医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本医科大学（後期）　数学

2022年 3月4日実施

[I]

以下の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。

問 1　3 以上の整数 m と実数 a（ただし，$a \neq 2$）に対し，x の m 次式 $(2x-a)^m$ を $(x-1)^3$ で割ったときの余りを

$$(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3} P_n(m)x^{3-n}$$

と表すとき，m の 2 次式 $P_n(m)$ $(n=1,2,3)$ を平方完成した形で求めると，

$$P_1(m) = \boxed{\text{ア}}\left(m - \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^2 - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

$$P_2(m) = -\boxed{\text{カ}}\left(m - \frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}}\right)^2 - \frac{a^2 - \boxed{\text{ケ}}\,a + \boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

$$P_3(m) = \boxed{\text{シ}}\left(m - \frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}}\right)^2 + \frac{a^2 - \boxed{\text{ソ}}\,a - \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

となる。

問 2　問 1 において，数列

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}},\quad \frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}}$$

は初項 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，公比 $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}-a}{\boxed{\text{テ}}}$ の等比数列となる。また座標平面上の 3 点

$$\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right),\ \left(\frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}},\ \frac{a^2-\boxed{\text{ケ}}\,a+\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right),\ \left(\frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{a^2-\boxed{\text{ソ}}\,a-\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

が同一直線上にあるための a に対する必要十分条件は $a = \boxed{\text{ト}}$ である。

解答

問 1　$x-1=t$ とおくと $x=t+1$ であるから，
$(2x-a)^m$ に代入し，二項定理で展開すると

$$\begin{aligned}(2x-a)^m &= \{2t+(2-a)\}^m \\ &= \underbrace{(t\text{ の 3 次以上の項})}_{t^3\text{で割り切れる項}}+\underbrace{{}_m\mathrm{C}_2(2t)^2(2-a)^{m-2}+{}_m\mathrm{C}_1(2t)(2-a)^{m-1}+(2-a)^m}_{t^3\text{で割った余り}}\end{aligned}$$

であるから，

$(2x-a)^m$ を $t^3=(x-1)^3$ で割った余りは

$$\begin{aligned}&{}_m\mathrm{C}_2(2t)^2(2-a)^{m-2}+{}_m\mathrm{C}_1(2t)(2-a)^{m-1}+(2-a)^m \\ =\ &\frac{m(m-1)}{2}\cdot 4(2-a)^{m-2}(x-1)^2+m\cdot 2(2-a)^{m-1}(x-1)+(2-a)^m \\ =\ &(2-a)^{m-2}\left[\underbrace{2m(m-1)}_{P_1(m)}x^2+\underbrace{\{-4m^2+2(4-a)m\}}_{P_2(m)}x+\underbrace{2m^2-2(3-a)m+(2-a)^2}_{P_3(m)}\right]\end{aligned}$$

とわかるので

$$\begin{aligned}P_1(m) &= 2m(m-1) \\ &= \boldsymbol{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_2(m) &= -4m^2+2(4-a)m \\ &= \boldsymbol{-4\left(m-\frac{4-a}{4}\right)^2+\frac{a^2-8a+16}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_3(m) &= 2m^2-2(3-a)m+(2-a)^2 \\ &= \boldsymbol{2\left(m-\frac{3-a}{2}\right)^2+\frac{a^2-2a-1}{2}}\end{aligned}$$

(注意)　別解として，剰余の定理を用いるものや，微分法を用いるものなど，多数考えられる。

問 2　数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{4-a}{4},\ \frac{3-a}{2}$$

は初項 $\frac{1}{2}$，公差 $\frac{4-a}{4}-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{2-a}{4}}$ の等差数列となる。

このことを踏まえると，

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{4-a}{4},\ \frac{a^2-8a+16}{4}\right)$$

$$\mathrm{C}\left(\frac{3-a}{2},\ \frac{a^2-2a-1}{2}\right)$$

が同一直線上にあるための必要十分条件は，

これら 3 点の y 座標もこの順で等差数列になることで

$$-\frac{1}{2}+\frac{a^2-2a-1}{2}=2\cdot\frac{a^2-8a+16}{4}$$

$$a^2-2a-2=a^2-8a+16$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a=3}$$

[II]

n を 3 以上の整数とする。中が見えない袋の中に白球が n 個，黒球が n 個，赤球が 3 個入っており，袋の中から 3 個の球を無作為に同時に取り出す試行を行う。取り出した 3 個の球の色の種類が 2 である確率を p_n とする。また，取り出した 3 個の球の色の種類が 2 であり，かつその 3 個の球に赤球が含まれない確率を q_n とする。このとき，以下の各問いに答えよ。また，以下の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{サ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。分数形で解答する場合，既約分数で答えること。

問 1　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$p_n = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \frac{n^3 + \boxed{\text{ウ}} n^2 + \boxed{\text{エ}} n}{\left(n + \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)\left(n + \boxed{\text{キ}}\right)\left(n + \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)} \quad \left(\text{ただし，} \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} > \boxed{\text{キ}} > \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

となる。

問 2　数列 $\{q_n\}$ の極限を $\alpha = \lim_{n\to\infty} q_n$ とすると，$\alpha = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ となる。

問 3　問 2 の α に対し，極限 $\beta = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{p_n}\right)^n$ の値を求めよ。必要ならば自然対数の底の定義 $e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ （ただし，t は実数）を用いてよい。

解答

問 1　合計 $(2n+3)$ 個入った袋から 3 個取り出したときに，取り出された球の色がちょうど 2 種類となるのは，白と黒，黒と赤，赤と白を取り出す場合を考えて

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{({}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_2) + ({}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2) + ({}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_2)}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3} \\ &= \frac{2n \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 2(3{}_n\mathrm{C}_2 + 3n)}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3} \\ &= \frac{2(n+3){}_n\mathrm{C}_2 + 6n}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3} \\ &= \frac{2(n+3)\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 6n}{\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{6}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4} \cdot \frac{n^3 + 2n^2 + 3n}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}} \end{aligned}$$

問 2　取り出された 3 個の球の色が白と黒の場合であるから

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{{}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3} \\ &= \frac{2n \cdot {}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3} \\ &= \frac{n^2(n-1)}{\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{6}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \longrightarrow \frac{3}{4} \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\alpha = \frac{3}{4}}$ である。

問 3

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^3+2n^2+3n}\right\}^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{1+\frac{2n^2+3n}{n^3}}\right\}^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{2n^2+3n}{n^3}\right)^n} \\
&= \lim_{t\to+0}\frac{\left(1+\frac{3t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}(1+t)^{\frac{1}{t}}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}}{(1+2t+3t^2)^{\frac{1}{t}}} \qquad \left(\because\ \frac{1}{n}=t\text{ とおいた}\right) \\
&= \lim_{t\to+0}\frac{\left\{\left(1+\frac{3t}{2}\right)^{\frac{2}{3t}}\right\}^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{t}}\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{(1+2t+3t^2)^{\frac{1}{2t+3t^2}}\right\}^{\frac{2t+3t^2}{t}}} \\
&= \frac{e^{\frac{3}{2}}\cdot e\cdot e^{\frac{1}{2}}}{e^2} \\
&= \boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

[Ⅲ]

実数の定数 l は $l \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ を満たすとする。四面体 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=l$，辺 AB を 1 : 5 に内分する点を L，辺 BC の中点を M，辺 CD を 5 : 3 に内分する点を N とし，これら 3 点で定まる平面 LMN と直線 AD との交点を P とする。また, 点 P から平面 BCD に垂線 PH を下ろしたとき，$\mathrm{PH}=\dfrac{l}{2}$ であるとする。$x=\mathrm{AM}$ とおき，四面体 ABCD の体積を V として，以下の各問いに答えよ。

問 1　$\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

問 2　x がとりうる値の範囲を求めよ。答えのみでよい。

問 3　V を l と x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　l を固定して，$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} \geqq \dfrac{2}{3}$ を満たすように x を動かすとき，V の最大値 $V_{\max}$ を求めよ。

解答

問 1　点 P は平面 LMN 上にあるので，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{AL}}+s\overrightarrow{\mathrm{AM}}+t\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\&=(1-s-t)\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{6}+s\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}+t\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+5\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5+3}\\&=\frac{1+2s-t}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4s+3t}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{5t}{8}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

点 P が直線 AD 上にあることより

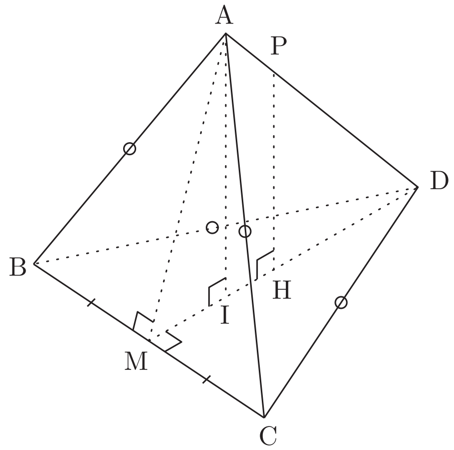
$$\frac{1+2s-t}{6}=0,\ \text{かつ}\ \frac{4s+3t}{8}=0 \iff s=-\frac{3}{10},\ \text{かつ}\ t=\frac{2}{5}$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

であることより，$\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}=\mathbf{3}$ である。

問 2



点 A から平面 BCD に下ろした垂線の足を I とすると，$\triangle\mathrm{AID} \backsim \triangle\mathrm{PHD}$ より

$$\mathrm{AI} = \frac{4}{3}\mathrm{PH} = \frac{2}{3}l$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DBC}$ は 3 辺の長さが等しく合同となるから，点 D から BC に下ろした垂線の足は点 M に一致し，AM=DM$= x$ である。さらに，点 I は直線 DM 上に存在する。
$\triangle\mathrm{ABC}$ に注目して

$$\mathrm{AM} < \mathrm{AB} \iff x < l$$

$\triangle\mathrm{AMD}$ に注目して

$$\mathrm{AM} \geqq \mathrm{AI} \iff x \geqq \frac{2}{3}l$$

したがって，$\frac{2}{3}l \leqq x < l$ であり，このとき，四面体 ABCD は存在する。よって，

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}l \leqq x < l}$$

(参考)　四面体の各辺の存在条件を考えて（BC，AD 等の長さの導出は後述），

$$\mathrm{BC} > 0, \text{かつ } \mathrm{AD} > 0$$

$$\iff 2\sqrt{l^2 - x^2} > 0,\ \text{かつ } 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - \frac{4}{9}l^2} > 0$$

$2\sqrt{l^2 - x^2} > 0$ について，

$$l^2 - x^2 \geqq 0,\ \text{かつ } l^2 - x^2 > 0$$

$$\iff 0 < x < l \quad \cdots ①$$

$2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - \frac{4}{9}l^2} > 0$ について，

$$x^2 - \frac{4}{9}l^2 \geqq 0,\ \text{かつ } 2x^2 > 2x\sqrt{x^2 - \frac{4}{9}l^2}$$

$$\iff x \geqq \frac{2}{3}l,\ \text{かつ } x > \sqrt{x^2 - \frac{4}{9}l^2}$$

$$\iff x \geqq \frac{2}{3}l \quad \cdots ②$$

したがって，①②より $\frac{2}{3}l \leqq x < l$ であり，このとき，四面体 ABCD は存在する。よって，

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}l \leqq x < l}$$

問 3　$\triangle\mathrm{BDM}$ において三平方の定理を用いると

$$\mathrm{BM} = \sqrt{\mathrm{BD}^2 - \mathrm{DM}^2} = \sqrt{l^2 - x^2}$$

したがって，$\mathrm{BC} = 2\mathrm{BM} = 2\sqrt{l^2 - x^2}$ より

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BCD} \times \mathrm{AI} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{DM} \times \mathrm{AI} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}lx\sqrt{l^2 - x^2}} \end{aligned}$$

問 4　内積の定義および余弦定理を用いると，与えられた条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}} \geqq 0,\ かつ\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} \geqq \frac{2}{3}$$

$$\iff |\overrightarrow{\mathrm{MA}}||\overrightarrow{\mathrm{MD}}|\cdot\frac{|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2}{2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}||\overrightarrow{\mathrm{MD}}|} \geqq 0,\ かつ\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cdot\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2}{2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} \geqq \frac{2}{3}$$

$$\iff |\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 \geqq 0,\ かつ\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 \geqq \frac{4}{3} \quad \cdots ③$$

ここで，$\angle\mathrm{AMD}=\theta$ とすると $\triangle\mathrm{AMI}$ に注目して $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AM}} = \dfrac{2l}{3x}$ となるので，$\triangle\mathrm{ADM}$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DM}}|^2-2|\overrightarrow{\mathrm{AM}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cos\theta \\ &= 2x^2-2x^2\sqrt{1-\frac{4l^2}{9x^2}} \\ &= 2x^2-2x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}l^2} \quad \cdots ④\end{aligned}$$

④および $|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MD}}|=x,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=l$ を③に代入すると

$$2x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}l^2} \geqq 0 \quad \cdots ⑤,\ かつ\ 2x^2-2x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}l^2} \geqq \frac{4}{3} \quad \cdots ⑥$$

⑤について，問 2 より $\dfrac{2}{3}l \leqq x < l$ であるので，⑤はつねに成立する。
⑥について

$$⑥ \iff 3x^2-2 \geqq x\sqrt{9x^2-4l^2} \quad \cdots ⑥'$$

$\dfrac{2}{3}l \leqq x < l,\ l \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ より，$3x^2-2 \geqq 3\left(\dfrac{2}{3}l\right)^2-2 \geqq 3\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-2 \geqq 0$ となるので

$$\begin{aligned}⑥' &\iff (3x^2-2)^2 \geqq (x\sqrt{9x^2-4l^2})^2 \\ &\iff (3-l^2)x^2 \leqq 1 \quad \cdots ⑥''\end{aligned}$$

したがって，⑤⑥をみたす x の範囲は，⑥$''$ が $l \geqq \sqrt{3}$ のときつねに成立することと，問 2 より $\dfrac{2}{3}l \leqq x < l$ であることに注意して

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \sqrt{3}\ のとき，\quad \frac{2}{3}l \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{3-l^2}},\ あるいは\frac{2}{3}l \leqq x < l \\ &l \geqq \sqrt{3}\ のとき，\quad \frac{2}{3}l \leqq x < l\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \sqrt{3}$ のとき，l と $\dfrac{1}{\sqrt{3-l^2}}$ の大小関係を考えると

$$\begin{aligned} l^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3-l^2}}\right)^2 &= l^2 - \frac{1}{3-l^2} \\ &= \frac{-l^4+3l^2-1}{3-l^2} \\ &= -\frac{\left(l^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(l^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{3-l^2} \\ &= -\frac{\left(l - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(l + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(l - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(l + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{3-l^2} \end{aligned}$$

であることと，$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} < \sqrt{3}$ であることを踏まえると，結局 x のとり得る値の範囲は

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ のとき，} &\quad \frac{2}{3}l \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{3-l^2}} \\ l \geqq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ のとき，} &\quad \frac{2}{3}l \leqq x < l \end{aligned}$$

以下，問 3 より

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{9}lx\sqrt{l^2-x^2} \\ &= \frac{2}{9}l\sqrt{-x^4+l^2x^2} \quad (\because\ x>0) \\ &= \frac{2}{9}l\sqrt{-t^2+l^2t} \quad (x^2 = t \text{ とおいた}) \\ &= \frac{2}{9}l\sqrt{-\left(t-\frac{l^2}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}} \ (= V(t) \text{ とする}) \end{aligned}$$

であることに注意する。

i) $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき

t の範囲は，$\dfrac{2}{3}l \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3-l^2}}$ より $\dfrac{4}{9}l^2 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3-l^2}$ である。また，

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{2} - \frac{1}{3-l^2} &= \frac{l^2(3-l^2)-2}{2(3-l^2)} \\ &= -\frac{(l^2-1)(l^2-2)}{2(3-l^2)} \\ &= -\frac{(l-1)(l+1)(l-\sqrt{2})(l+\sqrt{2})}{2(3-l^2)} \end{aligned}$$

であることから，

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \sqrt{2} \text{ のとき，} &\quad \frac{1}{3-l^2} < \frac{l^2}{2} \\ \sqrt{2} \leqq l < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ のとき，} &\quad \frac{l^2}{2} \leqq \frac{1}{3-l^2} \end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \sqrt{2}$ のとき，$V(t)$ は $t = \dfrac{1}{3-l^2}$ $\left(\iff x = \dfrac{1}{\sqrt{3-l^2}} \right)$ のとき最大となり，その値は

$$V\left(\frac{1}{3-l^2}\right) = \frac{2l\sqrt{-l^4+3l^2-1}}{9(3-l^2)}$$

また，$\sqrt{2} \leqq l < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，$V(t)$ は $t = \dfrac{l^2}{2}$ $\left(\iff x = \dfrac{l}{\sqrt{2}} \right)$ のとき最大となり，その値は

$$V\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right) = \frac{l^3}{9}$$

ii）$l \geqq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき

x^2 の範囲は，$\dfrac{2}{3}l \leqq x < l$ より $\dfrac{4}{9}l^2 \leqq t < l^2$ である。また，$\dfrac{4}{9}l^2 \leqq \dfrac{l^2}{2} < l^2$ である。

したがって，$V(t)$ は $t = \dfrac{l^2}{2}$ $\left(\iff x = \dfrac{l}{\sqrt{2}} \right)$ のとき最大となり，その値は

$$V\left(\frac{l^2}{2}\right) = \frac{l^3}{9}$$

よって，以上 i) ii) より，求める $V(t)$ の最大値は

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq l < \sqrt{2} \text{ のとき，}\quad V\left(\frac{1}{3-l^2}\right) = \boldsymbol{\frac{2l\sqrt{-l^4+3l^2-1}}{9(3-l^2)}} \quad \left(x = \frac{1}{\sqrt{3-l^2}}\right)$$

$$\sqrt{2} \leqq l \text{ のとき，}\quad V\left(\frac{l^2}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{l^3}{9}} \quad \left(x = \frac{l}{\sqrt{2}}\right)$$

[Ⅳ]

関数 $f(x)(x > 0)$ は連続で，第 1 次導関数 $f'(x)$ が存在して連続で，第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し，かつ $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$ を満たすと仮定する。座標平面において，曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における C の法線と，点 $\mathrm{B}(t+h,\ f(t+h))$ $(h \fallingdotseq 0)$ における C の法線の交点を $\mathrm{P}(h)$ とおく。h を 0 に限りなく近づけるとき，点 $\mathrm{P}(h)$ が限りなく近づく点を P とする。また，2 点 A, P 間の距離を $R(t)$ とおく。

問 1　点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における C の法線の方程式を，$t,\ f(t),\ f'(t)$ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　点 P の座標を以下の形で求めよ。

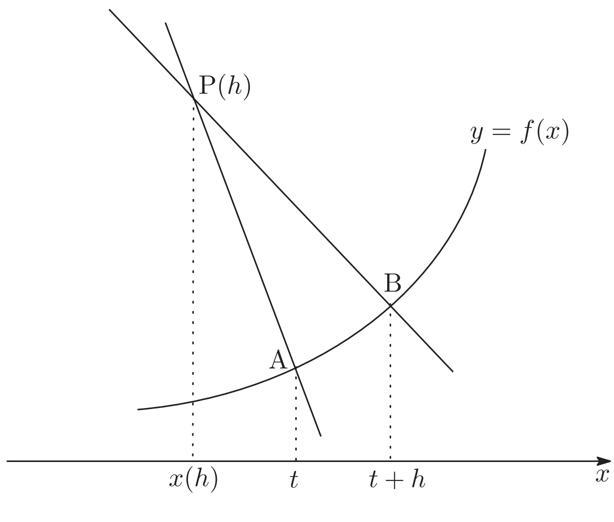
$$\left(t - \boxed{\quad ア \quad},\ f(t) + \boxed{\quad イ \quad}\right)$$

問 3　$R(t)$ を求めよ。答えのみでよい。

問 4　以上の結果を用いて，関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{e^{2t} - 1}\,dt\ (x > 0)$ に対して，次の定積分 I の値を求めよ。

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\log 2} \frac{1}{R(t)}\,dt$$

解答



問 1　点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における曲線 C の接線の傾きは $f'(t)\ (> 0)$ であることから，点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における曲線 C の法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(t)}$ であるので，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{f'(t)}x + \frac{t}{f'(t)} + f(t)} \cdots ①$$

問 2　問 1 と同様にして点 $\mathrm{B}(t+h,\ f(t+h))$ における曲線 C の法線の方程式は

$$y = -\frac{x}{f'(t+h)} + \frac{t+h}{f'(t+h)} + f(t+h) \quad \cdots ②$$

直線 ① と ② の交点が $\mathrm{P}(h)$ であることから，$\mathrm{P}(h)$ の x 座標 $x(h)$ を求める。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{f'(t)}x(h)+\frac{t}{f'(t)}+f(t)=-\frac{x(h)}{f'(t+h)}+\frac{t+h}{f'(t+h)}+f(t+h)\\
\iff&\left(\frac{1}{f'(t+h)}-\frac{1}{f'(t)}\right)x(h)=f(t+h)-f(t)+\frac{t+h}{f'(t+h)}-\frac{t}{f'(t)}
\end{aligned}
$$

$f''(t)>0$ より $f'(t)$ は単調増加関数であることから， $f'(t)\fallingdotseq f'(t+h)$ が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
x(h)&=\frac{f'(t+h)f'(t)}{f'(t)-f'(t+h)}\left\{f(t+h)-f(t)+\frac{(t+h)f'(t)-tf'(t+h)}{f'(t+h)f'(t)}\right\}\\
&=f'(t+h)f'(t)\cdot\frac{f(t+h)-f(t)}{f'(t)-f'(t+h)}+\frac{t\{f'(t)-f'(t+h)\}+hf'(t)}{f'(t)-f'(t+h)}
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to0}f'(t+h)f'(t)\frac{f(t+h)-f(t)}{f'(t)-f'(t+h)}&=\lim_{h\to0}f'(t+h)f'(t)\cdot\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\cdot\frac{-1}{\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}}\\
&=\{f'(t)\}^2\cdot f'(t)\cdot\frac{-1}{f''(t)}\quad(\because\ \text{微分係数の定義})\\
&=-\frac{\{f'(t)\}^3}{f''(t)}\\
\lim_{h\to0}\frac{t\{f'(t)-f'(t+h)\}+hf'(t)}{f'(t)-f'(t+h)}&=t+\lim_{h\to0}f'(t)\cdot\frac{-1}{\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}}\\
&=t-\frac{f'(t)}{f''(t)}\quad(\because\ \text{微分係数の定義})
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to0}x(h)=t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}$ を得る。

① に $x=t-\dfrac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}$ を代入することで点 P の座標は

$$
\mathrm{P}\left(\boldsymbol{t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)},\ f(t)+\frac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}}\right)
$$

となる。

問 3　点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ と点 $\mathrm{P}\left(t-\dfrac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)},\ \dfrac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}+f(t)\right)$ の距離が $R(t)$ であるから

$$
\begin{aligned}
R(t)&=\sqrt{\frac{\left[\{f'(t)\}^3+f'(t)\right]^2}{\{f''(t)\}^2}+\frac{\left[\{f'(t)\}^2+1\right]^2}{\{f''(t)\}^2}}\\
&=\frac{\sqrt{\{f'(t)\}^6+3\{f'(t)\}^4+3\{f'(t)\}^2+1}}{f''(t)}\quad(\because f''(t)>0)\\
&=\frac{\sqrt{\left[\{f'(t)\}^2+1\right]^3}}{f''(t)}\\
&=\boldsymbol{\frac{\left[\{f'(t)\}^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(t)}}
\end{aligned}
$$

問 4　$f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}dt$ より　$f'(x)=\sqrt{e^{2x}-1},\ f''(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

$x>0$ で $f'(x)>0,\ f''(x)>0$ となることから，$f(x)$ に問 3 までの結果を用いて

$$R(t)=\frac{\left[\{f'(t)\}^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(t)}=e^t\sqrt{e^{2t}-1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{R(t)}=\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}$$

ゆえに

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}dt$$

$u=\sqrt{e^{2t}-1}$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}$ であり，$\dfrac{du}{u^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2t}}-1}dt$ が成り立つ。また，t と u の数値の対応は次のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	$\to$	$\log 2$
u	$\sqrt{e-1}$	$\to$	$\sqrt{3}$

よって

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}dt\\
&=\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}\,(u^2+1)}du\\
&=\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}du
\end{aligned}$$

$u=\tan\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換して，$\tan\theta=\sqrt{e-1}$ となる θ の値を $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^3\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta d\theta\\
&=\Big[\sin\theta\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{e-1}{e}}}\quad(\because\ \tan\alpha=\sqrt{e-1})
\end{aligned}$$

講評

［Ⅰ］［複素数と方程式，数列，図形と方程式］(標準)

整式の割り算に関する出題であった。計算量もそこそこ多く，計算力が問われた。

［Ⅱ］［確率，極限］（標準）

組合せの確率とそれに関する極限からの出題であった。全体的に取り組みやすい大問であっただろう。本学合格を目指す受験生は完答を目指したい。

［Ⅲ］［空間図形］（難）

空間図形の図形量に関する出題であった。問 3 までは計算量も少ないので，なるべくとっていきたい。問 4 は多くの受験生があまり経験しないような計算であり，完答するのは厳しいのではないだろうか。

［Ⅳ］［数Ⅲ微分法，数Ⅲ積分法］（やや難）

数Ⅲ微分法，数Ⅲ積分法からの出題であった。要領のよい計算が求められる。

どの大問も計算量が多めであった。計算が弱い受験生にはかなり厳しかったであろう。一次突破ラインは 55～60% 程度か。