医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本医科大学（前期）　数学

2022年2月2日実施

[I]

以下の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる 1 以上の整数が最小となる形で答えよ。

i を虚数単位とする。O を原点とする複素数平面上において，中心が O，半径が 2 の円を C とする。C 上の点 P(z) に対して，複素数平面上の点 Q(w) を次のように定める。

$$w=\frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}$$

点 P(z) が C 上を動くとき，点 Q(w) は複素数 $\alpha=-\boxed{\text{ア}}\,i$ で表される点 A(α) を中心とし，半径 $r=\boxed{\text{イ}}$ の円上を動く。このとき，$z=w$ を満たす C 上の点 z がただ 1 つ存在し，その点を B(β) とおく。$z\neq\beta$ を満たす点 P(z) に対して，等式

$$\frac{z-w}{z-\beta}=\frac{z-\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\,i}{z+\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,i}$$

が成り立つことを用いると，点 P(z) が $z\neq\beta$ かつ $\sqrt{5}\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{BP}$ を満たしながら C 上を動くとき，BP は最大値 $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ と最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとることがわかる。ただし，複素数平面上の 2 点 X，Y に対して，XY は 2 点 X，Y 間の距離を表す。

解答

与式を変形する。

$$\begin{aligned}
&w=\frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}\\
\iff&(z+2-2i)w=(4+2i)z+4-4i\\
\iff&(w-4-2i)z=-(2-2i)w+4-4i\quad\cdots①\\
\iff&z=\frac{-(2-2i)(w-2)}{w-4-2i}\quad(\because\ ①において\ w=4+2i\ とすると\ 0=-8\ となり不合理ゆえ\ w\neq4+2i)
\end{aligned}$$

$|z|=2$ に代入して

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{-(2-2i)(w-2)}{w-4-2i}\right|=2\\
\iff&|2-2i||w-2|=2|w-4-2i|\\
\iff&2\sqrt{2}|w-2|=2|w-4-2i|\quad\cdots②\\
\iff&|w-(4+2i)|:|w-2|=\sqrt{2}:1
\end{aligned}$$

ここで，点 $4+2i$ と点 2 を結ぶ線分を $\sqrt{2}:1$ に内分する点と外分する点をそれぞれ求めると

$$\frac{1\cdot(4+2i)+\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i$$
$$\frac{-1\cdot(4+2i)+\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}-1}=-2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2}-2)i$$

となるので，点 $\mathrm{Q}(w)$ はこの 2 点を結ぶ線分を直径とする円となる。したがって，点 $\mathrm{Q}(w)$ は

$$\text{中心}:\alpha=\frac{2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i+\{-2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2}-2)i\}}{2}=\boldsymbol{-2i}$$
$$\text{半径}:r=\frac{1}{2}|2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)i-\{-2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2}-2)i\}|=\frac{1}{2}|4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i|=\boldsymbol{4}$$

の円上を動く。このとき，$z=w$ を満たす C 上の点 z は $z=2i$ であるから，$\beta=2i$ となる。
ここで，$z\fallingdotseq\beta$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，等式

$$\begin{aligned}\frac{z-w}{z-\beta}&=\frac{z-\frac{(4+2i)z+4-4i}{z+2-2i}}{z-2i}\\&=\frac{z(z+2-2i)-\{(4+2i)z+4-4i\}}{(z-2i)(z+2-2i)}\\&=\frac{z^2+(-2-4i)z-4+4i}{(z-2i)(z+2-2i)}\\&=\frac{(z-2i)(z-2-2i)}{(z-2i)(z+2-2i)}\\&=\boldsymbol{\frac{z-2-2i}{z+2-2i}}\end{aligned}$$

が成り立つので，$\sqrt{5}\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{BP}\iff\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BP}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を満たすとき

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BP}}\leqq\frac{1}{\sqrt{5}}\\\iff&\frac{|z-2-2i|}{|z+2-2i|}\leqq\frac{1}{\sqrt{5}}\\\iff&\sqrt{5}|z-2-2i|\leqq|z+2-2i|\quad\cdots③\end{aligned}$$

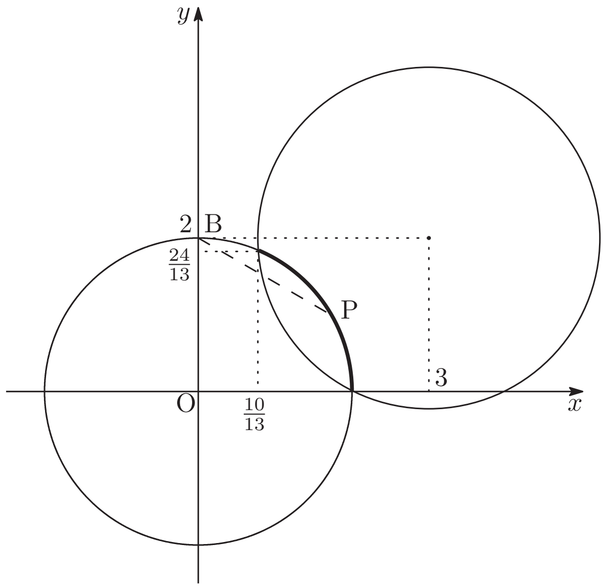
$\sqrt{5}|z-2-2i|=|z+2-2i|\quad\cdots④$ について，$|z-(-2+2i)|:|z-(2+2i)|=\sqrt{5}:1$ であり，点 $-2+2i$ と点 $2+2i$ を結ぶ線分を $\sqrt{5}:1$ に内分する点と外分する点をそれぞれ求めると

$$\frac{1\cdot(-2+2i)+\sqrt{5}\cdot(2+2i)}{\sqrt{5}+1}=3-\sqrt{5}+2i$$
$$\frac{-1\cdot(-2+2i)+\sqrt{5}\cdot(2+2i)}{\sqrt{5}-1}=3+\sqrt{5}+2i$$

となるので，④を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ はこの 2 点を結ぶ線分を直径とする円となる。したがって，④を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ は

$$\text{中心}:\frac{3-\sqrt{5}+2i+(3+\sqrt{5}+2i)}{2}=3+2i$$
$$\text{半径}:\frac{1}{2}|3-\sqrt{5}+2i-(3+\sqrt{5}+2i)|=\frac{1}{2}|-2\sqrt{5}|=\sqrt{5}$$

の円上を動く。したがって，③を満たす点 P(z) は，中心が点 $3+2i$，半径が点 $\sqrt{5}$ の円の内部および周を動くので，$|z|=2$ と併せて，$z \fallingdotseq \beta$，かつ $\sqrt{5}\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{BP}$ を満たす点 P(z) の存在範囲は下図の太線部分となる。



よって，上図より，BP が最大となるのは P(2) のときであるから，最大値は

$$|2i-2| = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

また，BP が最小となるのは $\mathrm{P}\left(\dfrac{10}{13}+\dfrac{24}{13}i\right)$ のときであるから，最小値は

$$\left|2i-\left(\frac{10}{13}+\frac{24}{13}i\right)\right| = \left|-\frac{10}{13}+\frac{2}{13}i\right| = \mathbf{\frac{2\sqrt{26}}{13}}$$

(参考 1)　②，④で軌跡を求める際には，アポロニウスの円を用いている。

2 点 A，B からの距離の比が $m:n$（$m>0$，$n>0$，$m \fallingdotseq n$）である点の軌跡は，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を結ぶ線分を直径とする円となることは，私立医学部受験生は押さえておきたい。特に，④の計算は簡略化できる。

(参考 2)　②，④は次のように変形してもよい。

$$\begin{aligned}
② &\iff \sqrt{2}|w-2| = |w-4-2i| \\
&\iff 2(w-2)(\overline{w}-2) = (w-4-2i)(w-4+2i) \\
&\iff w\overline{w}-2iw+2i\overline{w}-12=0 \\
&\iff (w+2i)(\overline{w}-2i)=16 \\
&\iff |w+2i|^2=16 \\
&\iff |w+2i|=4 \\
④ &\iff 5(z-2-2i)(\overline{z}-2+2i) = (z+2-2i)(\overline{z}+2+2i) \\
&\iff z\overline{z}+(-3+2i)z+(-3-2i)\overline{z}+8=0 \\
&\iff (z-3-2i)(\overline{z}-3+2i)=5 \\
&\iff |z-3-2i|^2=5 \\
&\iff |z-3-2i|=\sqrt{5}
\end{aligned}$$

[Ⅱ]

n を 1 以上の整数とし，$x,\ y$ を 1 以上 n 以下の整数とする。中が見えない 2 つの箱 A, B があり，A には赤球 x 個と白球 $n-x$ 個が，B には赤球 y 個と白球 $n-y$ 個が，それぞれ入っている。どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ である 1 つのさいころを 1 回投げて，1 の目が出たら A から 1 球を取り出し，1 以外の目が出たら B から 1 球を取り出すことを考える。その結果，赤球が取り出されたとき，この赤球が A から取り出された確率を p として以下の各問いに答えよ。

問 1　p を求めよ。答えのみでよい。

問 2　$\dfrac{1}{6} \leqq p \leqq \dfrac{2}{7}$ を満たす座標平面上の点 $(x,\ y)$ の個数 $N(n)$ を求めよ。

問 3　問 2 の $N(n)$ に対して，$N(n) < 2022$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1 「箱 A から球を取り出す」という事象を A,「赤球を取り出す」という事象を R とし，

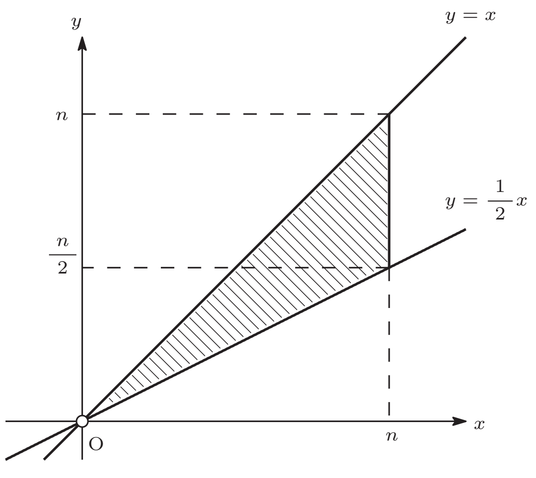
事象 X が起こる確率を $P(X)$ と表すと，求める確率は

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{n}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{n} + \frac{5}{6} \cdot \frac{y}{n}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x}{x+5y}} \quad (= p)$$

問 2　条件は

$$\frac{1}{6} \leqq p \leqq \frac{2}{7}$$
$$\iff \frac{1}{6} \leqq \frac{x}{x+5y} \leqq \frac{2}{7}$$
$$\iff x+5y \leqq 6x \text{ かつ } 7x \leqq 2(x+5y)$$
$$\iff y \leqq x \text{ かつ } y \geqq \frac{1}{2}x$$

であり，これを満たす $(x,\ y)$ の存在領域は次の図の斜線部分 (境界含む) である。



$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ に注意すると，

この領域に含まれる格子点（(0, 0) 除く）の個数を求めればよいことになる。

(i) n が偶数のとき

$y=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）上の格子点を数えて，その総和を求めると

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(k+1)+\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n}(n-k+1) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\frac{n}{2} \qquad \text{(等差数列の和の公式)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+4)} \end{aligned}$$

(ii) n が奇数のとき

$y=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）上の格子点を数えて，その総和を求めると

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(k+1)+\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(n-k+1) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right\}\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n+3}{2}\right)\cdot\frac{n+1}{2} \qquad \text{(等差数列の和の公式)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(n^2+4n-1)} \end{aligned}$$

(注意)　斜線部分が，直角三角形の領域の足し引きで表されることを利用してもよい。

問 3　n が偶数，奇数のときのいずれにしても，$N(n)$ は n の増加関数である。

$\left(\dfrac{1}{4}\cdot 90\cdot 90=2025\ \text{なので，この辺りに当たりをつけて}\right)$

具体的な計算により，

$N(86)<2022$，$N(87)<2022$，$N(88)>2022$，$N(89)>2022$

であるから，$N(n)<2022$ を満たす最大の自然数 n は n は $n=\mathbf{87}$

[Ⅲ]

$a,\ b$ を $a > b > 0$ を満たす定数とし，$m,\ k$ を正の定数とする。O を原点とする座標平面において，楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に直線 $l : y = -mx + k$ が第 1 象限の点 A で接しているとする。また，O から l に垂線 OH を下ろし，2 直線 OA, OH のなす角を θ とする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　点 A の座標を $m,\ a,\ b$ を用いて表せ。答えのみでよい。

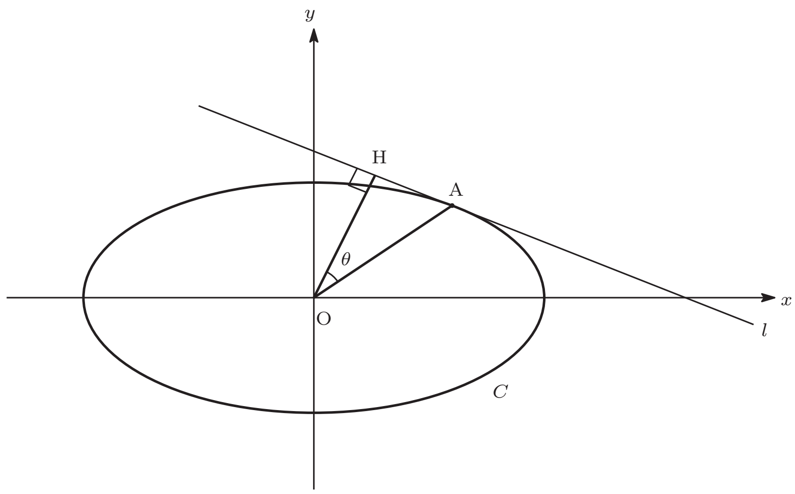
問 2　線分 OH の長さ h を $m,\ a,\ b$ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　$\sin\theta$ を $m,\ a,\ b$ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　$a,\ b$ を固定し，正の実数 m を動かすとき，$\sin\theta$ の最大値 $M(a,\ b)$ を求めよ。

問 5　$a,\ b$ を，$a > b > 0$ かつ $(a-b)^2 + (b-1)^2 \leqq \dfrac{3}{4}$ を満たすように動かすとき，問 4 の $M(a,\ b)$ の最大値を求めよ。

解答



問 1

$$C\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$l\ : y = -mx + k$$

l の式を C の式に代入して，整理すると

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2mkx + a^2(k^2 - b^2) = 0\ \cdots\cdots ①$$

C と l が接するので，①は重解をもつから

$$(①の判別式\ D) = 0$$

$$D/4 = a^4m^2k^2 - (a^2m^2 + b^2)a^2(k^2 - b^2) = 0$$

$$a^2b^2(a^2m^2 - k^2 + b^2) = 0$$

$$k = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$\therefore k = \sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad (\because\ \ k > 0)$$

であり，このとき①の重解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2km}{a^2m^2+b^2} \\ &= \frac{a^2m\sqrt{a^2m^2+b^2}}{a^2m^2+b^2} \\ &= \frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}} \end{aligned}$$

l の式に代入して

$$y = -\frac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}} + \sqrt{a^2m^2+b^2} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

よって，

$$\mathrm{A}\left(\boldsymbol{\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}}\right)$$

問 2　点と直線の距離の公式より

$$\begin{aligned} \mathrm{OH} &= \frac{|m\cdot 0+0-k|}{\sqrt{m^2+1}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{m^2+1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}} \end{aligned}$$

問 3

$$\mathrm{OA} = \sqrt{\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2}}$$

であるから，

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}} = \frac{a^2m^2+b^2}{\sqrt{(m^2+1)(a^4m^2+b^4)}}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{a^2m^2+b^2}{\sqrt{(m^2+1)(a^4m^2+b^4)}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(m^2+1)(a^4m^2+b^4)-(a^2m^2+b^2)^2}{(m^2+1)(a^4m^2+b^4)}} \\ &= \sqrt{\frac{m^2(a^4-2a^2b^2+b^4)}{(m^2+1)(a^4m^2+b^4)}} \\ &= \boldsymbol{\frac{m(a^2-b^2)}{\sqrt{(m^2+1)(a^4m^2+b^4)}}} \end{aligned}$$

問 4

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{m(a^2-b^2)}{\sqrt{a^4m^4+(a^4+b^4)m^2+b^4}} \\
&= \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4m^2+\dfrac{b^4}{m^2}+(a^4+b^4)}} \\
&\leqq \frac{a^2-b^2}{\sqrt{2\sqrt{a^4m^2\cdot\dfrac{b^4}{m^2}}+a^4+b^4}} \qquad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の不等式}) \\
&= \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}} \\
&= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

この等号は，$a^4m^2=\dfrac{b^4}{m^2}$ すなわち，$m=\dfrac{b}{a}$ のときに成立する。

よって

$$M(a,\ b)=\boldsymbol{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

問 5　$\dfrac{a}{b}=x$ とおくと

$$
\begin{aligned}
M(a,\ b) &= \frac{\frac{a^2}{b^2}-1}{\frac{a^2}{b^2}+1} \\
&= \frac{x^2-1}{x^2+1} \\
&= 1-\frac{2}{x^2+1} \quad (= f(x)\ \text{とする})
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{cases}
a>b>0 \\
(a-b)^2+(b-1)^2 \leqq \dfrac{3}{4}
\end{cases}
$$

を満たすときの x の範囲は

$$
\begin{cases}
\dfrac{a}{b}=x \\
a>b>0 \\
(a-b)^2+(b-1)^2 \leqq \dfrac{3}{4}
\end{cases}
$$

を満たす実数 a，b が存在する条件を求めればよいが，それは

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = x \\ x = \dfrac{a}{b} > 1 \\ (bx-b)^2 + (b-1)^2 \leqq \dfrac{3}{4} \end{cases} \quad \text{を満たす実数 } a,\ b \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ (x^2-2x+2)b^2 - 2b + \dfrac{1}{4} \leqq 0 \end{cases} \quad \text{を満たす実数 } b \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ D/4 = 1^2 - \dfrac{1}{4}(x^2-2x+2) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x - 2 \leqq 0 \end{cases}$$

より，$1 < x \leqq 1+\sqrt{3}$ とわかるから，
この範囲で $f(x)$ が単調増加であることに注意して，
$M(a,\ b)$ の最大値は

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{3}) &= 1 - \frac{2}{(1+\sqrt{3})^2+1} \\ &= 1 - \frac{2}{5+2\sqrt{3}} \\ &= 1 - \frac{2(5-2\sqrt{3})}{13} \\ &= \boldsymbol{\frac{3+4\sqrt{3}}{13}} \end{aligned}$$

(注意)　$a-b=X$，$b-1=Y$ とおき，$M(a,\ b)$ を X，Y の関数として解くこともできる。

[Ⅳ]

関数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$（ただし，$0 \leqq x \leqq 1$）に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とするとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べて増減表をかき，グラフの概形をかけ。以上に関しては結果のみを解答欄に記せ。特に，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標は，

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

となる。$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる 1 以上の整数が最小となる形で答えよ。

問 2　V を求めよ。

解答

問 1　$0<x<1$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}\right)'\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}+\frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\right)'$$

$$=\frac{1}{4x(x-1)^2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\left\{-(2\sqrt{x}(x-1))'+1\right\}\quad\left(\because\ \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\right)'=f'(x)\right)$$

$$=\frac{1}{4x(x-1)^2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{-3x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

したがって，$0<x<1$ のとき $f'(x)<0$

また

$$-3x+\sqrt{x}+1=-(3x-\sqrt{x}-1)$$

$$=-3\left(\sqrt{x}-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$$

であるので，$f''(x)=0$ とすると，$0<x<1$ のとき $\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$，すなわち $x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{18}$ である。

また，$\alpha=\dfrac{7+\sqrt{13}}{18}$ とすると $-3\alpha+\sqrt{\alpha}+1=0 \iff 3\alpha=\sqrt{\alpha}+1$ が成り立つことに注意して

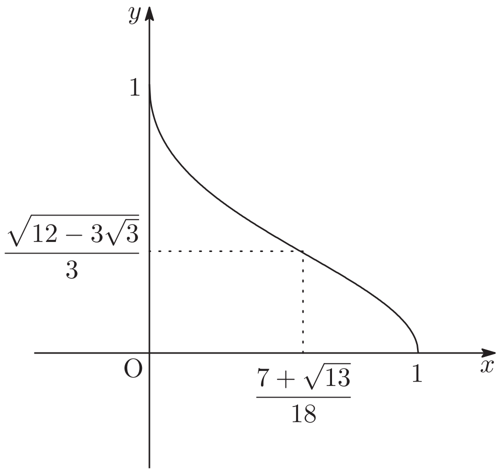
$$f(\alpha)=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}}=\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{\alpha}}-1}=\sqrt{\frac{2}{3\alpha}-1}$$

$$=\sqrt{\frac{12}{7+\sqrt{13}}-1}=\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}-1}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{13}}{3}}=\frac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}$$

したがって, $y=f(x)$ の増減およびグラフは次のようになる。また, 変曲点は $\left(\boldsymbol{\dfrac{7+\sqrt{13}}{18}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{12-3\sqrt{13}}}{3}}\right)$ である。

x	0		$\dfrac{7+\sqrt{13}}{18}$		1
$f(x)$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+0} f'(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 1-0} f'(x)=-\infty$$



(参考 1)　$f'(x)$ を対数微分法で計算すると $\log f(x)=\dfrac{1}{2}\{\log(1-\sqrt{x})-\log(1+\sqrt{x})\}$ より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\
&= -\frac{1}{4\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\\
&= -\frac{1}{4\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{1-x}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}\\
\therefore\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}f(x)
\end{aligned}$$

$f''(x)$ もこの形のまま微分していってもいいだろう。

問 2　問 1 のグラフより

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1 x^2dy$$

$y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ を x について解くと, $x=\left(\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2$ であるから

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^4dy$$

$y=\tan\theta$ とおくと，$dy=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり $y:0\to1$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^4\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1-\tan^2\theta\right)^4}{\left(1+\tan^2\theta\right)^3}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\tan^2\theta\right)^4\cos^6\theta d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^4\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos^2\theta-1\right)^4\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(16\cos^6\theta-32\cos^4\theta+24\cos^2\theta-8+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^6\theta d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^3d\theta\\
&=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+3\cos2\theta+3\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta\right)d\theta\\
&=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{1+3\cos2\theta+3\cdot\frac{1+\cos4\theta}{2}+\left(1-\sin^2 2\theta\right)\cos2\theta\right\}d\theta\\
&=\frac{1}{8}\left[\frac{5}{2}\theta+2\sin2\theta+\frac{3\sin4\theta}{8}-\frac{\sin^3 2\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{64}\pi+\frac{11}{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)d\theta\\
&=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\theta+\sin2\theta+\frac{\sin4\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta\\
&=\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=16\left(\frac{5}{64}\pi+\frac{11}{48}\right)-32\left(\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}\right)+24\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)-8\cdot\frac{\pi}{4}+1\\
&=\frac{8}{3}-\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

すなわち

$$V=\left(\boldsymbol{\frac{8}{3}-\frac{3}{4}\pi}\right)\boldsymbol{\pi}$$

(参考 2)　いわゆる「バウムクーヘン分割」（→(参考 3)）を用いて次のように計算することもできる。

問 1 のグラフより

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=\int_0^1 xf(x)dx\\&=\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx\end{aligned}$$

$1+\sqrt{x}=t$ とおくと，$\sqrt{x}=t-1$ すなわち，$x=(t-1)^2$ である。また $dx=2(t-1)dt$ であり，$x:\to 1$ のとき $t:1\to 2$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=\int_1^2(t-1)^2\sqrt{\frac{t-2}{t}}\cdot 2(t-1)dt\\&=2\int_1^2(t-1)^3\sqrt{\frac{t-2}{t}}dt\end{aligned}$$

$\sqrt{t}=u$ とおくと，$t=u^2$ である。また $dt=2udu$ であり，$t:1\to 2$ のとき $u:1\to\sqrt{2}$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=2\int_1^{\sqrt{2}}(u^2-1)^3\frac{\sqrt{2-u^2}}{u}\cdot 2udu\\&=4\int_1^{\sqrt{2}}(u^2-1)^3\sqrt{2-u^2}du\end{aligned}$$

$u=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，$du=\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ であり $u:1\to\sqrt{2}$ のとき $\theta:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{\pi}{2}$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2\theta-1)^3\cdot\sqrt{2}|\cos\theta|\cdot\sqrt{2}\cos\theta d\theta\\&=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2\theta-1)^3\cos^2\theta d\theta\\&=-8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 2\theta\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\\&=-4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 2\theta+\cos^4 2\theta)d\theta\end{aligned}$$

ここで

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 2\theta)\cos 2\theta d\theta$$

$$= \left[\frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\sin^3 2\theta}{6}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 2\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 4\theta+\cos^2 4\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 4\theta+\frac{1+\cos 8\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\theta+\frac{\sin 4\theta}{2}+\frac{\sin 8\theta}{16}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{32}\pi$$

よって

$$\frac{V}{2\pi} = -4\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{32}\pi\right)$$

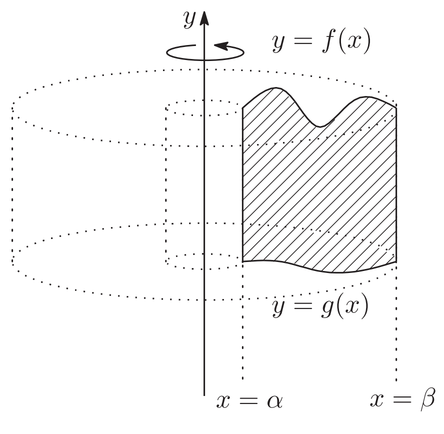
$$= \frac{4}{3}-\frac{3}{8}\pi$$

すなわち

$$V = \left(\boldsymbol{\frac{8}{3}-\frac{3}{4}\pi}\right)\boldsymbol{\pi}$$

(参考 3)　下図の斜線部分を y 軸まわりに回転してできる立体の体積 V_y は

$$V_y = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x|f(x)-g(x)|\,dx \text{ (証明略)}$$



講評

［Ｉ］［複素数平面］(やや難)

複素数平面における軌跡の問題であった。誘導に乗れれば最後までたどり着けるが，途中煩雑な計算が多く計算力がないと完答は難しいだろう。

［II］［場合の数と確率，整数の性質，数列］（標準）

最も計算量が少ない大問であり，大問 4 題の中では取り組みやすかったのではないだろうか。丁寧に計算していきたい。

［III］［2 次曲線］（やや難）

問 4 までは計算問題であり，文字式の取り扱いに慣れているかで差が出たであろう。問 5 は文字の存在条件を考えていく問題で 2021 年度の大問 3 でも出題されている。

［IV］［数III微分法，数III積分法］（やや難）

やることは明確であるものの，1 つ 1 つの計算が多く相当の計算力が要求される。計算がすぐに合わない場合は他の大問に時間を割いた方が良いだろう。

例年通り計算量は多かったが，2020，2021 年度の大問 4 に見られるような計算は見られなかった。また全体的にはやや取り組みやすくなったものの，90 分という時間を考えると厳しいことには変わりない。一次突破ラインは 55% 程度か。