白 \end{array} & \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}
\end{array}
$$

と表すことにする。

状態 S から始めて操作 T を 1 回行った後で袋 A から赤玉を取り出すのは,
次の①②③の場合である。



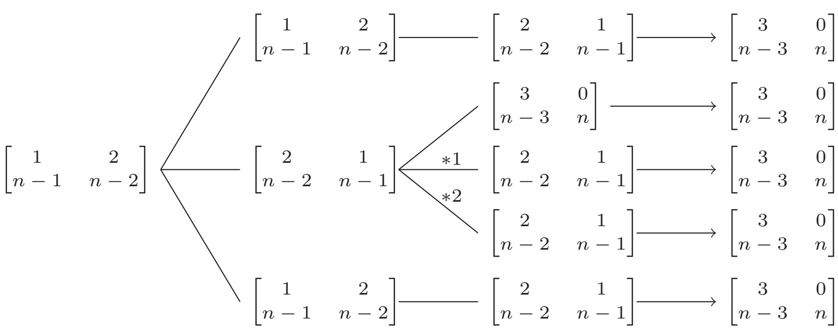
よって，求める確率は

$$
\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \boldsymbol{\frac{n+1}{n^2}}
$$

また，取り出した玉が赤玉だったとき，操作 T 終了後に袋 A に赤玉が 2 個入っていた条件つき確率は

$$
\frac{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n}}{\frac{n+1}{n^2}} = \boldsymbol{\frac{4(n-1)}{n(n+1)}}
$$

(3)　状態 S から始めて操作 T を 3 回おこなった後，袋 A に赤玉が 3 個入っているのは，次の場合である。



$*1$：A 赤,B 赤，$*2$：A 白,B 白

よって，求める確率は

$$\frac{1\cdot 2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot 2}{n^2}\cdot\frac{(n-2)\cdot 1}{n^2}$$
$$+\frac{(n-1)\cdot 2}{n^2}\left\{\frac{(n-2)\cdot 1}{n^2}\cdot\frac{(n-3)n}{n^2}+\frac{2\cdot 1}{n^2}\cdot\frac{(n-2)\cdot 1}{n^2}+\frac{(n-2)(n-1)}{n^2}\cdot\frac{(n-2)\cdot 1}{n^2}\right\}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot 2}{n^2}\cdot\frac{(n-2)\cdot 1}{n^2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+8)}{n^6}}$$

(4)　条件を満たすのは，A からは白 3 個を取り出し，B からは赤 2 個と白 1 個を取り出すときだから，求める確率は

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\frac{6(n-3)}{n^2(n-1)}}$$

[III]

以下の文章の空欄に適切な数，式または語句を入れて文章を完成させなさい。ただし，空欄 (う)，(え)，(お)，(か)，(く) には選択肢より適切なものを選んで記入し，空欄 (け) には文字 a，θ の式を記入しなさい。

(1)　座標平面の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を，点 $\mathrm{T}(s,\ t)$ を中心として反時計回りに角 α だけ回転させるときに，点 P が点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ に移るとする。x' と y' を $x,\ y,\ s,\ t,\ \alpha$ の式で表すと

$$x' = \boxed{\text{(あ)}},\quad y' = \boxed{\text{(い)}}$$

となる。

(2)　a を正の実数とする。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 a の円 C に，半径が $\dfrac{a}{2}$ で原点 O を通る円 K を点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ において内接させる。この円 K を円 C に沿って滑らないように転がす。ただし，K と C の接点が C 上を反時計回りに動くようにする。そして，接点の座標がはじめて $(a\cos\beta,\ a\sin\beta)$ $(0 \leqq \beta \leqq 2\pi)$ となるようにする。円 K に対するこの操作は次の 2 段階の操作を続けて行なうことと同等である：

(ｉ)　点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ を中心として，円 K を $\boxed{\text{(う)}}$ に角 $\boxed{\text{(え)}}$ だけ回転させる。

(ⅱ)　原点 O を中心として，円 K を $\boxed{\text{(お)}}$ に角 $\boxed{\text{(か)}}$ だけ回転させる。

(3)　円 K が点 A において円 C に内接しているとき，K の内部に固定された点 $\mathrm{Q}(b,\ 0)$ $\left(\text{ただし } 0 < b < a\right)$ をとる。円 K を，C との接点が C 上を一周するまで (2) に述べたやり方で C に沿って転がすとき，点 Q が動いてできる曲線を S_1 とする。S_1 上の点の座標を $(x,\ y)$ として，S_1 の方程式を $x,\ y$ を用いて書くと $\boxed{\text{(き)}}$ となる。

(4)　円 K が点 A において円 C に内接しているとき，円 C に固定された点 $\mathrm{R}(0,\ a)$ をとる。今度は円 K を固定して，円 C の方を K に接した状態で滑らないように K に沿って転がす。2 つの円の接点が円 K を $\boxed{\text{(く)}}$ 回転したとき，点 R ははじめてもとの位置 $(0,\ a)$ に戻る。R が描く曲線を S_2 とする。原点 O を極とし，x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ による S_2 の極方程式は $r = \boxed{\text{(け)}}$ である。ただし $r,\ \theta$ はそれぞれ S_2 上の点の原点からの距離, および偏角である。

(う)，(え)，(お)，(か)，(く) の選択肢
時計回り, 反時計回り, $\beta,\ 2\beta,\ \dfrac{1}{2}\beta,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

解答

(1)　複素数平面上で考えて，$\overrightarrow{\mathrm{P'T}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ を角 α だけ回転したものなので

$$\begin{aligned}(x'-s)+(y'-t)i &= \{(x-s)+(y-t)i\}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\} \\ &= \{(x-s)\cos\alpha - (y-t)\sin\alpha\} + \{(x-s)\sin\alpha + (y-t)\cos\alpha\}i\end{aligned}$$

$$\therefore\ x' + y'i = \{(x-s)\cos\alpha - (y-t)\sin\alpha + s\} + \{(x-s)\sin\alpha + (y-t)\cos\alpha + t\}i$$

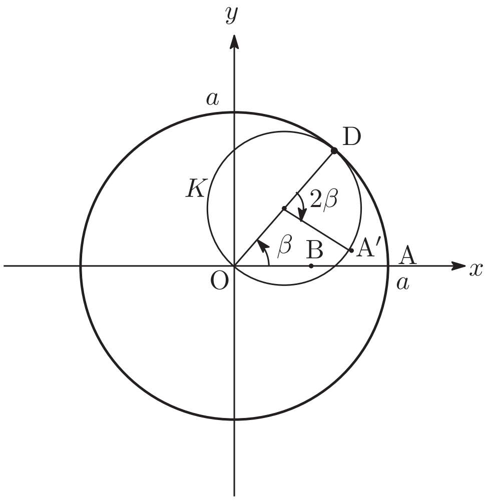
両辺の実部，虚部を比較して

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = (x-s)\cos\alpha - (y-t)\sin\alpha + s} \\ \boldsymbol{y' = (x-s)\sin\alpha + (y-t)\cos\alpha + t} \end{cases}$$

(2)　$\mathrm{D}(a\cos\beta,\ a\sin\beta)$ とする。

問題の条件に合わせて円 K を転がすと，次の図のようになる。

（点 A′ は，始めに点 A に一致していた点である。）



これは，

（ｉ）点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ を中心として円 K を **時計回り** に角 $\boldsymbol{2\beta}$ だけ回転させる。

（ii）原点 O を中心として円 K を **反時計回り** に角 $\boldsymbol{\beta}$ だけ回転させる。

を続けて行うことと同じである。

(3)　K と C の接点が $\mathrm{D}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ となったときの，Q が到達した点を U とする。

(2) より点 U は，点 $\mathrm{Q}(b,\ 0)$ を

（ｉ）点 B を中心として角 (-2θ) だけ回転した点 V に移動する。

（ii）原点 O を中心として角 θ だけ回転した点 U に移動する。

を続けて行うことと同じである。

よって，$\mathrm{U}(x,\ y)$，$\mathrm{V}(X,\ Y)$ とすると，(1) より

$$\begin{cases} X = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)\cos(-2\theta) + \dfrac{a}{2} = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)\cos 2\theta + \dfrac{a}{2} \\ Y = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)\sin(-2\theta) = -\left(b - \dfrac{a}{2}\right)\sin 2\theta \end{cases}$$

さらに，

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta) + \dfrac{a}{2}\cos\theta \\ y = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)(\cos 2\theta\sin\theta - \sin 2\theta\sin\theta) + \dfrac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)\cos\theta + \dfrac{a}{2}\cos\theta = b\cos\theta \\ y = -\left(b - \dfrac{a}{2}\right)\sin\theta + \dfrac{a}{2}\sin\theta = (a-b)\sin\theta \end{cases}$$

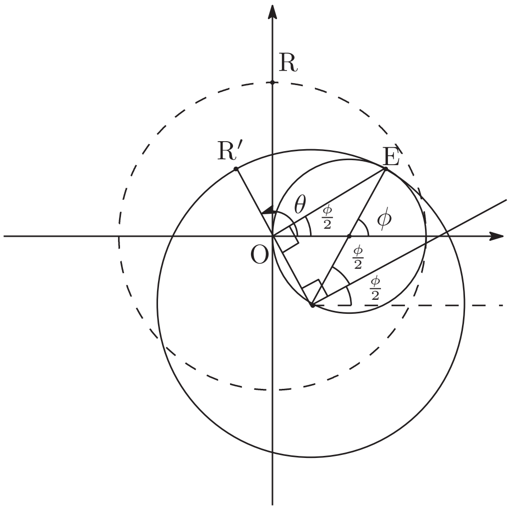
よって

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{b} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{a-b} \end{cases}$$

となるから，これらを $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入して

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1}$$

(4)　円 K と C の接点が $\mathrm{E}\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\phi,\ \dfrac{a}{2}\sin\phi\right)$ になったときに，点 R が到達した点を $\mathrm{R}'(x,\ y)$ とする。



また (2) より，点 R′ は

点 R を原点 O を中心に反時計回りに角 $\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$ だけ回転し (点 F とする),

さらに点 F を点 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ を中心に時計回りに角 ϕ だけ移動した点

である.

(1) を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\begin{pmatrix}-a\sin\left(-\dfrac{\phi}{2}\right)\\ a\cos\left(-\dfrac{\phi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)\\ a\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(a\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)\cos\phi-a\cos\dfrac{\phi}{2}\sin\phi+\dfrac{a}{2}\\ \left(a\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)\sin\phi+a\cos\dfrac{\phi}{2}\cos\phi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-a\left(\sin\phi\cos\dfrac{\phi}{2}-\cos\phi\sin\dfrac{\phi}{2}\right)-\dfrac{a}{2}\cos\phi+\dfrac{a}{2}\\ a\left(\cos\phi\cos\dfrac{\phi}{2}+\sin\phi\sin\dfrac{\phi}{2}\right)-\dfrac{a}{2}\sin\phi\end{pmatrix}$$

$$=a\begin{pmatrix}-\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\phi+\dfrac{1}{2}\\ \cos\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\phi\end{pmatrix}\ \cdots\cdots①$$

図より，$\theta=\dfrac{\phi}{2}+\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\phi=2\theta-\pi$ であるから,

①に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\cos(2\theta - \pi) + \dfrac{1}{2} \\ \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\sin(2\theta - \pi) \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} \cos\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \end{pmatrix}$$

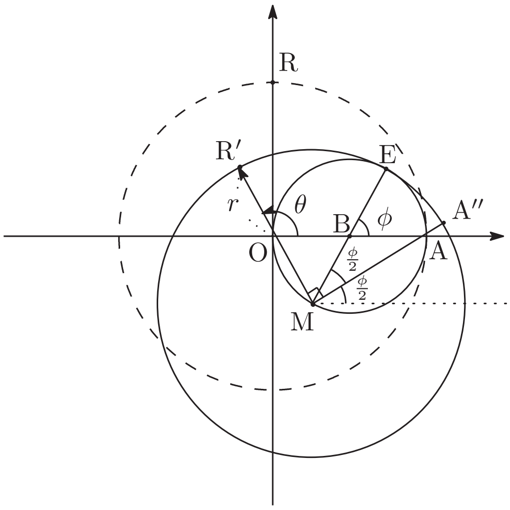
$$= a\begin{pmatrix} \cos\theta + \cos^2\theta \\ \sin\theta + \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= a(1+\cos\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

であるから，求める極方程式は

$$\boldsymbol{r = a(1+\cos\theta)}$$

(参考)　(4) は誘導に乗らず，媒介変数表示を作ることもできる。



図のように，始めに A にあった C 上の点を A″，円 C の中心を M とすると，

滑らずに転がることから，(弧 AE) = (弧 A″E) より，$\angle\mathrm{EMA''} = \dfrac{\phi}{2}$ である。

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{MR'}}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a}{2}\begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\phi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\phi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2}\cos\phi - a\cos\dfrac{\phi}{2} + \dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{a}{2}\sin\phi + a\cos\dfrac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

となり，①に一致する。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を 1 つ固定し，曲線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(x,\ x^2\right)$ と点 A との距離の 2 乗を $g(x)$ とおく。関数 $y = g(x)$ のグラフが区間 $(-\infty,\ \infty)$ において下に凸となるための条件は $b \leqq$ $\boxed{(あ)}$ となることである。$b >$ $\boxed{(あ)}$ のとき $y = g(x)$ のグラフは 2 つの変曲点をもち，その x 座標は $\boxed{(い)}$ および $\boxed{(う)}$ である。ただし，$\boxed{(い)} < \boxed{(う)}$ とする。また関数 $y = g(x)$ が極小となる x がただ 1 つであるために $a,\ b$ が満たすべき条件を $b \leqq F(a)$ と書くと，$F(a) =$ $\boxed{(え)}$ である。$b = F(a)$ のとき，関数 $y = g(x)$ は $x =$ $\boxed{(お)}$ において最小値をとる。さらに，連立不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq x^2$ が表す領域を D とするとき，曲線 $y = F(x)$ の D に含まれる部分の長さ L を求めると，$L =$ $\boxed{(か)}$ である。

解答

$g(x) = (x-a)^2 + (x^2-b)^2$ より

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(x-a)\cdot 1 + 2(x^2-b)\cdot 2x \\ &= 4x^3 - 2(2b-1)x - 2a \\ g''(x) &= 12x^2 - 2(2b-1) \end{aligned}$$

関数 $y = g(x)$ のグラフが区間 $(-\infty,\ \infty)$ において下に凸となるのは，$g''(x) \geqq 0$ の符号がつねに 0 以上となるときであるから

$$-2(2b-1) \geqq 0 \iff b \leqq \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$b > \dfrac{1}{2}$ のとき，$g''(x) = 0$ をみたす x は 2 つ存在しその前後で $g''(x)$ は符号変化するので，$g''(x) = 0$ をみたす x が $y = g(x)$ の変曲点の x 座標であるから，変曲点の x 座標は

$$g''(x) = 0 \iff x = \boldsymbol{-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}}\text{，}\textbf{または}\boldsymbol{\sqrt{\frac{2b-1}{6}}}$$

また，関数 $y = g(x)$ が極小となる x がただ 1 つとなるのは，$g'(x)$ の符号が $-$ から $+$ にただ 1 度だけ符号変化するときである。$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g'(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} g'(x) = \infty$ に注意すると，$b \leqq \dfrac{1}{2}$ のもとでは $y = g'(x)$ は単調増加であるから，条件をみたす。また $b > \dfrac{1}{2}$ のもとでは $y = g'(x)$ が $x = -\sqrt{\dfrac{2b-1}{6}},\ \sqrt{\dfrac{2b-1}{6}}$ においてそれぞれ極大，極小となるので，求める条件は

$$g'\left(-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)g'\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right) \geqq 0$$

$$\iff \left(-4\cdot\frac{2b-1}{6}\sqrt{\frac{2b-1}{6}} + 2(2b-1)\sqrt{\frac{2b-1}{6}} - 2a\right)\left(4\cdot\frac{2b-1}{6}\sqrt{\frac{2b-1}{6}} - 2(2b-1)\sqrt{\frac{2b-1}{6}} - 2a\right) \geqq 0$$

$$\iff (-4B + 12B - 2a)(4B - 12B - 2a) \geqq 0 \quad \left(\left(\frac{2b-1}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = B \text{ とした}\right)$$

$$\iff (a-4B)(a+4B) \geqq 0 \iff |a| \geqq 4B \iff \frac{|a|}{4} \geqq \left(\frac{2b-1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\iff \left(\frac{a}{4}\right)^2 \geqq \left(\frac{2b-1}{6}\right)^3 \quad (\because \text{両辺正}) \iff b \leqq \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2} \quad (\because a,\ b \text{ は実数})$$

以上から，$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{3\sqrt[3]{a^2}}{2\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{2}$ と併せて $F(a)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt[3]{a^2}}{2\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{2}}$ である。$\left(\text{なお，} a \fallingdotseq 0 \text{ のとき } b > \dfrac{1}{2} \text{である。}\right)$

$b=F(a)$ のとき，$a \fallingdotseq 0$ のもとでは $g'(x)=0$ は (実数の)2 重解と 1 実数解をもち，それらをそれぞれ p，q $(p \fallingdotseq q)$ とすると，$x=q$ の前後で $g'(x)$ の符号が $-$ から $+$ にただ 1 度だけ符号変化するので，関数 $y=g(x)$ は $x=q$ において最小となる。

・$p<q$ のとき

x	$\cdots$	p	$\cdots$	q	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

・$q<p$ のとき

x	$\cdots$	q	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

解と係数の関係より

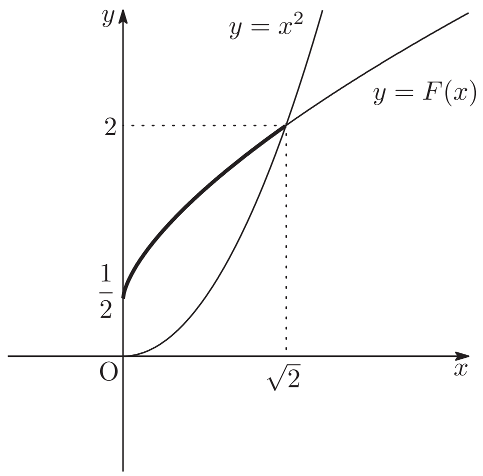
$$\begin{cases} 2p+q = 0 & \cdots ① \\ p^2+2pq = -\dfrac{2b-1}{2} & \cdots ② \\ p^2q = \dfrac{a}{2} & \cdots ③ \end{cases}$$

①③より，$p=-\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4}}$，$q=\sqrt[3]{2a}$ であり，このとき，②をみたす実数 $b\left(>\dfrac{1}{2}\right)$ が存在する。

また $a=0$ のもとでは $g'(x)=0$ は 3 重解 $x=0$ をもち，$x=0$ の前後で $g'(x)$ の符号が $-$ から $+$ にただ 1 度だけ符号変化するので，関数 $y=g(x)$ は $x=0$ において最小となる。

以上から，関数 $y=g(x)$ は $x=\boldsymbol{\sqrt[3]{2a}}$ において最小値をとる。

ここで，$y=F(x)=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{2}$ と $y=x^2$ の $x \geqq 0$ における位置関係は下図のようになる。



求める長さ L は上図の太線部分である。$y=F(x) \iff x=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(2y-1)^{\frac{3}{2}}(=G(y)$ とする$)$ であるから，

$G'(y) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(2y-1)^{\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1+\{G'(y)\}^2}dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1+\frac{2}{3}(2y-1)}dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{4y+1}{3}}dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4y+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}-1}{2}} \end{aligned}$$

(参考 1)　$y = F(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{2}$ と $y = x^2$ の共有点の座標は，連立して

$$\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2} = x^2$$

$\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{2}} = t(\geqq 0)$ とおくと

$$3t + \frac{1}{2} = 16t^3 \iff 32t^3 - 6t - 1 = 0 \iff (2t-1)(4t+1)^2 = 0$$

$t \geqq 0$ より $t = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2} \iff x = \pm\sqrt{2}$$

と求めることができる。あるいは，$x = G(y) = \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(2y-1)^{\frac{3}{2}}$ と $y = x^2$ を連立して

$$y = \frac{2}{27}(2y-1)^3 \iff 16y^3 - 24y^2 - 15y - 2 = 0 \iff (y-2)(4y+1)^2 = 0$$

$y \geqq \dfrac{1}{2}$ であるから，$y = 2$ と求めることができる。

(参考 2)　$y = F(x)$ が $x = 0$ において微分可能ではないので，x について積分する形で下記のように書くのは好ましくない。

$$L = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\{F'(x)\}^2}dx$$

これは厳密に言うと広義積分 (高等学校学習指導要領の範囲外) をする必要がある。すなわち，

$$L = \lim_{s\to+0}\int_s^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\{F'(x)\}^2}dx$$

と書き，まず $\displaystyle\int_s^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\{F'(x)\}^2}dx$ を計算して最後に $s \to +0$ として極限値 L を求める。具体的には次のようになる。

$F'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$ より

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{s \to +0} \int_s^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \{F'(x)\}^2}\,dx \\
&= \lim_{s \to +0} \int_s^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}}\,dx \\
&= \lim_{s \to +0} \int_s^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}\,dx \\
&= \lim_{s \to +0} \int_s^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4x^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{2}{3}}}{4x^{\frac{2}{3}}}}\,dx \\
&= \lim_{s \to +0} \int_s^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4x^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{2}{3}}}}{2x^{\frac{1}{3}}}\,dx
\end{aligned}$$

$x^{\frac{1}{3}} = t$ とおくと，$x = t^3$ より $dx = 3t^2dt$ であり，$x : s \to \sqrt{2}$ のとき $t : s^{\frac{1}{3}} \to 2^{\frac{1}{6}}$ であるので

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{s \to +0} \int_{s^{\frac{1}{3}}}^{2^{\frac{1}{6}}} \frac{\sqrt{4t^2 + 4^{\frac{2}{3}}}}{2t} \cdot 3t^2dt \\
&= \lim_{s \to +0} \frac{3}{2} \int_{s^{\frac{1}{3}}}^{2^{\frac{1}{6}}} t\sqrt{4t^2 + 4^{\frac{2}{3}}}\,dt \\
&= \lim_{s \to +0} \frac{1}{8} \left[(4t^2 + 4^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\right]_{s^{\frac{1}{3}}}^{2^{\frac{1}{6}}} \\
&= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3} - 1}{2}}
\end{aligned}$$

講評

［Ⅰ］［小問集合］(易)
例年通り小問集合であった。本学受験者はどれも落とせないだろう。ここでの取りこぼしは合否に大きく影響するだろう。

［Ⅱ］［確率，極限］（やや易）
一昨年までは毎年出題されていた確率からの出題で，出題分野が戻った形である。問題自体は平易で計算ミスに注意して解答を進めたい。特に (2)(3)(4) は (1) の極限よりも取り組みやすいので，全体を俯瞰する力も同時に求められた。

[Ⅲ]［複素数平面，2 次曲線］（難）
サイクロイドに関する軌跡の出題であった。計算量が多く，時間内に完答に至るのは難しいのではないか。(3) までできていれば十分であろう。

[Ⅳ]［数Ⅲ微分法，数Ⅲ積分法］（やや難）
4 次関数の極値に関する出題であった。本学受験者であれば誰もが経験があるような問題ばかりであったであろう。基本的には丁寧に計算していけばよいだけだが，煩雑な計算を含み計算ミスを誘発しやすい問題となっているので，計算ミスによく注意をしたい。

例年と同程度の難易度であった。本学受験者には解けるレベルの問題が多く，時間配分をうまくできたかが鍵となったであろう。一次突破ラインは 55% 程度か。