解答速報

埼玉医科大学（前期）　数学

2022年 2月6日実施

$\boxed{1}$

次の問い (問 1，2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　3 次方程式 $ax^3+(-4a+1)x^2+(a+1)x+6a=0$ が 3 つの異なる実数解をもち，そのうちの 2 つは絶対値が等しいとき，$a=\dfrac{\boxed{1}\boxed{2}}{\boxed{3}}$ であり，解は $\pm\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ である。

問 2　2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x)=3x^2+2x-\int_0^3 g(t)dt$$

$$g(x)=x^2-6x+\int_1^2 f(t)dt$$

を満たすなら，

$$\int_1^2 f(x)dx=\boxed{6}$$

$$\int_0^3 g(x)dx=\boxed{7}$$

である。

解答

問 1　条件より，3 つの異なる実数解は k，$-k$，l ($k>0$，$\pm k \fallingdotseq l$，k，l は実数) とおくことができる。このとき，解と係数の関係より

$$\begin{cases} k+(-k)+l &= \dfrac{4a-1}{a} \\ k(-k)+(-k)l+lk &= \dfrac{a+1}{a} \\ k(-k)l &= -6 \end{cases} \iff \begin{cases} l &= \dfrac{4a-1}{a} & \cdots ① \\ k^2 &= -\dfrac{a+1}{a} & \cdots ② \\ k^2 l &= 6 & \cdots ③ \end{cases}$$

①②を③に代入して

$$\frac{4a-1}{a}\cdot\left(-\frac{a+1}{a}\right)=6 \iff 10a^2+3a-1=0 \iff (5a-1)(2a+1)=0 \iff a=\frac{1}{5},\ -\frac{1}{2}$$

$a=\dfrac{1}{5}$ のとき，②より $k^2=-6$ となるが，k が実数であることより不適である。

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき，①より $l=6$，②より $k^2=1 \iff k=1$ ($\because k>0$) である。

よって，以上より，求める a の値は $a=\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$ であり，解は $\mathbf{\pm 1}$ と $\mathbf{6}$ である。

(参考)　穴埋めから $k,\ l$ は整数であることがわかるので，③の $k^2 l = 6$ より素因数の一意性を考えれば $k = 1,\ l = 6$ であることはすぐにわかる。

問 2　$\displaystyle\int_1^2 f(t)dt = k,\ \int_0^3 g(t)dt = l$　$\cdots$④ とおくと，与式より

$$f(x) = 3x^2 + 2x - l$$

$$g(x) = x^2 - 6x + k$$

となるので，④に代入して

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_1^2 (3t^2 + 2t - l)dt & = k \\ \displaystyle\int_0^3 (t^2 - 6t + k)dt & = l \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \Big[t^3 + t^2 - lt\Big]_1^2 & = k \\ \left[\dfrac{t^3}{3} - 3t^2 + kt\right]_0^3 & = l \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} k + l & = 10 \\ 3k - l & = 18 \end{array}\right.$$

よって，$k = \mathbf{7},\ l = \mathbf{3}$ である。

$\boxed{2}$

次の文章を読み, 下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$x > 0$ を定義域とする曲線 $y = f(x)$ 上の，点 $(x,\ y)$ における接線の傾きが $\dfrac{\log x}{x}$ であり，$f(1) = \dfrac{1}{2}$ が成り立つ。

問 1　$y = f(x)$ と $y = 1$ との 2 つの交点の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると，$\alpha = e^{\boxed{\ 8\ }\boxed{\ 9\ }}$, $\beta = e^{\boxed{\ 10\ }}$ である。ただし $\alpha < \beta$ とする。

問 2　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \boxed{\ 11\ }\,e + \frac{\boxed{\ 12\ }\boxed{\ 13\ }}{e}$ である。

問 3　$y = f(x)$ の接線のうち，y 軸との交点が $(0,\ 2)$ であるものの方程式は

$$y = \boxed{\ 14\ }\boxed{\ 15\ }ex + \boxed{\ 16\ }$$

と

$$y = \frac{\boxed{\ 17\ }}{e^3}x + \boxed{\ 18\ }$$

である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　条件より，$f'(x) = \dfrac{\log x}{x}$ であるから

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{\log x}{x}dx = \int \log x(\log x)'dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。$f(1) = \dfrac{1}{2}$ より，$C = \dfrac{1}{2}$ なので，$y = f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{2} + \dfrac{1}{2}$ と $y = 1$ を連立して

$$\frac{(\log x)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 \iff (\log x)^2 = 1 \iff \log x = \pm 1 \iff x = e,\ \frac{1}{e}$$

となる。よって，$\alpha = \boldsymbol{e^{-1}}$, $\beta = \boldsymbol{e^{1}}$ である。

(参考)　$\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ の積分は，$\log x = t$ と置換してもよい。

問 2　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\{(\log x)^2+1\}dx$ である。ここで

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= \int (x)'(\log x)^2 dx \\ &= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\int (x)'\log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\left\{x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\right\} \\ &= x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1) + C' \quad (C'\text{は積分定数})\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\{(\log x)^2+1\}dx &= \frac{1}{2}\left\{\Big[x(\log x)^2 - 2x(\log x-1)\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} + \Big[x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(e-\frac{5}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{e}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{e+\frac{-3}{e}}\end{aligned}$$

問 3　接点を $\left(t,\ \dfrac{(\log t)^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと，$y=f(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= f'(t)(x-t)+f(t) \\ &= \frac{\log t}{t}(x-t)+\frac{(\log t)^2}{2}+\frac{1}{2} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

となる。これが点 $(0,\ 2)$ を通るとき

$$\begin{aligned}&2 = -\log t + \frac{(\log t)^2}{2}+\frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow\ &(\log t)^2 - 2\log t - 3 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &(\log t+1)(\log t-3) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &t = \frac{1}{e},\ e^3\end{aligned}$$

よって，求める接線の方程式は，①に代入して

$$\boldsymbol{y = -1\cdot ex + 2,\ y = \frac{3}{e^3}x + 2}$$

3

次の文章を読み, 下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

図 1 のような平行な壁に囲まれた直角に曲がる道路を，長さ ℓ の細い棒を水平に保ったまま図 1 の下方から進んで角を曲がり，右方向に運びたい。運ぶことができる ℓ の最大値を求めるため，準備として次のような問題 (問 1，2) を考えた。

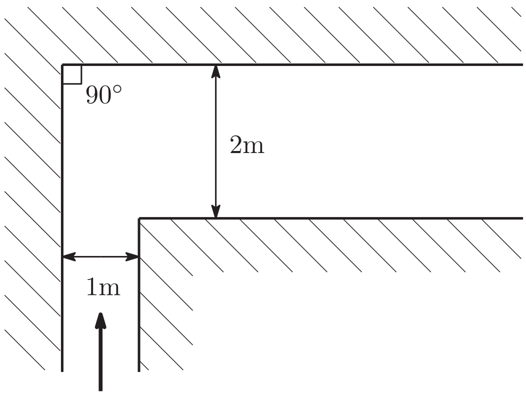


図 1

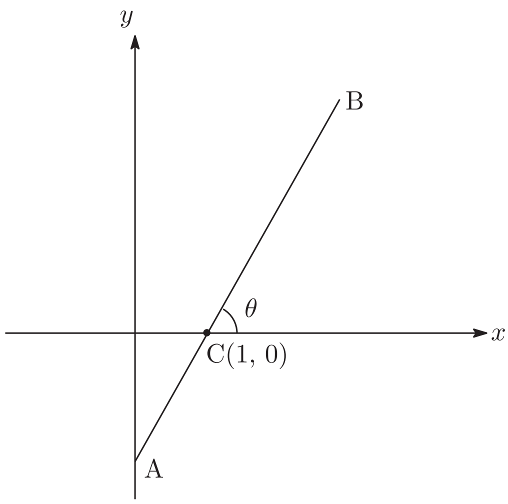


図 2

問 1　図 2 に示すように，点 C(1, 0) を通る長さ ℓ の線分 AB がある。線分の一端 A が y 軸上の負の部分を動くとき, 線分と x 軸のなす角を θ として, B の y 座標 d を θ で表すと

$$d = \boxed{19} + \boxed{20}\,\ell$$

である。

$\boxed{19}$, $\boxed{20}$ に入る最も適切なものを, 次の 1〜6 のうちからそれぞれ 1 つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

1　$\sin\theta$　　2　$\cos\theta$　　3　$\tan\theta$

4　$(-\sin\theta)$　　5　$(-\cos\theta)$　　6　$(-\tan\theta)$

問 2　$\ell = 8$ のとき，d の最大値は

$$\boxed{21}\sqrt{\boxed{22}}$$

である。

問 3　問 1, 2 の結果を使うと，図 1 のような道路で下方から右方向に運ぶことのできる棒の長さ ℓ の最大値は

$$\left(\boxed{23} + \sqrt[3]{\boxed{24}}\right)^{\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}}}\ \text{[m]}$$

である。

解答

問 1　原点を O とする。対頂角より，$\angle \mathrm{ACO} = \theta$ であるから

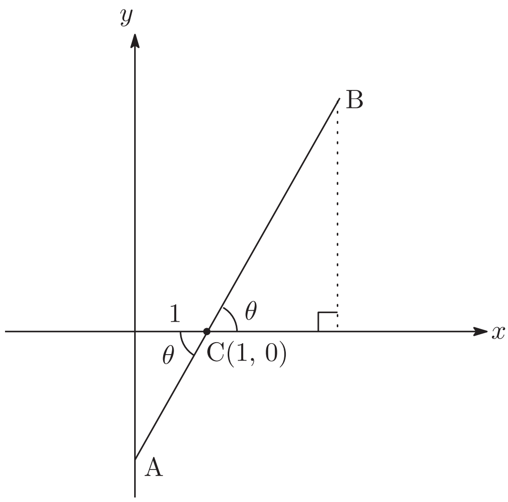
$$\mathrm{AC} = \frac{1}{\cos\theta}$$

と表せる。ゆえに

$$\mathrm{BC} = \ell - \frac{1}{\cos\theta}$$

が成り立つ。よって

$$d = \mathrm{BC}\sin\theta = \left(\ell - \frac{1}{\cos\theta}\right)\sin\theta \iff \boldsymbol{d = -\tan\theta + \ell\sin\theta}$$



問 2　θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を取りうる。問 1 より $d = 8\sin\theta - \tan\theta$ と書けるので，$f(\theta) = 8\sin\theta - \tan\theta$ とおいて

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 8\cos\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{8\cos^3\theta - 1}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{(2\cos\theta - 1)\left(4\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1\right)}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

ここで，$4\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 4\left(\cos\theta + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ であることから，$f'(\theta)$ の符号変化は $2\cos\theta - 1$ の符号変化に注目すればよい。よって，以下の増減表を得る。

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\searrow$	

つまり, d の最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$ である。

問 3　長さ ℓ の棒の下端を A，上端を B とする。図 3 のように，壁に点 C をとる。右方向に曲がるときに点 B から内側の壁に下ろした垂線の足を H とし，$\angle \mathrm{BCH} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。問 1 より，$\mathrm{BH} = f(\theta)$ である。ここで, 右側に曲がれる条件は BH の最大値が 2 以下になることである。よって，$f(\theta)$ の最大値を求める。ここで,

$\ell \leqq 1$ であれば, 必ず右に曲がることができるので，以下では $\ell > 1$ と考える。

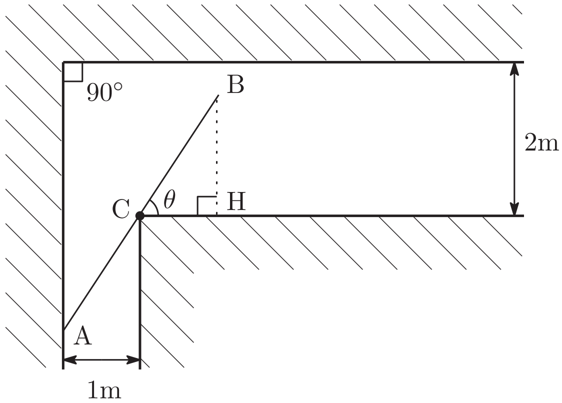


図 3

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= \frac{\ell\cos^3\theta - 1}{\cos^2\theta} \\
&= \ell \cdot \frac{\cos^3\theta - \frac{1}{\ell}}{\cos^2\theta} \\
&= \ell \cdot \frac{\left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt[3]{\ell}}\right)\left(\cos^2\theta + \frac{1}{\sqrt[3]{\ell}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt[3]{\ell^2}}\right)}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

$\cos^2\theta + \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ell}}\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ell}} = \left(\cos\theta + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{\ell}}\right)^2 + \dfrac{3}{4\sqrt[3]{\ell^2}} > 0$ より，$f'(\theta)$ の符号変化は $\cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ell}}$ に注目すればよい。$\cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ell}} = 0$ となる θ を α とすると, 以下の増減表を得る。

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

よって，$f(\theta)$ の最大値は $f(\alpha) = -\tan\alpha + \ell\sin\alpha$ である。ここで，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ell}}$ より

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{\ell^2} - 1}}{\sqrt[3]{\ell}}, \quad \tan\alpha = \sqrt{\sqrt[3]{\ell^2} - 1}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= -\sqrt{\sqrt[3]{\ell^2} - 1} + \sqrt[3]{\ell^2}\sqrt{\sqrt[3]{\ell^2} - 1} \\
&= \left(\sqrt[3]{\ell^2} - 1\right)\sqrt{\sqrt[3]{\ell^2} - 1} \\
&= \left(\sqrt[3]{\ell^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

よって，$\left(\sqrt[3]{\ell^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \leqq 2$ を解く。両辺が正であることに注意して，両辺を 2 乗すると

$$\sqrt[3]{\ell^2} - 1 \leqq 2^{\frac{2}{3}} \iff \sqrt[3]{\ell^2} \leqq 1 + 2^{\frac{2}{3}}$$

両辺が正であることに注意して, 両辺を $\dfrac{3}{2}$ 乗して

$$\ell \leqq \left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって，ℓ の最大値は $\boldsymbol{(1+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}}$[m] である。

4

次の文章を読み, 下の問い (問 1〜4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

図 1 のような正八角形 ABCDEFGH の頂点から異なる 3 点を無作為に選び，これらを頂点とする三角形を作る，という試行を行う。

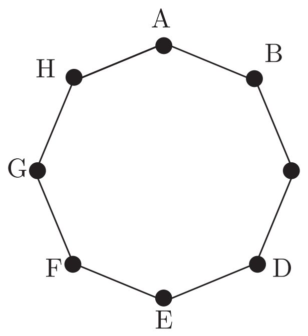


図 1

問 1　この試行でできる三角形が二等辺三角形である場合の数は $\boxed{27}\boxed{28}$ 通りで，すべての辺の長さが異なる三角形である場合の数は $\boxed{29}\boxed{30}$ 通りである。

問 2　この試行でできる三角形が，△AHB と合同である確率は $\dfrac{\boxed{31}}{\boxed{32}}$ であり，△AHC と合同である確率は $\dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}$ である。

問 3　合同な三角形を同じ種類とみなすとき，この試行で $\boxed{35}$ 種類の三角形を作ることができる。

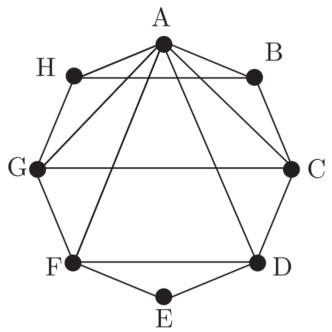
問 4　2 回続けてこの試行を行う。ここで 1 回目と 2 回目の試行は独立に行われるものとする。

(1)　1 回目にできる三角形と 2 回目にできる三角形が合同である確率は $\dfrac{\boxed{36}\boxed{37}}{\boxed{38}\boxed{39}}$ である。

(2)　1 回目にできた三角形が二等辺三角形だったとき，2 回目にできる三角形が 1 回目の三角形と合同である確率は $\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$ である。

解答

(1)　8 つの頂点から異なる 3 点の選び方は ${}_8C_3 = 56$ 通りあり，
それぞれの選び方で三角形が 1 つできる。



頂角が A の二等辺三角形は,

$\triangle$ABH，$\triangle$ACG，$\triangle$ADF

の 3 通りある。

頂角が B，C，D，E，F，G，H の場合も同様であるから

二等辺三角形は全部で

$3 \times 8 = \mathbf{24}$ 通り

また，正三角形は作れないので，辺の長さがすべて異なる三角形は，

$56 - 24 = \mathbf{32}$ 通り

問 2　8 つの頂点から異なる 3 点の選び方は ${}_8C_3 = 56$ 通りあり，これらはすべて同様に確からしい。

このうち，$\triangle$AHB と合同な三角形ができるのは，

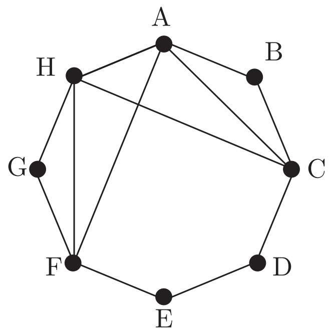
頂角が B，C，D，E，F，G，H の場合で合同となるものを考えて，8 通りあるから，

その確率は

$$\frac{8}{56} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

また，$\triangle$AHC と合同となるものは

辺 AH を共有しているのものが $\triangle$AHC と $\triangle$AHF の 2 通りあり，



これと合同で，辺 AH を HG，GF，FE，ED，DC，CB，BA に変えたものも同様にあり，全部で

$2 \times 8 = 16$ 通り

あるから，その確率は

$$\frac{16}{56} = \mathbf{\frac{2}{7}}$$

問 3　二等辺三角形は $\triangle$ABH，$\triangle$ACG，$\triangle$ADF の 3 種類のいずれかと合同であり，

すべての辺が異なる三角形は $\triangle$AHC，$\triangle$AHF の 2 種類のいずれかと合同であるから，

作られる三角形は全部で **5 種類** である。

問 4 (1)　問 2 と同様に考えて，

$\triangle$ABH，$\triangle$ACG，$\triangle$ADF と合同な三角形はそれぞれ 8 通り作れ，

$\triangle$AHC，$\triangle$AHF と合同な三角形はそれぞれ 16 通り作れる。

よって，1 回の試行でそれぞれの三角形と合同になる確率をまとめると，次の表のようになる。

三角形	$\triangle$ABH	$\triangle$ACG	$\triangle$ADF	$\triangle$AHC	$\triangle$AHF	
確率	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	計 1

1 回目と 2 回目の試行は独立なので，1 回目と 2 回目にできる三角形が合同となる確率は

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \mathbf{\frac{11}{49}}$$

(2)　「1 回目にできる三角形が二等辺三角形となる」という事象を N

「2 回目にできる三角形が 1 回目の三角形と合同となる」という事象を G とすると，

求める確率は $P_N(G)$ であるから

$$
\begin{aligned}
P_N(G) &= \frac{P(N \cap G)}{P(N)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2}{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}
\end{aligned}
$$

講評

$\boxed{1}$ ［小問集合］(標準)

問 1 複素数と方程式，問 2 積分法からの出題である。問 1 はやや計算が重いものの，いずれも典型問題である。

$\boxed{2}$ ［数Ⅲ微分法，数Ⅲ積分法,］（標準）

$f'(x) = \dfrac{\log x}{x}$ から計算を進めていくだけである。穴埋めに 1 や − が入るので，そこで戸惑った受験生はいたかもしれない。

$\boxed{3}$ ［数Ⅲ微分法］（やや難）

文章題でこの手の問題に慣れている受験生は少ないだろう。問 2 までできればかなり良い方ではないだろうか。

$\boxed{4}$ ［場合の数と確率］（標準）

丁寧な数え上げがものを言う問題である。時間を考えると全答するのが難しい受験生もいたであろう。

やや難化した。時間が短いので一回で正確に計算を合わせられないと厳しいだろう。また，全体的に基礎の定着度合いを見る問題が多く，この傾向は変わっていない。一次突破ラインは 55〜60% 程度か。