医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東京医科大学　数学

2022年 2月5日実施

第 **1** 問

(1)　座標平面において，楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ における法線の方程式は

$$bx-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}ay=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}ab$$

である。

(2)　一辺の長さが 1 の正十二面体 **P** について考える。正十二面体 **P** の頂点のひとつを O とし，**P** の三つの頂点 A，B，C を頂点 O を端点とする **P** の三つの辺が線分 OA，OB，OC となるようにとる。さらに，二点 A，B 間の距離を r とする。

　このとき，等式

$$(r-1)^2=\boxed{\text{オ}}-r$$

が成立する。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積はふたつの有理数 $a=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ と $b=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ により

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a+br$$

と表される。四面体 OABC の体積を V とすると $\dfrac{V}{r}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{9+7\tan|x|}\cos^2 x}=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(4)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx=\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

解答

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 P における接線 ℓ の方程式は

$$\ell:\frac{a}{8}x+\frac{b}{3}y=1$$

と書ける。ℓ の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}\frac{a}{8}\\ \frac{b}{3}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}3a\\ 8b\end{pmatrix}$ であり，これは点 P における法線 m の方向ベクトル

である。よって，m の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} -8b \\ 3a \end{pmatrix}$ と表せるから，m の方程式は

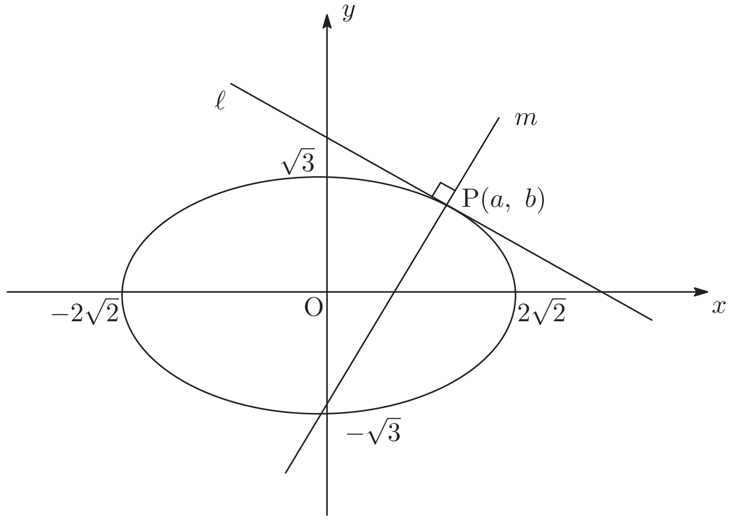
$$m : -8bx + 3ay = c$$

m は $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通ることから

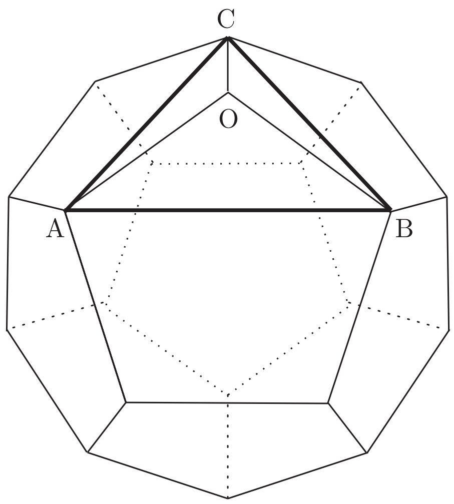
$$-8ab + 3ab = c \qquad \therefore \quad c = -5ab$$

よって

$$-8bx + 3ay = -5ab \iff \boldsymbol{bx - \frac{3}{8}ay = \frac{5}{8}ab}$$



(2)



$\mathrm{AB}(=r)$ は一辺の長さが 1 の正五角形の対角線であるから，トレミーの定理より

$$r \cdot r = 1 \cdot r + 1 \cdot 1 \iff r^2 = r + 1 \iff (r-1)^2 + 2r - 1 = r + 1 \iff (r-1)^2 = \boldsymbol{2 - r}$$

が成立する。また

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB} \\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{1^2+1^2-r^2}{2\cdot 1\cdot 1} \quad (\because \text{余弦定理}) \\
&= \frac{2-r^2}{2} \\
&= \frac{2-(r+1)}{2} \quad (\because r^2=r+1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)r}
\end{aligned}
$$

である。ここで，点 O から △ABC に下ろした垂線の足を H とすると，AH=BH=CH より，AH は △ABC の外接円の半径となるので，正弦定理より

$$
2\mathrm{AH} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ} \iff \mathrm{AH} = \frac{r}{\sqrt{3}}
$$

である。さらに，三平方の定理より

$$
\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2} = \sqrt{1-\frac{r^2}{3}}
$$

となる。したがって，四面体 OABC の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\sin 60^\circ\cdot\sqrt{1-\frac{r^2}{3}}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{r} &= \frac{\sqrt{3}}{12}r\sqrt{1-\frac{r^2}{3}} \\
&= \frac{1}{12}\sqrt{r^2(3-r^2)} \quad (\because r>0 \text{ より } r=\sqrt{r^2}) \\
&= \frac{1}{12}\sqrt{(r+1)(2-r)} \quad (\because r^2=r+1) \\
&= \frac{1}{12}\sqrt{-r^2+r+2} \\
&= \frac{1}{12}\sqrt{1} \quad (\because r^2=r+1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{12}}
\end{aligned}
$$

(3)　$\tan|x|$, $\cos^2 x$ は偶関数であり，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であることから

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9+7\tan|x|}\cdot\cos^2 x} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9+7\tan|x|}\cdot\cos^2 x} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9+7\tan x}\cdot\cos^2 x} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x)'}{\sqrt{9+7\tan x}}dx \\
&= 2\left[\frac{2}{7}\sqrt{9+7\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{4}{7}(\sqrt{16}-\sqrt{9}) \\
&= \frac{4}{7}(4-3) \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{7}}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x} &= \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x} \\
&= \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}\cdot(1+\sin x) \\
&= \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}\sin x
\end{aligned}$$

$\tan|x|$, $\cos^2 x$ は偶関数であり，$\sin x$ は奇関数であるから，$\dfrac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}$ は偶関数，$\dfrac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}\sin x$ は奇関数である。よって

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}\sin x\right)dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4+5\tan x}}{\cos^2 x}dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4+5\tan x}\cdot(\tan x)'dx \\
&= 2\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}(4+5\tan x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{4}{15}\left(9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{4}{15}\left(3^3-2^3\right) \\
&= \frac{4}{15}\cdot 19 \\
&= \boldsymbol{\frac{76}{15}}
\end{aligned}$$

第 2 問

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = \frac{1}{4}t^4,\ y = \frac{\sqrt{3}}{5}t^5$$

で表されるときを考える。

(1) 時刻 $t=4$ における点 P の速さは $\boxed{アイウ}$ である。

(2) 時刻 $t=3$ における点 P の加速度の大きさは $\boxed{エオカ}$ である。

(3) 時刻 $t=0$ から $t=1$ までの点 P の道のりは $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコサ}}$ である。

解答

原点を O，点 P の速度を $\overrightarrow{v}$，加速度を $\overrightarrow{a}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{1}{4}t^4,\ \frac{\sqrt{3}}{5}t^5\right)$$

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \left(t^3,\ \sqrt{3}t^4\right)$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(3t^2,\ 4\sqrt{3}t^3\right)$$

である。

(1) $t=4$ における点 P の速度は

$$\overrightarrow{v} = 64\left(1,\ 4\sqrt{3}\right)$$

であるから，点 P の速さは

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = 64\sqrt{1^2+(4\sqrt{3})^2} = 64\times 7 = \mathbf{448}$$

(2) $t=3$ における点 P の加速度は

$$\overrightarrow{a} = 27(1,\ 4\sqrt{3})$$

であるから，点 P の加速度の大きさは

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = 27\sqrt{1+(4\sqrt{3})^2} = 27\times 7 = \mathbf{189}$$

(3) 点 P の $t=0$ から $t=1$ までの道のりは

$$\int_0^1 \left|\overrightarrow{v}\right| dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t^6+3t^8}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^3\sqrt{3t^2+1}\,dt \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$3t^2+1=u$ とおくと

$$dt = \frac{1}{6t}du$$

t	$0 \longrightarrow 1$
u	$1 \longrightarrow 4$

であるから

$$
\begin{aligned}
① &= \int_1^4 t^3\sqrt{3t^2+1}\cdot\frac{1}{6t}du \\
&= \frac{1}{6}\int_1^4 t^2\sqrt{3t^2+1}du \\
&= \frac{1}{6}\int_1^4 \frac{u-1}{3}\sqrt{u}du \\
&= \frac{1}{18}\int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\
&= \boldsymbol{\frac{58}{135}}
\end{aligned}
$$

(注意)　①の積分は $u=\sqrt{3t^2+1}$ とおく，等でも計算できる。

第 3 問

当たりくじ 3 本とはずれくじ 6 本からなるくじについて，次の試行 (i)，(ii)，(iii) を順に行う。

(i) はじめに，2 本を選び，その 2 本が取り除かれる。この時点で取り除かれたくじが当たりかはずれか知らされない。
(ii) つぎに，残りの 7 本のくじのうちはずれくじが 1 本取り除かれる。
(iii) 最後に，残りの 6 本のうち 1 本を引く

この一連の試行において，事象 A，B，C，E を

A 「(i) において取り除かれたくじが両方ともはずれ」
B 「(i) において取り除かれたくじの 1 本だけが当たり」
C 「(i) において取り除かれたくじが両方とも当たり」
E 「(iii) において引いたくじが当たり」

により定める。このとき，事象 A の確率は

$$P(A) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$$

であり，事象 B が起こったときの E の起こる条件つき確率は

$$P_B(E) = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，事象 $C \cap E$ の確率は

$$P(C \cap E) = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

であり，事象 E の確率は

$$P(E) = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

である。

解答

9 本のくじから 2 本選ぶとき，選び方は ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りある。

事象 A が起こるのは，9 本から 2 本選んだときにはずれを 2 本選ぶときだから
その確率は

$$P(A) = \frac{{}_6\mathrm{C}_2}{36} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$$

事象 B が起こったとき，当たりとはずれのくじが 1 本ずつ取り除かれ，さらにはずれが 1 本取り除かれる。
さらに，このとき事象 E が起こるのは，当たり 2 本とはずれ 4 本の計 6 本から 1 本引いてそれが当たりのときだから，

$$P_B(E) = \frac{2}{6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

事象 $C \cap E$ が起こるのは，最初に 2 本の当たりを引き $\left(\text{確率}\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{36}\right)$，
つぎに当たり 1 本とはずれ 5 本の計 6 本から 1 本引いてそれが当たりのとき $\left(\text{確率}\frac{1}{6}\right)$ だから

$$P(C \cap E) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{72}}$$

事象 E が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) \\ &= \frac{15}{36} \cdot \frac{3}{6} + \frac{18}{36} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}} \end{aligned}$$

第 4 問

四次方程式

$$x^4-8x^3+cx^2+4x-6=0 \quad (c \text{ は定数})$$

の四つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ とする。

二つの解 α と β の積が $\alpha\beta=\sqrt{2}$ であるとき，

$$\gamma^2\delta^2=\boxed{\text{アイ}}$$

であり，

$$\gamma+\delta=\boxed{\text{ウ}}-\frac{\sqrt{2}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。また，このとき

$$c=\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

解答

条件より

$$x^4-8x^3+cx^2+4x-6=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \quad \cdots ①$$

である。①の右辺を展開すると，各項の展開項を考えて

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\\ =&x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\gamma\delta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta)x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta \quad \cdots ②\end{aligned}$$

となる。①②より各項を比較して

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=8 & \cdots ③\\ \alpha\beta+\gamma\delta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta=c & \cdots ④\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-4 & \cdots ⑤\\ \alpha\beta\gamma\delta=-6 & \cdots ⑥\end{cases}$$

$\alpha\beta=\sqrt{2}$ のとき，⑥より

$$\sqrt{2}\gamma\delta=-6 \iff \gamma\delta=-3\sqrt{2} \qquad \therefore \quad \gamma^2\delta^2=\mathbf{18}$$

であり，⑤より

$$\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=-4$$

であるので，③から $\alpha+\beta=8-(\gamma+\delta) \quad \cdots ⑦$ を代入して

$$\sqrt{2}(\gamma+\delta)+(-3\sqrt{2})\{8-(\gamma+\delta)\}=-4 \iff 4\sqrt{2}(\gamma+\delta)=24\sqrt{2}-4 \iff \gamma+\delta=\mathbf{6-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

である。このとき，⑦ より $\alpha+\beta=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，また，④より

$$\alpha\beta+\gamma\delta+\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=c \iff \alpha\beta+\gamma\delta+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=c$$

であるので，これまでの結果を代入して

$$\sqrt{2}+(-3\sqrt{2})+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(6-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=c \iff c=\mathbf{\frac{23}{2}}$$

講評

第 **1** 問［小問集合］(標準)

(1) 楕円の法線，(2) 正十二面体 (正五角形)，(3)(4) 積分計算からの出題である。(1) は教科書の基本である。(2) は正十二面体ではあるものの，正五角形の問題経験があれば問題ない。(3)(4) も入試ではよくあるタイプの積分である。

第 **2** 問［数Ⅲ積分法］（やや易）

速度，加速度，道のりの公式を適用するだけの問題である。(3) の積分計算も易しい。位置・速度・加速度に関する問題は出題頻度が低いので公式を覚えていたかが鍵だろう。

第 **3** 問［場合の数と確率］（やや易）

教科書の延長レベルの問題である。事象も複雑ではないので，条件の見落としに注意したい。

第 **4** 問［複素数と方程式］（標準）

4 次方程式の解と係数の関係の問題で，自ら作ればいい。

易化傾向が続いている。日頃から基礎を怠らずに勉強しているかが問われた出題である。一次突破ラインは 65〜70% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
友だち追加で全科目を閲覧！
LINE 公式アカウント
◀ YMS の友だち登録はこちらから