

## 杏林大学医学部 数学

2023年 1月20日実施

I

複数の玉が入った袋から玉を1個取り出して袋に戻す事象を考える。どの玉も同じ確率で取り出されるものとし、 $n$ を自然数として、以下の問いに答えよ。

- (1) 袋の中に赤玉1個と黒玉2個が入っている。この袋の中から玉を1個取り出し、取り出した玉と同じ色の玉をひとつ加え、合計2個の玉を袋に戻すという試行を繰り返す。 $n$ 回目の試行において赤玉が取り出される確率を $p_n$ とすると、次式が成り立つ。

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad p_3 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

- (2) 袋の中に赤玉3個と黒玉2個が入っている。この袋の中から玉を1個取り出し、赤玉と黒玉を1個ずつ、合計2個の玉を袋に戻す試行を繰り返す。 $n$ 回目の試行において赤玉が取り出される確率を $P_n$ とすると、次式が成り立つ。

$$P_2 = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}, \quad P_3 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

$n$ 回目の試行開始時点で袋に入っている玉の個数 $M_n$ は $M_n = n + \boxed{\text{ス}}$ であり、この時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数 $R_n$ は $R_n = M_n \times P_n$ と表される。 $n$ 回目の試行において黒玉が取り出された場合のみ、試行後の赤玉の個数が試行前と比べて $\boxed{\text{セ}}$ 個増えるため、 $n+1$ 回目の試行開始時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数は $R_{n+1} = R_n + (1 - P_n) \times \boxed{\text{セ}}$ となる。したがって

$$P_{n+1} = \frac{n + \boxed{\text{ソ}}}{n + \boxed{\text{タ}}} \times P_n + \frac{1}{n + \boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つ。このことから

$$(n+3) \times \left( n + \boxed{\text{ツ}} \right) \times \left( P_n - \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \right) \text{が } n \text{ に依らず一定}$$

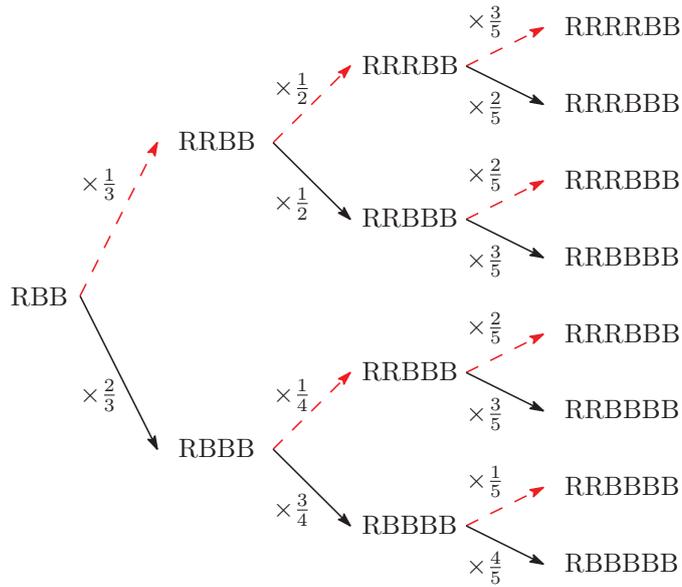
となることがわかり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

と求められる。

**解答**

(1) 3回目までの試行の推移は次のようになる。ただし、赤玉を R、黒玉を B と表す。また、破線の矢印は赤玉 (R) を、実線の矢印は黒玉 (B) を取り出した場合を表す。



よって

$$p_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

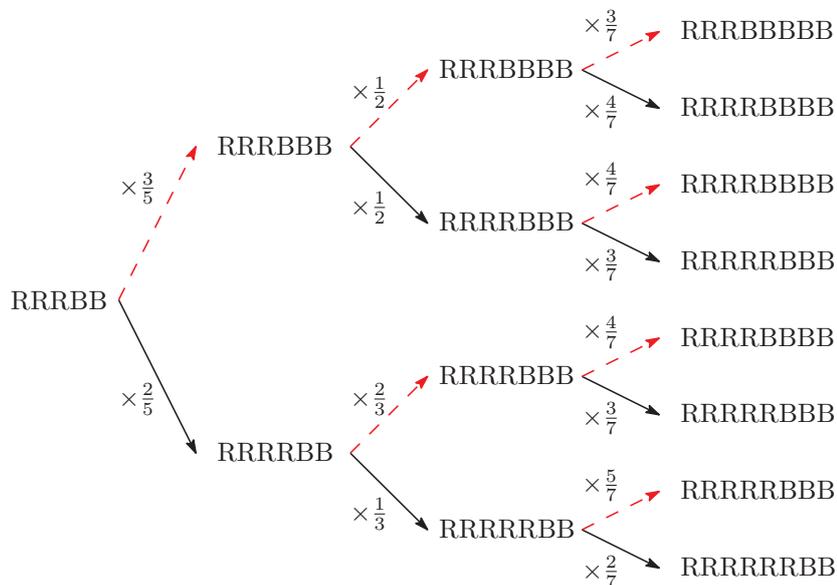
$$p_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

(参考) ポリアの壺を知っていれば、 $p_n = \frac{1}{3}$  であることはすぐにわかる。

ポリアの壺

壺に赤玉が  $p$  個、黒玉が  $q$  個入っている。その中から玉を 1 つ無作為に取り出し、選んだ玉を壺に戻した上で選んだ玉と同じ色の玉を 1 つ壺に加える。この試行を  $n$  回繰り返すとき、 $n$  回目に赤玉が選ばれる確率は  $\frac{p}{p+q}$  である。

(2) 3回目までの試行の推移は次のようになる。



よって

$$P_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{30}$$

$$P_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{23}{42}$$

ここで、 $n$  回目の試行開始時点で袋に入っている玉の個数  $M_n$  を考える．最初 (1 回目) に入っている玉の個数が 5 個で、試行を 1 回行うごとに玉が 1 個ずつ増えるから、

$$M_n = 5 + (n - 1) = n + 4 \quad \dots\dots ①$$

この時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数  $R_n$  は  $R_n = M_n \times P_n$  と表される． $n$  回目の試行において黒玉が取り出された場合にのみ、試行後の赤玉の個数が試行前と比べて 1 個増えるため、 $n + 1$  回目の試行開始時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数は  $R_{n+1} = R_n + (1 - P_n) \times 1$  となる．したがって、ここに  $R_n = M_n \times P_n = (n + 4) \times P_n$ ,  $R_{n+1} = M_{n+1} \times P_{n+1} = (n + 5) \times P_{n+1}$  ( $\because$  ①) を代入して

$$(n + 5) \times P_{n+1} = (n + 4) \times P_n + (1 - P_n) \times 1$$

$$\iff (n + 5)P_{n+1} = (n + 3)P_n + 1 \quad \dots\dots ②$$

$$\iff P_{n+1} = \frac{n + 3}{n + 5} P_n + \frac{1}{n + 5}$$

②の両辺に  $n + 4$  をかけて

$$(n + 4)(n + 5)P_{n+1} = (n + 3)(n + 4)P_n + n + 4 \quad \dots\dots ③$$

$(n + 3)(n + 4)(P_n - \alpha)$  ( $\alpha$  は定数) が  $n$  に依らず一定となるので、③は

$$(n + 4)(n + 5)(P_{n+1} - \alpha) = (n + 3)(n + 4)(P_n - \alpha) \quad \dots\dots ④$$

と変形できる．④を展開して整理すると

$$(n + 4)(n + 5)P_{n+1} = (n + 3)(n + 4)P_n + 2\alpha(n + 4) \quad \dots\dots ⑤$$

③⑤の項を比較して

$$2\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}$$

このとき、④の漸化式を解くと

$$\begin{aligned} (n + 3)(n + 4) \left( P_n - \frac{1}{2} \right) &= 4 \cdot 5 \cdot \left( P_1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= 4 \cdot 5 \cdot \left( \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

より、 $P_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{(n + 3)(n + 4)}$  となるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2}$$

(参考) ③の漸化式は次のように解いてもよい．

③より、数列  $\{(n+3)(n+4)P_n\}$  の階差数列  $\{Q_n\}$  は  $Q_n = n+4$  となるので、 $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned}(n+3)(n+4)P_n &= 4 \cdot 5 \cdot P_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+4) \\ &= \frac{n^2 + 7n + 16}{2}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{n^2 + 7n + 16}{2(n+3)(n+4)} \quad (\text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ}) \\ &= \frac{(n+3)(n+4) + 4}{2(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{(n+3)(n+4)}\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$  を移行した後、両辺に  $(n+3)(n+4)$  をかけると

$$(n+3)(n+4) \left( P_n - \frac{1}{2} \right) = 2$$

II

又 の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ。

点 O を原点とする座標空間に 3 点  $A(-1, 0, -2)$ ,  $B(-2, -2, -3)$ ,  $C(1, 2, -2)$  がある。

(a) ベクトル  $\vec{AB}$  と  $\vec{AC}$  の内積は  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \text{アイ}$  であり,  $\triangle ABC$  の外接円の半径は  $\sqrt{\text{ウエ}}$  である。

$\triangle ABC$  の外接円の中心を点 P とすると,  $\vec{AP} = \text{オ}$   $\vec{AB} + \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$   $\vec{AC}$  が成り立つ。

(b)  $\triangle ABC$  の重心を点 G とすると,  $\vec{OG} = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$  であり, 線分 OB を 2 : 1 に内部する点を Q とすると,

$$\vec{AQ} = \left( \frac{\text{コサ}}{\text{シ}}, \frac{\text{スセ}}{\text{ソ}}, \text{タ} \right)$$

となる。

(c) 線分 OC を 2 : 1 に内分する点を R とし, 3 点 A, Q, R を通る平面  $\alpha$  と直線 OG との交点を S とする。点 S は平面  $\alpha$  上にあることから,

$$\vec{OS} = t\vec{OA} + u\vec{OB} + v\vec{OC}$$

$$\left( \text{ただし } t, u, v \text{ は } t + \frac{\text{チ}}{\text{ツ}} u + \frac{\text{テ}}{\text{ト}} v = 1 \text{ を満たす実数} \right)$$

と書けるので,  $\vec{OS} = \frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$   $\vec{OG}$  となることがわかる。

平面  $\alpha$  上において, 点 S は三角形 AQR の 又 に存在し, 四面体 O-AQR の体積は, 四面体 O-ABC の体積の  $\frac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$  倍である。

又 の解答群

- ① 辺 AQ 上 ② 辺 AR 上 ③ 辺 QR 上 ④ 内部 ⑤ 外部

解答

(a)  $\vec{AB} = (-1, -2, -1)$ ,  $\vec{AC} = (2, 2, 0)$  であるから,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \times 2 + (-2) \times 2 + (-1) \times 0 = -6$$

となる。  $|\vec{AB}| = \sqrt{6}$ ,  $|\vec{AC}| = 2\sqrt{2}$  であることから, 内積の定義より

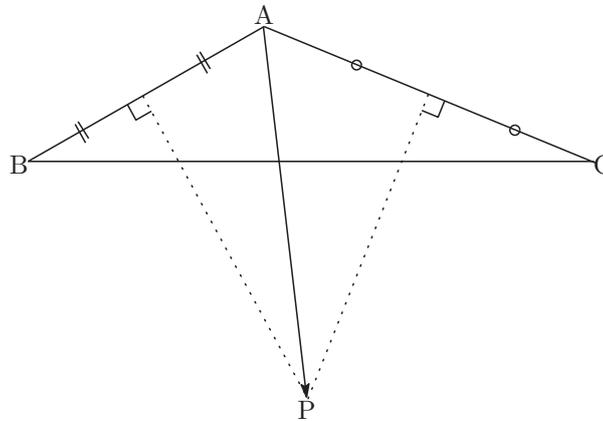
$$\cos \angle BAC = \frac{-6}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって,  $\sin \angle BAC = \frac{1}{2}$

また,  $|\vec{BC}| = \sqrt{26}$  と正弦定理により, 外接円の半径を  $R$  とすると

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC} \iff R = \sqrt{26}$$

△ABC の外心 P は辺 AB, 辺 AC の垂直二等分線であることに注目して



$$\begin{cases} \vec{AP} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| |\vec{AP}| \cos \angle PAB = \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2 = 3 \\ \vec{AP} \cdot \vec{AC} = |\vec{AC}| |\vec{AP}| \cos \angle PAC = \frac{1}{2} |\vec{AC}|^2 = 4 \end{cases}$$

よって,  $\vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$  とおくと,  $\begin{cases} 6s - 3t = 3 \\ -6s + 8t = 4 \end{cases}$  となるので, これを解いて,  $(s, t) = \left(4, \frac{7}{2}\right)$

よって,  $\vec{AP} = 4\vec{AB} + \frac{7}{2}\vec{AC}$

(b) 点 G は △ABC の重心であることから,  $\vec{OG} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$  であり,

また  $\vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{OB} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -2\right)$  であることから,

$$\vec{AQ} = \vec{OQ} - \vec{OA} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}, 0\right)$$

(c)  $\vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{OB}$ ,  $\vec{OR} = \frac{2}{3}\vec{OC}$  であることから,

$$\begin{aligned} \vec{OS} &= t\vec{OA} + u\vec{OB} + v\vec{OC} \\ &= t\vec{OA} + \frac{3}{2}u\vec{OQ} + \frac{3}{2}v\vec{OR} \end{aligned}$$

ここで, 点 S は 3 点 A, Q, R を通る平面上にあることから

$$t + \frac{3}{2}u + \frac{3}{2}v = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となる. ここで, 実数  $k$  を用いて  $\vec{OS} = k\vec{OG} = \frac{k}{3}\vec{OA} + \frac{k}{3}\vec{OB} + \frac{k}{3}\vec{OC}$  と表せる.  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  は一次独立であることから,  $\vec{OS} = t\vec{OA} + u\vec{OB} + v\vec{OC}$  と係数比較して

$$t = \frac{k}{3}, u = \frac{k}{3}, v = \frac{k}{3}$$

よって、①に代入して  $\frac{k}{3} + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = 1 \iff k = \frac{3}{4}$

ゆえに、 $\vec{OS} = \frac{3}{4}\vec{OG}$

$$\vec{OS} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC} \iff \vec{AS} = -\frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC} \dots\dots②$$

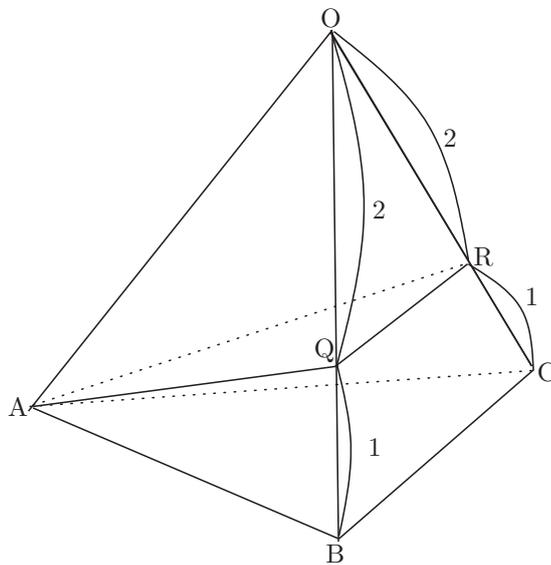
また、点Sは平面AQR上の点であることから、実数p, qを用いて、

$$\begin{aligned} \vec{AS} &= p\vec{AQ} + q\vec{AR} \\ &= p(\vec{OQ} - \vec{OA}) + q(\vec{OR} - \vec{OA}) \\ &= -(p+q)\vec{OA} + \frac{2}{3}p\vec{OB} + \frac{2}{3}q\vec{OC} \end{aligned}$$

よって、②と係数比較して  $(p, q) = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$

ゆえに、 $\vec{AS} = \frac{3}{8}\vec{AQ} + \frac{3}{8}\vec{AR}$  となり、 $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4} < 1$  であることから、点Sは三角形AQRの内部(④)に存在する。四面体O-ABC(体積を $V_1$ とする)、四面体O-AQR(体積を $V_2$ とする)の底面を三角形OBC(面積を $S_1$ とする)、三角形OQR(面積を $S_2$ とする)と見ると、四面体O-ABCと四面体O-AQRの高さが共通であり、さらに三角形OBCと三角形OQRの相似比が3:2であることから

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \text{ (倍)}$$



III

ア,  オ,  ク の解答は該当する解答群から最も適当なもの一つずつ選べ.

座標空間において原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円  $C$  が  $xy$  平面上にあり,  $x > 0$  の領域において点  $A(0, -1, 0)$  から点  $B(0, 1, 0)$  まで移動する  $C$  上の動点を  $P$  とする.

(1) 下記の 2 条件を満たす直角二等辺三角形  $PQR$  を考える.

- ・点  $Q$  は  $C$  上にあり, 直線  $PQ$  は  $x$  軸に平行である.
- ・点  $R$  の  $z$  座標は正であり, 直線  $PR$  は  $z$  軸に平行である.

点  $P$  が点  $A$  から点  $B$  まで移動するとき, 三角形  $PQR$  の周および内部が通過してできる立体  $V$  について, 以下の問いに答えよ.

(a) 点  $P$  が点  $A$  から点  $B$  まで移動するとき, 線分  $PR$  が通過してできる曲面の展開図は, 横軸に弧  $AP$  の長さ, 縦軸に線分  $PR$  の長さをとったグラフを考えればよく,  ア で表される概形となり, その面積は  イ である.

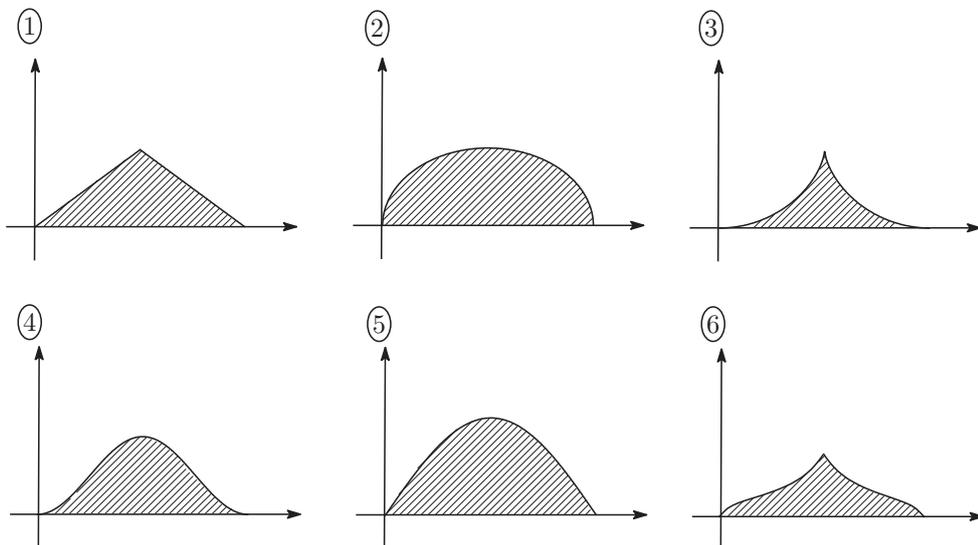
線分  $PQ$  の中点を  $M$  とし, 点  $M$  から直線  $QR$  に引いた垂線と線分  $QR$  との交点を  $H$  とする. 点  $H$  は, 線分  $QR$  を  $1 : \text{ウ}$  に内分する点である. 点  $P$  の位置によらず, 線分の長さについて

$$\text{エ} \times (MH)^2 + (OM)^2 = 1$$

が成り立つ. 点  $P$  が点  $A$  から点  $B$  まで移動するとき, 線分  $MH$  が通過する領域の概形は  オ であり, 面積

は  $\frac{\sqrt{\text{カ}}}{\text{キ}} \pi$  である.

ア,  オ の解答群



(b) 点  $P$  が点  $A$  から点  $B$  まで移動するとき, 線分  $QR$  が通過してできる曲面上において, 2 点  $A, B$  を結ぶ最も短い曲線は  ク が描く軌跡である.

ク の解答群

- ① 点 Q
- ② 点 R
- ③ 設問 (a) で考えた点 H
- ④ 線分 QR と  $yz$  平面との交点
- ⑤ 線分 QR を  $1 : \sqrt{2}$  に内分する点
- ⑥ 線分 QR を  $\sqrt{2} : 1$  に内分する点
- ⑦ 三角形 PQR の重心から線分 QR に引いた垂線と線分 QR のと交点

(c) 点 P が点 A から点 B まで移動するとき、線分 PQ を直径とする  $xz$  平面に平行な円が通過してできる球の体積は  $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}\pi$  である。

$$\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}\pi$$

また、三角形 PQR の面積は、線分 PQ を直径とする円の面積の  $\frac{\text{サ}}{\pi}$  倍である。したがって、立体 V

の体積は  $\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$  である。

(2)  $z \geq 0$  の領域において、 $yz$  平面上の点 T を頂点とし、2 点 P, Q を通る放物線  $L$  を考える。ただし、Q, T は下記の 2 条件を満たす点である。

- ・点 Q は  $C$  上にあり、直線 PQ は  $x$  軸に平行である。
- ・三角形 PQT は  $xz$  平面に平行であり、点 T の  $z$  座標は線分 PQ の長さに等しい。

点 P が  $(1, 0, 0)$  であるとき、放物線  $L$  を表す式は

$$y = 0, \quad z = \text{セソ} x^2 + \text{タ}, \quad (\text{ただし } -1 \leq x \leq 1)$$

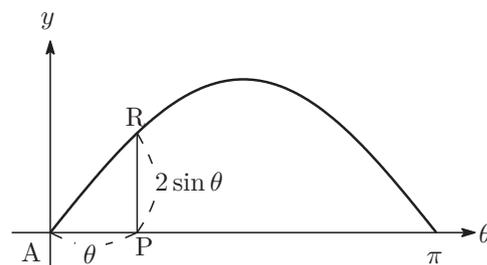
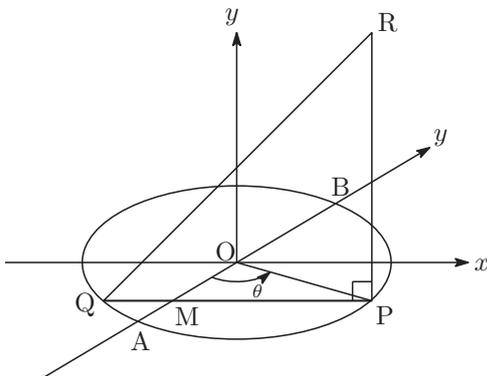
であり、この放物線と線分 PQ で囲まれる図形の面積は  $\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$  である。

点 P が点 A から点 B まで移動するとき、放物線  $L$  と線分 PQ で囲まれる図形が通過してできる立体の体積は

$$\frac{\text{テト}}{\text{ナ}}$$

**解答**

(1) (a)



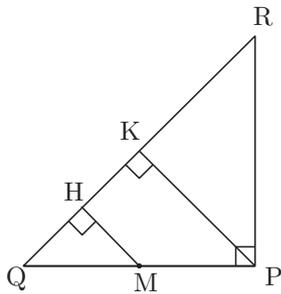
弧 AP の長さを  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) とすると、 $\angle AOP = \theta$  であるから、  
 $P(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$ ,  $A(-\sin \theta, -\cos \theta, 0)$  とわかるので、

$$PR = PQ = 2 \sin \theta$$

したがって、横軸に弧 AP の長さ、縦軸に線分 PQ の長さをとったグラフの概形は上右図のようになる。よっ

て、その概形は⑤であり、面積は

$$\int_0^\pi 2 \sin \theta d\theta = \left[ -2 \cos \theta \right]_0^\pi = 4$$



QR の中点を K とすると、H は QK の中点であるから、H は線分 QR を 1 : 3 に内分する点である。  
また

$$\begin{cases} OM = \cos \theta \\ MH = \frac{1}{\sqrt{2}} OQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{cases}$$

であるから、点 P の位置によらず

$$2(MH)^2 + (OM)^2 = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)^2 + \cos^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \dots\dots ①$$

が成り立つ。

さらに、 $\angle OMH \perp OM$  にも注意すると、

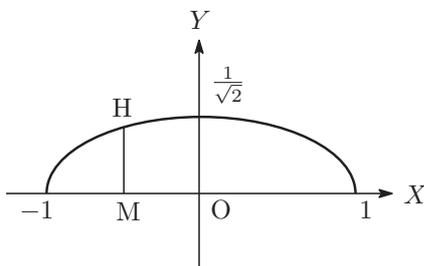
線分 MH は常に、 $y$  軸を含み  $xy$  平面と  $45^\circ$  をなす平面  $\alpha$  上にある。

$OM = X$ ,  $MH = Y$  とすると、平面  $\alpha$  上の点 H は①より

$$2Y^2 + X^2 = 1$$

$$\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

を満たすから、線分 MH が通過する領域は、平面  $\alpha$  上で次の図のようになる。

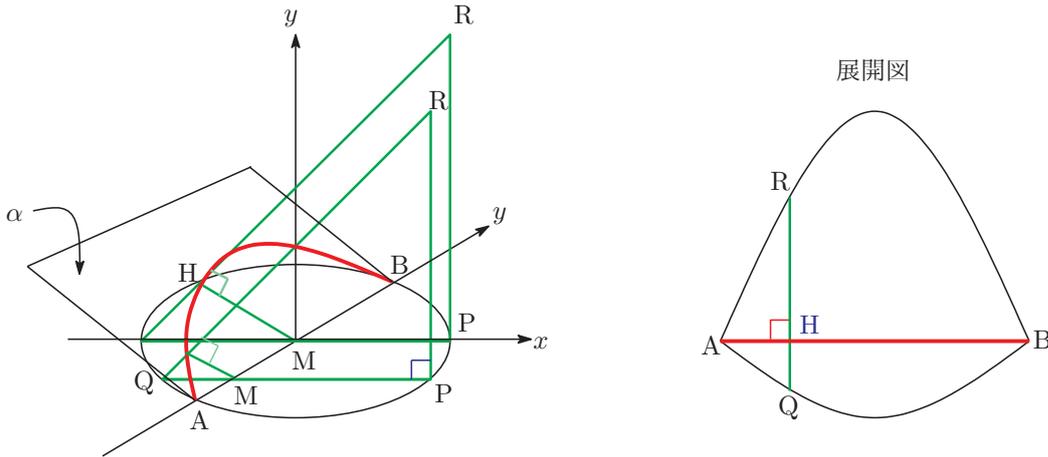


よって、概形は②、

面積は楕円の面積公式より

$$\frac{1}{2} \times \left( \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

(b)



線分 QR が通過する部分を作る曲面を展開して展開図を作ると、  
点 H の軌跡は線分 AB に一致する。

( $\because$  P の位置によらず、線分 QR は平面  $\alpha$  と垂直)

したがって、線分 QR が通過する部分を作る曲面上で 2 点 A, B を結ぶ曲線のうち  
最も短い曲線は、点 H の軌跡である。③

(c) 線分 PQ を直径とし、 $xz$  平面に平行な円  $D$  の中心は M である。

(a) の設定を用いると、円  $D$  の中心は  $M(0, \cos \theta, 0)$ 、半径は  $PM = \sin \theta$   
であるから、円  $D$  上の任意の点 U について

$$\begin{aligned} OU &= \sqrt{OM^2 + MU^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1 \quad (= \text{一定}) \end{aligned}$$

であるから、U は原点を中心とする半径 1 の球面上にある。

すなわち、円  $D$  の通過してできる球は O を中心とする半径 1 の球  $W$  である。

よって、その体積は  $\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$

また、三角形 PQR の面積

$$\frac{1}{2} \cdot PQ^2 = \frac{1}{2} \cdot (\sin \theta)^2 = 2 \sin^2 \theta$$

は、線分 PQ を直径とする円  $D$  の面積

$$\pi PM^2 = \pi (\sin \theta)^2 = \pi \sin^2 \theta$$

の  $\frac{2}{\pi}$  倍である。

立体  $V$  と球  $W$  を  $y$  軸に垂直な平面で切った断面積の比が常に  $\frac{2}{\pi} : 1$  であるから

それらを  $-1 \leq y \leq 1$  の範囲で積分して求められる体積の比も  $\frac{2}{\pi} : 1$  である (カヴァリエリの原理)。

よって、求める  $V$  の体積は

$$\frac{4}{3}\pi \times \frac{2}{\pi} = \frac{8}{3}$$

(2) 点 P が (1, 0, 0) であるとき、放物線  $L$  は  $PQ = 2$  より頂点 (0, 0, 2) の放物線となるので、定数  $p$  を用いて  $y = 0, z = px^2 + 2$  とかける。これが  $P(1, 0, 0)$  を通るので、 $0 = p + 2 \iff p = -2$  である。よって、点 P が (1, 0, 0) であるとき、放物線  $L$  を表す式は

$$y = 0, z = -2x^2 + 2$$

したがって、この放物線と線分 PQ で囲まれる図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx &= \int_{-1}^1 -2(x+1)(x-1) dx \\ &= -2 \left( -\frac{2^3}{6} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

続いて、点 P の  $y$  座標が  $t$  ( $-1 < t < 1$ ) であるとき、放物線  $L$  を表す式を求める。放物線  $L$  は  $PQ = 2\sqrt{1-t^2}$  より頂点 (0, 0,  $2\sqrt{1-t^2}$ ) の放物線となるので、定数  $p_t$  を用いて  $y = t, z = p_t x^2 + 2\sqrt{1-t^2}$  とかける。これが  $P(\sqrt{1-t^2}, t, 0)$  を通るので、 $0 = p_t(1-t^2) + 2\sqrt{1-t^2} \iff p_t = -\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}$  である。よって、点 P の  $y$  座標が  $t$  ( $-1 < t < 1$ ) であるとき、放物線  $L$  を表す式は

$$y = t, z = -\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} x^2 + 2\sqrt{1-t^2}$$

したがって、この放物線と線分 PQ で囲まれる図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \left( -\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} x^2 + 2\sqrt{1-t^2} \right) dx &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} -\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} (x + \sqrt{1-t^2})(x - \sqrt{1-t^2}) dx \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ -\frac{(2\sqrt{1-t^2})^3}{6} \right\} = \frac{8(1-t^2)}{3} \end{aligned}$$

よって、求める体積は、対称性を考慮すると

$$2 \int_0^1 \frac{8(1-t^2)}{3} dt = \frac{32}{9}$$

(参考) (1)(c) より、放物線  $L$  と線分 PQ で囲まれる図形が通過してできる立体の体積と球  $W$  の体積比はそれぞれの

断面積の比  $\frac{8}{3} : \pi = \frac{8}{3\pi} : 1$  に一致するから、求める体積は

$$\frac{4}{3} \pi \times \frac{8}{3\pi} = \frac{32}{9}$$

## 講評

### I [確率, 数列, 極限] (標準)

袋から玉を取り出して袋に戻す事象の確率と玉の個数の期待値に関する出題であった。 $p_2, p_3, P_2, P_3$  は丁寧に書き出して確実に得点したい ( $p_2, p_3$  はポリアの壺の知識があれば瞬時に求まる)。後半は期待値に関する漸化式からの見慣れない出題であるが、誘導が丁寧なので慌てずに読んで解答したい。

### II [空間ベクトル] (易)

空間ベクトルに関する基本的な出題であった。本学としては易しい出題と言え、ここでの失点はなるべく避けたい。

### III [空間座標, 積分法の応用] (やや難)

空間座標において動点とともに動く図形の軌跡に関する出題であった。文章が多くやりにくさを感じた受験生も多かったのではないかと。しっかりと文章を読んで誘導にうまく乗れたかが鍵を握ったであろう。また、(1)(c) や (2) にも取り組みやすい問題もいくつかあったので、全体を俯瞰して解答できたかなどの能力も問われたようだ。2021 年度から踏襲されている出題形式であるが、2021 年度の大問 3 もそのような能力が求められたという意味では、過去問研究をしっかりとしていた受験生は有利に立ち回れたであろう。

全体的に昨年度より難化し、全体的に文章が多く解きにくい問題が多かった。空間図形に関する出題も多く、本学らしい出題であったと言えるのではないだろうか。大問 II を完答し、I は 2/3, III は 1/2 以上の得点率を目指したい。一次突破ボーダーは 55~60% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156  
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校 **英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215  
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

