解答速報

埼玉医科大学（前期）　数学

2023年 1月31日実施

$\boxed{1}$

次の問い (問 1，2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　a，b，p を正の整数とし，$f(x) = ax^2 - px + b$ とする。$y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(3,\ 11)$，$(-3,\ 35)$ を通るとき，

$$p = \boxed{\ 1\ }$$

である。そのときに，$-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値が 11，最小値が 3 であるなら，

$$a = \boxed{\ 2\ },\ b = \boxed{\ 3\ }$$

である。

問 2　平面上の $\triangle$ABC において辺 AB を $m : n$ に外分する点を P，辺 BC を $2 : 5$ に内分する点を Q，辺 AC を $3 : 1$ に内分する点を R とする。3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，

$$\frac{m}{n} = \frac{\boxed{\ 4\ }\boxed{\ 5\ }}{\boxed{\ 6\ }}$$

であり，

$$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\boxed{\ 7\ }\boxed{\ 8\ }}{\boxed{\ 9\ }}$$

である。

解答

問 1　$y = f(x)$ に $(3,\ 11)$，$(-3,\ 35)$ を代入すると

$$\begin{cases} 11 = 9a - 3p + b & \cdots① \\ 35 = 9a + 3p + b & \cdots② \end{cases}$$

を得る。① − ② により $-6p = -24$，すなわち $p = \mathbf{4}$ である。

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 4x + b \\ &= a\left(x - \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a} + b \end{aligned}$$

より，$y = f(x)$ の頂点は $\left(\dfrac{2}{a},\ -\dfrac{4}{a} + b\right)$ である。a は正の整数より $\dfrac{2}{a}$ が正であることに注意し，軸の位置によって場合分けをする。

(ⅰ) $0 \leqq \dfrac{2}{a} \leqq \dfrac{1}{2}$，すなわち $a \geqq 4$ のとき。

$x = \dfrac{2}{a}$ のとき，最小値 $y = -\dfrac{4}{a} + b$ をとる。

$x = 2$ のとき，最大値 $y = 4a + b - 8$ をとる。

$-\dfrac{4}{a} + b = 3$，$4a + b - 8 = 11$ を変形すると $a^2 + 1 = 0$ を得るが，これは実数解を持たないので不適である。

(ⅱ) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{a} \leqq 2$，すなわち $2 \leqq a < 4$ のとき。

$x = \dfrac{2}{a}$ のとき，最小値 $y = -\dfrac{4}{a} + b$ をとる。

$x = -1$ のとき，最大値 $y = a + b + 4$ をとる。

$-\dfrac{4}{a} + b = 3$，$a + b + 4 = 11$ を解くと $a = 2$，$b = 5$ を得る。これは条件を満たす。

(ⅲ) $\dfrac{2}{a} > 2$，すなわち $0 < a < 2$ のとき。

$x = 2$ のとき，最小値 $y = 4a + b - 8$ をとる。

$x = -1$ のとき，最大値 $y = a + b + 4$ をとる。

$4a + b - 8 = 3$，$a + b + 4 = 11$ を解くと $a = -\dfrac{20}{3}$ を得るが，これは条件に反する。

以上より $a = \mathbf{2}$，$b = \mathbf{5}$ である。

別解

場合分けの (ⅰ)，(ⅱ) において $-\dfrac{4}{a} + b = 3$ であることより $\dfrac{4}{a}$ は整数となる。a は正の整数であったため，$a = 1,\ 2,\ 4$ のいずれか。

- $a = 1$ のとき
  (ⅰ)，(ⅱ) の条件はそれぞれ $a \geqq 4$，$2 \leqq a < 4$ より除外できる。
- $a = 2$ のとき
  (ⅱ) の条件を満たす。このとき $b = 5$ となる。$a + b + 4 = 2 + 5 + 4 = 11$ であるため，最大値の条件を満たす。よって $a = 2$，$b = 5$。
- $a = 4$ のとき
  (ⅰ) の条件を満たす。このとき $b = 1$ となる。$4a + b - 8 = 16 + 1 - 8 = 9 \neq 11$ より不適である。

別解

この二次関数は下に凸であるため，最大値は区間の端のときに得られる。よって最大値は $x = -1$ もしくは $x = 2$ のときである。

これは $y = f(x)$ が $(-1,\ 11)$ もしくは $(2,\ 11)$ を通ることを意味する。

条件より $y = f(x)$ は $(3,\ 11)$ を通る。

$x = 2$ で最大値を取る，すなわち $y = f(x)$ が $(2,\ 11)$ を通ると仮定する。

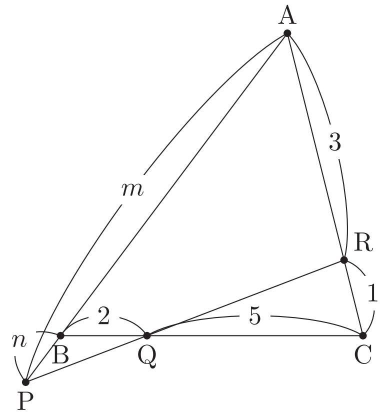
軸は $x = 2$ と $x = 3$ の間となるため，$-1 \leqq x \leqq 2$ で $y = f(x)$ は単調減少となる。このとき，最大値は $x = -1$ のときだが，これは $x = 2$ で最大値を取ることと矛盾する。

よって，$x = -1$ のとき最大値を取るとしてよい。このとき，$(-1,\ 11)$ を通る。軸の方程式は

$\dfrac{2}{a} = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$ である。よって $a = 2$ である。

最小値は $x = \dfrac{2}{a} = 1$ のときとわかるため，$y = f(x)$ に $x = 1$，$y = 3$ を代入すると，$b - 2 = 3$ となる。よって $b = 5$ である。

問 2



メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \times \frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{AR}} \times \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m}{n} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = 1.$$

よって $\dfrac{m}{n} = \mathbf{\dfrac{15}{2}}$ である。

再びメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CR}} \times \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4}{1} \times \frac{2}{13} \times \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}} = 1.$$

よって $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}} = \dfrac{13}{8}$ である。

こうして $\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} = \dfrac{\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}} = \dfrac{8+13}{8} = \mathbf{\dfrac{21}{8}}$ である。

補足

今回の問題では，3 点が A，B，P の順に並んだ。P，A，B の順に並ぶことがないことを確認しよう。

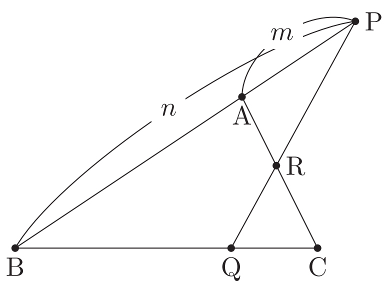
P，A，B の順に並ぶと仮定する。このとき $n > m$ である。

このとき，メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PA}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QB}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RC}} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{n}{m} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{1} = 1.$$

よって $\dfrac{n}{m} = \dfrac{2}{15}$ である。これは $n > m$ に反する。



$\boxed{2}$

次の文章を読み, 下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\cos x}{\sin x}+1\right)dx$ とする。

問 1　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$ において，変数 x を $x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\theta$ により θ を置き換え，再び θ を x と書き換えることで

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\boxed{10})dx$$

と変形できる。

$\boxed{10}$ に入る最も適切なものを，次の①〜⑧のうちから 1 つ選べ。

① x^2　② $\sqrt{x}$　③ e^x　④ $\sin x$

⑤ $\cos x$　⑥ $\tan x$　⑦ $\dfrac{1}{x}$　⑧ $\cos 2x$

問 2　任意の実数 x に対して，$\sin x+\cos x=\sqrt{\boxed{11}}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{\boxed{12}}\right)$ が成り立つ。

各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 3　$I=\dfrac{\pi}{\boxed{13}}\log\boxed{14}$ である。

各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

解答

問 1　$x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\theta$ とすると，$dx=-d\theta$ であり，$x:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\theta:\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\log\{\sin(\pi-\theta)\}(-d\theta)\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin\theta)\,d\theta\\&=\boldsymbol{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx}\ (④)\end{aligned}$$

問 2　合成する。

$$\sin x+\cos x=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

問 3

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\cos x}{\sin x} + 1\right) dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\cos x + \sin x}{\sin x} dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x} dx \quad (\because \text{問 } 2) \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\log\sqrt{2} + \log\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \log(\sin x)\right] dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\log 2 dx \quad (\because \text{問 } 1) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{8}\log 2}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

次の文章を読み, 下の問い (問 1〜3) に答えよ。

図 1 のような，座標平面上の長方形の領域 $D=\left\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq d,\ 0\leqq y\leqq n+\dfrac{1}{2}-d\right\}$ を考える。ただし，n は定数で，2 以上の自然数である。また，d は $1\leqq d\leqq n$ の実数値をとる変数である。x 座標，y 座標ともに自然数である点 (図 1 の黒丸) の中で D に含まれるものの個数は，d とともに変化するので，これを d の関数とみなして $m(d)$ と表す。

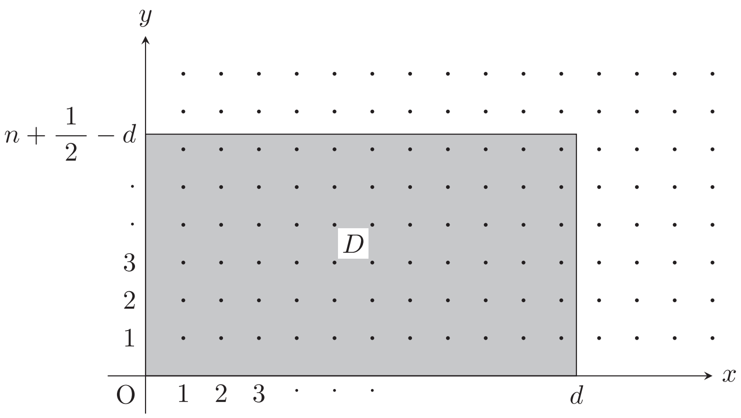


図 1：黒丸は x 座標，y 座標がともに自然数である点を表す。

問 1　$m(1)=\boxed{15}$，$m\left(\dfrac{3}{2}\right)=\boxed{16}$，$m(2)=\boxed{17}$ である。また，

$$\lim_{d\to\frac{3}{2}+0}m(d)=\lim_{d\to2-0}m(d)=\boxed{18}$$

である。

$\boxed{15}$〜$\boxed{18}$ に入る最も適切なものを，次の①〜 ⑧のうちからそれぞれ 1 つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

① $n-2$　② $n-1$　③ n　④ $n+1$
⑤ $2n-4$　⑥ $2n-2$　⑦ $2n$　⑧ $2n+2$

問 2　k を $n-1$ 以下の自然数とする。$k\leqq d\leqq k+\dfrac{1}{2}$ のとき，$m(d)=\boxed{19}$ である。

また，$k+\dfrac{1}{2}<d<k+1$ のとき，$m(d)=\boxed{20}$ である。

$\boxed{19}$，$\boxed{20}$ に入る最も適切なものを，次の①〜 ⑧のうちからそれぞれ 1 つず つ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

① $n-k$　② $nk-1$　③ $nk-2k$　④ $nk-k^2$
⑤ nk　⑥ $2nk-k^2$　⑦ $2nk-2k$　⑧ $nk-k^2-k$

問 3　$n=17$ のとき，$m(d)$ の最大値は $\boxed{21}\ \boxed{22}$ である。

各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

解答

以下，$[x]$ で x 以下の最大の整数を表すとする。
条件より，

$$m(d)=[d]\times\left[n+\frac{1}{2}-d\right]\cdots\cdots①$$

である。

問 1　①を用いて

$$m(1) = [1] \times \left[n - \frac{1}{2}\right] = 1 \times (n-1) = \boldsymbol{n-1}\ \textbf{(②)}$$

$$m\left(\frac{3}{2}\right) = \left[\frac{3}{2}\right] \times [n-1] = 1 \times (n-1) = \boldsymbol{n-1}\ \textbf{(②)}$$

$$m(2) = [2] \times \left[n - \frac{3}{2}\right] = 2 \times (n-2) = \boldsymbol{2n-4}\ \textbf{(⑤)}$$

また,

$$\lim_{d \to \frac{3}{2}+0} m(d) = \lim_{d \to \frac{3}{2}+0} [d] \times \left[n + \frac{1}{2} - d\right] = 1 \times (n-2) = n-2$$

$$\lim_{d \to 2-0} m(d) = \lim_{d \to 2-0} [d] \times \left[n + \frac{1}{2} - d\right] = 1 \times (n-2) = n-2$$

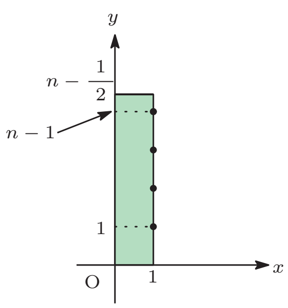
であるから

$$\lim_{d \to \frac{3}{2}+0} m(d) = \lim_{d \to 2-0} m(d) = \boldsymbol{n-2}\ \textbf{(①)}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$d=1$ のとき，$D = \left\{(x,\ y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq n - \dfrac{1}{2}\right\}$ であるから,

下図より，D 内で x 座標，y 座標がともに自然数となる点の個数を数えて，$m(1) = n-1$



他も同様。

問 2　(i) $k \leqq d \leqq k + \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{cases} k < d < k + \dfrac{1}{2} \text{ より，} [d] = k \\ n - k \leqq n + \dfrac{1}{2} - d \leqq n + \dfrac{1}{2} - k \text{ より，} \left[n + \dfrac{1}{2} - d\right] = n - k \end{cases}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} m(d) &= [d] \times \left[n + \frac{1}{2} - d\right] \\ &= k \times (n-k) \\ &= \boldsymbol{nk - k^2}\ \textbf{(④)} \end{aligned}$$

(ii) $k+\dfrac{1}{2}<d<k+1$ のとき

$$\begin{cases} k+\dfrac{1}{2}<d<k+1 \text{ より，} [d]=k \\ n-k-\dfrac{1}{2}<n+\dfrac{1}{2}-d<n-k \text{ より，} \left[n+\dfrac{1}{2}-d\right]=n-k-1 \end{cases}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} m(d) &= [d]\times\left[n+\frac{1}{2}-d\right] \\ &= k\times(n-k-1) \\ &= \boldsymbol{nk-k^2-k} \ \textbf{(⑧)} \end{aligned}$$

問 3　$n=17$ とする。

問 2 の結果を用いると，k を 16 以下の整数として，

(i) $k \leqq d \leqq k+\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} m(d) &= 17k-k^2 \\ &= -\left(k-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{17^2}{2^2} \end{aligned}$$

であるから，これは $k=8,\ 9$ のときに最大値 72 をとる。

(ii) $k+\dfrac{1}{2}<d<k+1$ のとき

$$\begin{aligned} m(d) &= 17k-k^2-k \\ &= -(k-8)^2+64 \end{aligned}$$

であるから，これは $k=8$ のときに最大値 64 をとる。

また，

(iii) $d=17$ のとき

$$m(17)=17\times 0=0$$

である。

以上より，$m(d)$ の最大値は **72** である。

$\boxed{4}$

次の文章を読み, 下の問い (問 1〜4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

4 枚のコインを同時に投げ，表が出たコインの枚数を数えることを 4 回繰り返した。

問 1　4 回のすべてで表が出るコインの枚数が 2 以上になる確率は

$$\left(\frac{\boxed{23}\,\boxed{24}}{\boxed{25}\,\boxed{26}}\right)^4$$

である。

問 2　4 回の中で表が出るコインの枚数の最小値が 2 である確率は

$$\frac{\boxed{27}\,\boxed{28}\,\boxed{29}}{\boxed{30}\,\boxed{31}\,\boxed{32}\,\boxed{33}}$$

である。

問 3　4 回の中で表が出るコインの枚数の最小値が 2，かつ最大値が 4 である確率は

$$\frac{\boxed{34}\,\boxed{35}\,\boxed{36}}{\boxed{37}\,\boxed{38}\,\boxed{39}\,\boxed{40}}$$

である。

$\boxed{\text{解答}}$

1 回の試行で表が k $(0 \leqq k \leqq 4)$ 回出る確率を P_k とすると

$$P_k = {}_4\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdots\cdots ①$$

と書ける。

問 1　1 回の試行で表が 2 回以上出る確率は，①より

$$1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = \frac{11}{16}$$

ゆえに，4 回のすべてで表が出るコインの枚数が 2 以上になる確率は

$$\left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{16}}\right)^4$$

問 2　4 回のすべてで表が出るコインの枚数が 3 以上になる確率は，①より

$$(P_3 + P_4)^4 = \left(\frac{5}{16}\right)^4$$

であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}&(4\text{ 回とも 2 枚以上表が出る確率}) - (4\text{ 回とも 3 枚以上表が出る確率})\\&=\left(\frac{11}{16}\right)^4 - \left(\frac{5}{16}\right)^4\\&=\frac{11^4-5^4}{16^4}\\&=\frac{(11^2+5^2)(11^2-5^2)}{16^4}\\&=\frac{146\times 96}{16^4}\\&=\mathbf{\frac{219}{1024}}\end{aligned}$$

問 3　4 回のすべてで表が 3 枚出る確率は

$$P_3{}^4 = \left(\frac{4}{16}\right)^4$$

4 回のすべてで表が 2 枚または 3 枚出る確率は

$$(P_2+P_3)^4 = \left(\frac{10}{16}\right)^4$$

これと，問 2 の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned}&\frac{219}{1024} - \left\{\left(\frac{10}{16}\right)^4 - \left(\frac{4}{16}\right)^4\right\}\\&=\frac{219\cdot 64 - 10^4 + 4^4}{16^4}\\&=\frac{4272}{16^4}\\&=\mathbf{\frac{267}{4096}}\end{aligned}$$

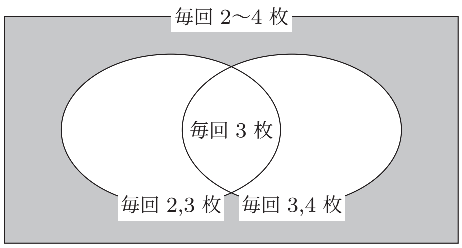
（参考）①より

・4 回とも 2 枚以上表が出る確率　$\left(\frac{11}{16}\right)^4 (= Q_1)$

・4 回とも 2 枚または 3 枚表が出る確率　$\left(\frac{10}{16}\right)^4 (= Q_2)$

・4 回とも 3 枚または 4 枚表が出る確率　$\left(\frac{5}{16}\right)^4 (= Q_3)$

・4 回とも 3 枚表が出る確率　$\left(\frac{4}{16}\right)^4 (= Q_4)$



ベン図を参考にすることで，求める確率は

$$
\begin{aligned}
Q_1-(Q_2+Q_3-Q_4) &= \frac{11^4-10^4-5^4+4^4}{16^4} \\
&= \frac{(11^2+10^2)(11^2-10^2)-(5^2+4^2)(5^4-4^2)}{16^4} \\
&= \frac{221\cdot 21-41\cdot 9}{16^4} \\
&= \frac{4272}{16^4} \\
&= \frac{16\cdot 267}{16^4} \\
&= \frac{\mathbf{267}}{\mathbf{4096}}
\end{aligned}
$$

と計算することもできる。

講評

$\boxed{1}$［2 次関数，図形の性質］(易)
問 1 は 2 次関数の最大最小，問 2 はメネラウスの定理に関する出題であった。いずれも教科書レベルの内容であり，ここでの失点は避けたい。

$\boxed{2}$［積分法 (数学 III)］（やや易）
特殊な置換を必要とする積分計算からの出題であった。よく見かけるタイプの出題であり，誘導も丁寧なので，しっかりと計算していきたい。この手の問題の経験があったかで差がついたのではないだろうか。

$\boxed{3}$［整数の性質］（標準）
ある平面内に含まれる格子点の個数に関する出題であった。与えられた図から数えることもできるし，ガウス記号を用いて立式をしてもよい。

$\boxed{4}$［確率］（標準）
コインの表の出る枚数の最大値，最小値に関する確率からの出題であった。事象がやや複雑なのでしっかりと整理し，扱う数もやや大きいので計算ミスには注意したい。

昨年度と同程度の難易度であった。$\boxed{1}$ $\boxed{2}$で点数を確保し，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$でも半分程度以上の点数を目指したい。一次突破ラインは 60～65% 程度か。