医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本大学医学部 N方式（Ⅰ期）二次試験　数学

2022年 2月11日実施

[1]

以下の問いに答えなさい．

(1)　次の関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい．

(1-1)　$f(x) = (2x+5)^7$

(1-2)　$f(x) = \sin(3x+7)$

(1-3)　$f(x) = e^{4x+3}$

(1-4)　$f(x) = \log(5x+9)^2$

(2)　2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 解を α，β とする．ただし，$\alpha \fallingdotseq \beta$ である．自然数 n（$n=1$，2，$\cdots$）に対して，$f(n) = \alpha^n + \beta^n$ とおくとき，$f(n+2)+f(n+1)+f(n)=0$ が成り立つことを証明しなさい．

解答

(1)

(1-1)　$\boldsymbol{f'(x) = 14(2x+5)^6}$

(1-2)　$\boldsymbol{f'(x) = 3\cos(3x+7)}$

(1-3)　$\boldsymbol{f'(x) = 4e^{4x+3}}$

(1-4)　$\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{10}{5x+9}}$

(2)　$x=\alpha$，β は $x^2+x+1=0$ の解なので

$$\begin{cases} \alpha^2+\alpha+1=0 \\ \beta^2+\beta+1=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

よって，

$$\begin{aligned} f(n+2)+f(n+1)+f(n) &= (\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha^n+\beta^n) \\ &= \alpha^n(\alpha^2+\alpha+1)+\beta^n(\beta^2+\beta+1) \\ &= \alpha^n\cdot 0+\beta^n\cdot 0 \qquad (\because\ ①) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから，示された．

[2]

関数 $y=\sqrt{2x+3}$ を考えて，その逆関数を $y=g(x)$ で表すとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　$g(x)$ を求めなさい．

(2)　$y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの交点の座標を求めなさい．

(3)　3 つの曲線 $y=\sqrt{2x+3}$，$y=g(x)$ および y 軸で囲まれる図形の面積を求めなさい．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　関数 $y=\sqrt{2x+3}$ ……① の値域は $y \geqq 0$ である．

① を x について解くと

$$x=\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}\ (y \geqq 0)$$

よって，逆関数は x と y を入れ替えて

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\ (x \geqq 0)$$

すなわち

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\ (x \geqq 0)}$$

(2)　$y=\sqrt{2x+3}$ と $y=g(x)$ を連立して

$$\sqrt{2x+3}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$$

$$2\sqrt{2x+3}=x^2-3 \ \cdots\cdots ②$$

$$4(2x+3)=(x^2-3)^2$$

$$x^4-6x^2-8x-3=0$$

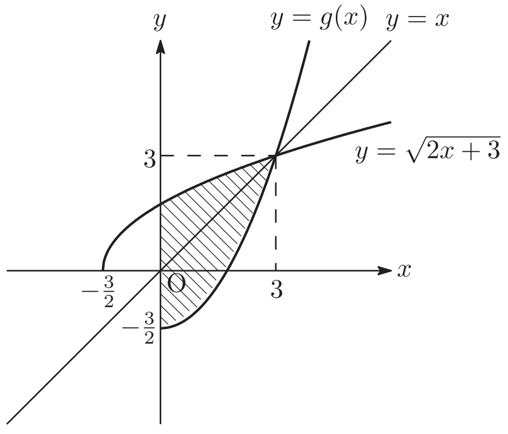
$$(x-3)(x+1)^3=0$$

$$\therefore x=3,\ -1$$

このうち②を満たすのは $x=3$

よって，交点の座標は **(3，3)**

(3)



求めるのは図の斜線部分の面積である．

求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^3 \left\{ \sqrt{2x+3} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \right) \right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x \right]_0^3 = \mathbf{9 - \sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

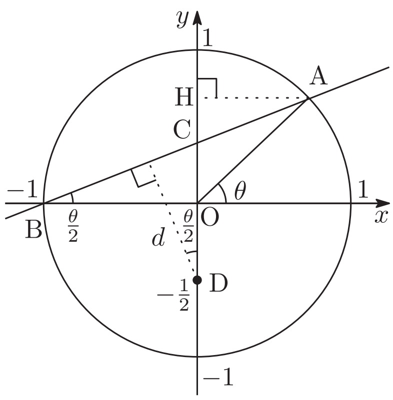
[3]

原点 O の座標平面上に，O を中心とする半径 1 の円と円周上の動点 A$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ および定点 B$(-1,\ 0)$ がある．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 AB と y 軸との交点を C とする．三角形 OAC の面積を $S(\theta)$ で表すとき，$S(\theta)$ を θ の関数として表し，$S(\theta)$ が最大値をとるときの $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $0<\theta<\pi$ のとき，点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ と直線 AB との距離を d で表すとき，d の最大値およびそのときの $\cos\theta$ の値を求めなさい．

解答



(1) 直線 AB の方程式は $y=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ $\cdots$① であるので，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}>0$ に注意して

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OC}\cdot\mathrm{AH}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\cos\theta\\&=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}\end{aligned}$$

微分して

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=\frac{(\cos\theta+1)(\cos^2\theta+\cos\theta-1)}{2(1+\cos\theta)^2}\\&=\frac{\cos^2\theta+\cos\theta-1}{2(1+\cos\theta)}\end{aligned}$$

$S'(\theta)=0$ とすると，$\cos\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ であり，$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ をみたす θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在し，それを α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$S(\theta)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$S(\theta)$ が最大値となるときの θ は α であるので，このとき

$$\cos\theta = \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(参考 1)　図から OC$=\tan\dfrac{\theta}{2}$ であるので，

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OC}\cdot \mathrm{AH} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\tan\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta \end{aligned}$$

と立式し，$\tan\dfrac{\theta}{2}=t\ (0<t<1)$ とおくと $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ となることから

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

として，有理分数関数を微分していってもよい．

(2)　①は

$$(\sin\theta)x-(1+\cos\theta)y+\sin\theta=0$$

となるので，

$$\begin{aligned} d &= \frac{|-(1+\cos\theta)(-\frac{1}{2})+\sin\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta+\{-(1+\cos\theta)\}^2}} \\ &= \frac{|1+\cos\theta+2\sin\theta|}{2\sqrt{2+2\cos\theta}} \\ &= \frac{|2\cos^2\frac{\theta}{2}+4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|}{2\cdot\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{|\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}|}{2} \qquad \left(\because\ 0<\theta<\pi\text{より}\ \cos\frac{\theta}{2}>0\right) \\ &= \frac{|\sqrt{5}\sin(\frac{\theta}{2}+\beta)|}{2} \end{aligned}$$

ただし，β は $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

ここで，$0<\theta<\pi$ より $\beta<\dfrac{\theta}{2}+\beta<\dfrac{\pi}{2}+\beta$ であるので，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ と併せて，$|\sqrt{5}\sin(\frac{\theta}{2}+\beta)|$ は $\dfrac{\theta}{2}+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となる．

すなわち，d は $\theta=\pi-2\beta$ のとき最大となり，その値は

$$\frac{|\sqrt{5}\cdot 1|}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

また，このとき

$$\cos\theta=\cos(\pi-2\beta)=-\cos2\beta=1-2\cos^2\beta=1-2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\boldsymbol{-\frac{3}{5}}$$

(参考 2)　点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ は，$0<\theta<\pi$ より $y<\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ を満たす領域にあることから

$$-\frac{1}{2}<\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot 0+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\iff 1+\cos\theta+2\sin\theta>0$$

とわかるので，d の絶対値を外して考えることもできる (が，その必要はない).

(参考 3)　図から

$$d = \mathrm{CD}\cos\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}$$

として d を立式することもできる.

講評

［1］［小問集合］(易)
教科書基礎レベルの問題で，ここでの失点は避けたいところ．

［2］［数 III積分法］（やや易）
逆関数に関する問題である．計算量も多くなく，ここでも失点は避けたい．

［3］［数 III微分法］（標準）
3 つの大問の中で最も骨のある問題で，要領のよい計算が求められる．大問 1，2 を時間をかけずに終えて，大問 3 にしっかりと時間をかけて点数を稼ぎたい．

初の 2 次での学科試験ということもあり難易度についてわからないこともあったが，旧 A 方式の記述問題より易しめであった．高得点勝負になると考えられる．正規合格ラインは 60 点満点中 45～50 点程度か．