解答速報

東北医科薬科大学　数学

2023年 1月21日実施

[I]

座標平面上でサイクロイド $C: x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を考える。C 上の点 $\mathrm{P}(t-\sin t,\ 1-\cos t)\ (0<t<2\pi)$ における接線および法線をそれぞれ ℓ_t, L_t で表す。また，ℓ_t と x 軸の交点を A，L_t と x 軸の交点を B，線分 PB の中点を Q とする。このとき，以下の問いに答えなさい。

(1)　L_t の傾きを t を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}\tan\dfrac{t}{\boxed{\text{イ}}}$ となる。

(2)　$t=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき，3 点 A，B，Q の座標は，

$$\mathrm{A}\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi+\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\ 0\right),\qquad \mathrm{B}\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi,\ 0\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi+\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。

(3)　t が $0<t<2\pi$ を動くとき，点 Q が描く軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi$ である。この図形を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V を $V=a\pi^b$ と整数 a，b を用いて表すとき，$a=\boxed{\text{チ}}$，$b=\boxed{\text{ツ}}$ となる。

解答

(1)　$0<\theta<2\pi$ において，

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

よって，直線 ℓ_t の傾きは $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

ゆえに，直線 L_t の傾きは $t \fallingdotseq \pi$ において

$$\begin{aligned}-\frac{1-\cos t}{\sin t} &= -\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\\ &= -\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\\ &= \boldsymbol{-\tan\frac{t}{2}} \quad (\text{ただし}, t \fallingdotseq \pi)\end{aligned}$$

(2)　(1) より，$0 < t < 2\pi$，$t \fallingdotseq \pi$ において

$$\ell_t : y = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}(x - t + \sin t) + 1 - \cos t$$

$$L_t : y = -\tan\frac{t}{2}(x - t + \sin t) + 1 - \cos t$$

ここで，$t = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，点 A，点 B は直線 $\ell_{\frac{4}{3}\pi}$，$L_{\frac{4}{3}\pi}$ の x 切片であることから，

$$\ell_{\frac{4}{3}\pi} : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

$$L_{\frac{4}{3}\pi} : y = \sqrt{3}\left(x - \frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

それぞれに $y = 0$ を代入して

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3},\ 0}\right),\ \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi,\ 0}\right)$$

$t = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ であることから

$$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4}}\right)$$

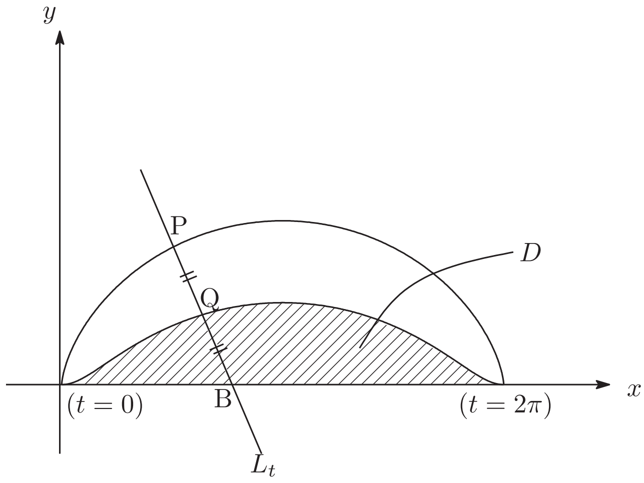
(3)　$L_t : y = -\tan\dfrac{t}{2}(x - t + \sin t) + 1 - \cos t$ に $y = 0$ を代入して

$$\begin{aligned}&0 = -\tan\frac{t}{2}(x - t + \sin t) + 2\sin^2\frac{t}{2}\\ \iff &0 = -\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}(x - t + \sin t) + 2\sin^2\frac{t}{2}\\ \iff &0 = -\frac{1}{\cos\frac{t}{2}}(x - t + \sin t) + 2\sin\frac{t}{2} \quad \left(\because 0 < \frac{t}{2} < \pi\right)\\ \iff &0 = x - t + \sin t - 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\\ \iff &0 = x - t + \sin t - \sin t\\ \iff &x = t\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{B}(t,\ 0)$，$\mathrm{P}(t - \sin t,\ 1 - \cos t)$ であるから

$$\mathrm{Q}\left(t - \frac{\sin t}{2},\ \frac{1-\cos t}{2}\right) \quad (\text{ただし},\ t \fallingdotseq \pi) \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，サイクロイド C の図形を考えると，$t=\pi$ のとき，P$(\pi,\ 2)$，B$(\pi,\ 0)$ で，Q$(\pi,\ 1)$ となり，①は $t=\pi$ でも成り立つことが分かる。



$x=t-\dfrac{\sin t}{2}$，$y=t-\dfrac{1-\cos t}{2}$ $(0<t<2\pi)$ で描かれる曲線と x 軸で囲まれる部分を D とする。D の面積を S，D を回転して得られる立体の体積を V とすると，$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{\cos t}{2}$ であることから，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{t=0}^{t=2\pi} y\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos t}{2}\cdot\left(1-\frac{\cos t}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-3\cos t+2)dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}-3\cos t+2\right)dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(5+\cos 2t-6\cos t)dt \\
&= \frac{1}{8}\left[5t+\frac{1}{2}\sin 2t-3\sin t\right]_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{\frac{5}{4}\pi}
\end{aligned}
$$

次に，V について

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} y^2\,dx \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2-\cos t}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(-\cos^3 t+4\cos^2 t-5\cos t+2\right)dt
\end{aligned}
$$

ここで,

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = \Big[\sin t\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4} dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3t + 3\sin t\right]_0^{2\pi} = 0$$

であることから

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t + 2\right) dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (2 + \cos 2t)\, dt \\ &= \frac{1}{4}\left[2t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって，$V = \boldsymbol{\pi^2}$ $\boldsymbol{(a = 1,\ b = 2)}$

[Ⅱ]

袋 A から袋 D には数字が書かれたカードが入っている。どのカードにも数字はただ一つだけ書かれている。袋 A には 1, 2, 3, 4 の数字の赤色のカードが各 1 枚ずつ計 4 枚入っている。袋 B には 0 の数字のカードが 1 枚，1 の数字のカードが 2 枚の計 3 枚の青色のカードが入っている。袋 C には 1 の数字のカードが 2 枚，2 の数字のカードが 1 枚，3 の数字のカードが 1 枚，4 の数字のカードが 1 枚の計 5 枚の緑色のカードが入っている。袋 D には 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の数字が書かれた黄色のカードが各 1 枚ずつ計 10 枚入っている。袋 A，B，C，D から 1 枚ずつカードを引いて，赤，青，緑，黄色の順にそれぞれ千の位，百の位，十の位，一の位に数字を並べてできる 4 桁の正の整数を N とする。このとき，以下の問に答えなさい。

(1)　N が 2000 以上 4000 以下の奇数となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　N が 3 の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{ウエオ}}{\boxed{カキク}}$ であり，6 の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

(3)　N が 7 の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ であり，2，3，5，7 のいずれの倍数でもない確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$ である。

解答

(1)　袋内の同じカードも区別する。袋 A，B，C，D からカードを取り出す取り出し方は全部で

$$4 \times 3 \times 5 \times 10 = 600 \text{ 通り}$$

あり，これらはすべて同様に確からしい。
N が 2000 以上 4000 以下の奇数となるのは，
袋 A から 2，3 のいずれかを取り出し，かつ，袋 D から奇数のカードを取り出すときだから
(袋 B，C からは任意のカードを取り出してよい)，その確率は

$$\frac{2 \times 3 \times 5 \times 5}{600} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2)　袋 A，B，C，D に入っているカードに書かれた数を，3 で割った余りで分類する。
(袋 A 内にあるカードに書かれた数のうち，3 で割った余りが k であるものの集合を A_k などと書くことにする。)

$$A_0 = \{3\},\ A_1 = \{1,\ 4\},\ A_2 = \{2\}$$

$$B_0 = \{0\},\ B_1\{1_a,\ 1_b\}$$

$$C_0 = \{3\}, C_1 = \{1_c,\ 1_d,\ 4\},\ C_2 = \{2\}$$

$$D_0 = \{0,\ 3,\ 6,\ 9\},\ B_1 = \{1,\ 4,\ 7\},\ C_1 = \{2,\ 5,\ 8\}$$

(ただし，袋内にある同じ数詞のカードの数は 1_a, 1_bなどと区別してある)

N が 3 の倍数となるのは，上のどの集合の要素から選ぶかときかで場合を分けて考えると以下の表のようになる。
さらに，N が 6 の倍数となる選び方の数は，3 の倍数となるもののうち，D の袋から偶数を選ぶときであることに注意すると，表の最右列のようになる。

袋 A	袋 B	袋 C	袋 D	3 の倍数となる取り出し方	6 の倍数となる取り出し方
A_0	B_0	C_0	D_0	$1\times1\times1\times4=4$ 通り	$1\times1\times1\times2=2$ 通り
A_2	B_1	C_0	D_0	$1\times2\times1\times4=8$ 通り	$1\times2\times1\times2=4$ 通り
A_2	B_0	C_1	D_0	$1\times1\times3\times4=12$ 通り	$1\times1\times3\times2=6$ 通り
A_2	B_0	C_0	D_1	$1\times1\times1\times3=3$ 通り	$1\times1\times1\times1=1$ 通り
A_1	B_0	C_2	D_0	$2\times1\times1\times4=8$ 通り	$2\times1\times1\times2=4$ 通り
A_1	B_0	C_0	D_2	$2\times1\times1\times3=6$ 通り	$2\times1\times1\times2=4$ 通り
A_0	B_1	C_2	D_0	$1\times2\times1\times4=8$ 通り	$1\times2\times1\times2=4$ 通り
A_0	B_1	C_0	D_2	$1\times2\times1\times3=6$ 通り	$1\times2\times1\times2=4$ 通り
A_0	B_0	C_2	D_1	$1\times1\times1\times3=3$ 通り	$1\times1\times1\times1=1$ 通り
A_0	B_0	C_1	D_2	$1\times1\times3\times3=9$ 通り	$1\times1\times3\times2=6$ 通り
A_1	B_1	C_1	D_0	$2\times2\times3\times4=48$ 通り	$2\times2\times3\times2=24$ 通り
A_1	B_1	C_0	D_1	$2\times2\times1\times3=12$ 通り	$2\times2\times1\times1=4$ 通り
A_1	B_0	C_1	D_1	$2\times1\times3\times3=18$ 通り	$2\times1\times3\times1=6$ 通り
A_0	B_1	C_1	D_1	$1\times2\times3\times3=18$ 通り	$1\times2\times3\times1=6$ 通り
A_2	B_0	C_2	D_2	$1\times1\times1\times3=3$ 通り	$1\times1\times1\times2=2$ 通り
A_2	B_1	C_2	D_1	$1\times2\times1\times3=6$ 通り	$1\times2\times1\times1=2$ 通り
A_2	B_1	C_1	D_2	$1\times2\times3\times3=18$ 通り	$1\times2\times3\times2=12$ 通り
A_1	B_1	C_2	D_2	$2\times2\times1\times3=12$ 通り	$2\times2\times1\times2=8$ 通り

上の表より，N が 3 の倍数となるのは，右から 2 列目の数を合計して 202 通りあるから，確率は

$$\frac{202}{600}=\boldsymbol{\frac{101}{300}}$$

同様に，N が 6 の倍数のとなるのは，最右列の数を合計して 100 通りあるから，確率は

$$\frac{100}{600}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(3)　4 桁の自然数 $pqrs$ に対して，$pqrs$ が 7 の倍数であることは $qrs-p$ が 7 の倍数であることと同値である。したがって，まず下三桁を考えたのち，4 桁の自然数が 7 の倍数となるように 4 桁目の数字を考える。ただし，袋 B(百の位) と袋 C(十の位) には 1 のカードが 2 枚ずつ入っていることに注意して場合の数を計算する。また，4 桁目の数字がない 3 桁の自然数は 7 の倍数となる 4 桁の自然数が作れないことを表す。

										場合の数
3010	4011	012	013	014	1015	2016	3017	4018	019	6×2=12 通り
020	021	1022	2023	3024	4025	026	027	028	1029	5 通り
2030	3031	4032	033	034	035	1036	2037	3038	4039	7 通り
040	041	042	1043	2044	3045	4046	047	048	049	4 通り
110	111	112	1113	2114	3115	4116	117	118	119	4×2×2=16 通り
1120	2121	3122	4123	124	125	126	1127	2128	3129	7×2=14 通り
1130	131	132	133	1134	2135	3136	4137	138	139	5×2=10 通り
140	1141	2142	3143	4144	145	146	147	1148	2149	6×2=12 通り
										合計 80 通り

よって，7 の倍数となる確率は

$$\frac{80}{600}=\boldsymbol{\frac{2}{15}}$$

続いて，2，3，5，7 のいずれの倍数でもない場合の数を考える。まず，2，5 のいずれの倍数でもないので，下 1 桁は 1，3，7，9 のいずれかである。以下，上 3 桁を考えたのち，4 桁の自然数が 3 の倍数とならないように 1 桁目の数字を考える (樹形図では 3 の倍数となる 4 桁の自然数は一重の取り消し線で示されている)。さらに，そのうち 7 の倍数とならない 4 桁の自然数を考える (樹形図では 7 の倍数となる 4 桁の自然数は斜線の取り消し線で示されている)。たとえば，千の位が 1 の 4 桁の自然数は樹形図で考えると次のようになる。ただし，袋 B(百の位) と袋 C(十の位) には 1 のカードが 2 枚ずつ入っていることに注意して場合の数を計算する。

千の位が 1

千の位	百の位	十の位	一の位	場合の数
1	0	1	$\cancel{1}, 3, 7, \cancel{9}$	2×2=4 通り
		2	$1, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	2 通り
		3	$1, 3, 7, 9$	4 通り
		4	$\cancel{1}, \cancel{3}, \cancel{7}, 9$	1 通り
	1	1	$1, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	2×2×2=8 通り
		2	$1, 3, \cancel{7}, 9$	3×2=6 通り
		3	$\cancel{1}, 3, \cancel{7}, 9$	2×2=4 通り
		4	$\cancel{1}, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	1×2=2 通り

合計 31 通り

同様に，千の位が 2, 3, 4 の 4 桁の自然数も樹形図で考えると次のようになる。

千の位が 2

千の位	百の位	十の位	一の位	場合の数
2	0	1	$1, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	2×2=4 通り
		2	$1, \cancel{3}, 7, 9$	3 通り
		3	$\cancel{1}, 3, \cancel{7}, 9$	2 通り
		4	$1, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	2 通り
	1	1	$1, 3, 7, 9$	4×2×2=16 通り
		2	$\cancel{1}, 3, \cancel{7}, 9$	2×2=4 通り
		3	$1, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	2×2=4 通り
		4	$1, 3, 7, \cancel{9}$	3×2=6 通り

合計 41 通り

千の位が 3

千の位	百の位	十の位	一の位	場合の数
3	0	1	$1, 3, \cancel{7}, 9$	3×2=6 通り
		2	$\cancel{1}, 3, \cancel{7}, 9$	2 通り
		3	$\cancel{1}, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	1 通り
		4	$1, 3, 7, 9$	4 通り
	1	1	$\cancel{1}, 3, \cancel{7}, 9$	2×2×2=8 通り
		2	$1, \cancel{3}, 7, \cancel{9}$	2×2=4 通り
		3	$1, 3, 7, 9$	4×2=8 通り
		4	$\cancel{1}, \cancel{3}, \cancel{7}, 9$	1×2=2 通り

合計 35 通り

千の位が 4

千の位	百の位	十の位	一の位	場合の数
4	0	1	$\cancel{1}$, 3, $\cancel{7}$, 9	2×2=4 通り
		2	1, $\cancel{3}$, 7, $\cancel{9}$	2 通り
		3	1, 3, 7, $\cancel{9}$	3 通り
		4	$\cancel{1}$, 3, $\cancel{7}$, 9	2 通り
	1	1	1, $\cancel{3}$, 7, $\cancel{9}$	2×2×2=8 通り
		2	1, $\cancel{\cancel{3}}$, 7, 9	3×2=6 通り
		3	$\cancel{1}$, 3, $\cancel{7}$, 9	2×2=4 通り
		4	1, $\cancel{3}$, 7, $\cancel{9}$	2×2=4 通り

合計 33 通り

よって，2，3，5，7 のいずれの倍数でもない確率は

$$\frac{31+41+35+33}{600} = \boldsymbol{\frac{7}{30}}$$

(参考)　7 の倍数の判定法を知っている受験生はほとんどいないと考えられるので，(3) を正答できる受験生はほぼいなかったであろう。(3 や 9 の倍数の判定法の証明に倣って，試験会場でオリジナルの判定法を考えることもできないこともないが・・・。)

7 の倍数の判定法

一の位から 3 桁ごとに区切り，それらを交互に加減した結果が 7 の倍数であれば，その自然数は 7 の倍数である。たとえば，31455004 の場合，31，455，004 に区切り，$31+4-455=-420$。-420 は 7 の倍数であるため，31455004 は 7 の倍数である。

[Ⅲ]

以下の問いに答えなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ である。

(2) $\displaystyle\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x+b}{x^2+cx+d}\right)$ と部分分数に分解するとき，$a = \boxed{\text{イ}}$，$b = \boxed{\text{ウエ}}$，$c = \boxed{\text{オカ}}$，$d = \boxed{\text{キ}}$ である。

(3) $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\log \boxed{\text{ケ}} + \frac{\pi}{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}\right)$ である。ただし，log は自然対数とする。

(4) $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^2}dx = \frac{1}{\boxed{\text{サ}}} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\log \boxed{\text{セ}} + \frac{\pi}{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}\right)$ である。ただし，log は自然対数とする。

解答

(1) $x = \tan\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であり，$x : 0 \to 1$ のとき $\theta : 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{7}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

右辺は $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ と変形でき，$\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ が x についての恒等式となる定数 $A,\ B,\ C$ を求める。

$$1 = A\left(x^2-x+1\right) + (x+1)(Bx+C)$$

$$\Longleftrightarrow 1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$$

これが x についての恒等式となるので

$$\begin{cases} A+B=0\\ -A+B+C=0\\ A+C=1\end{cases}$$

これを解いて，$(A,\ B,\ C) = \left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

したがって

$$\frac{1}{1+x^3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)}$$

(3) (2) より

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ について

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \Big[\log|1+x|\Big]_0^1 = \log 2$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$ について

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

ここで，

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx = \Big[\log|x^2-x+1|\Big]_0^1 = 0$$

であり，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$ は $x-\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\phi\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \phi < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことにより，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2\phi\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{d\phi}{\cos^2\phi} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sqrt{3}}{3}d\phi \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\end{aligned}$$

したがって，①より

$$\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

よって

$$I = \frac{1}{3}\left\{\log 2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$$

(4)　部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 (x)'\cdot\frac{1}{(1+x^3)}dx \\ &= \left[x\cdot\frac{1}{1+x^3}\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\left\{-\frac{3x^2}{\left(1+x^3\right)^2}\right\}dx \\ &= \frac{1}{2} + 3\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^3\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{2} + 3\int_0^1 \frac{\left(1+x^3\right)-1}{\left(1+x^3\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{2} + 3\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} - 3\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^3\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{2} + 3I - 3J\end{aligned}$$

したがって，$I=\dfrac{1}{2}+3I-3J$ より

$$\begin{aligned}J&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+2I\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}\end{aligned}$$

(参考)　次のように部分分数分解した式を展開して計算することもできるが，計算量は大幅に増えるので現実的ではない。

(2) より

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x^3)^2}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^3}\right)^2dx$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\right\}^2dx$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-2x+4}{(x+1)(x^2-x+1)}+\frac{(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-2(x+1)+6}{(x+1)(x^2-x+1)}+\frac{(x^2-x+1)-3x+3}{(x^2-x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-2}{x^2-x+1}+\frac{6}{(x+1)(x^2-x+1)}+\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{-3x+3}{(x^2-x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-2}{x^2-x+1}+6\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{-3x+3}{(x^2-x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{3-2x}{x^2-x+1}+\frac{3-3x}{(x^2-x+1)^2}+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx\quad\cdots\cdots②$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{3-2x}{x^2-x+1}dx$ は

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{3-2x}{x^2-x+1}dx&=\int_0^1\frac{-(2x-1)+2}{x^2-x+1}dx\\&=-\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx+2\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx\\&=-0+2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\quad(\because (3))\\&=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{3-3x}{(x^2-x+1)^2}dx$ は $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx$ と同様にして，$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\psi$ とおくことにより，計算す

ると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3-3x}{(x^2-x+1)^2}dx &= \int_0^1 \frac{3-3x}{\left\{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right\}^2}dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3-3(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tan\psi)}{\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{\cos^4\psi}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{d\psi}{\cos^2\psi} \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1-\sqrt{3}\tan\psi)\cos^2\psi d\psi \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2\psi-\sqrt{3}\sin\psi\cos\psi)d\psi \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\psi d\psi \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\psi}{2}d\psi \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\psi}{2}+\frac{\sin 2\psi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+1
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx$ は

$$\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx = \Big[2\log|x+1|\Big]_0^1 = 2\log 2$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx$ は

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \Big[-(x+1)^{-1}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

よって，②より

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^2}dx &= \frac{1}{9}\left\{\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi+\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+1\right)+2\log 2+\frac{1}{2}\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\left(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}
\end{aligned}$$

講評

［Ⅰ］［積分法の応用］(標準)

媒介変数表示された関数 (サイクロイド) に関する典型的な出題であった。入試基礎レベルの内容をしっかりと理解できているかを問われた。特に難しい考え方を必要とする小問はなかったので，丁寧に計算を進められたかが鍵であった。ここでしっかりと点数を稼ぎたい。

［Ⅱ］［確率］（やや難～難）

袋から数字のついたカードを取り出してできる 4 桁の自然数に関する確率からの出題であった。(1) は非常に平易であるものの，(2)(3) を実際の試験場で丁寧に数えていくのは非常に難儀である。(2)(3) の計 4 題のうち，2 題でもできていればかなりのアドバンテージを得られるだろう。

［Ⅲ］［積分法］（標準）

部分分数分解を必要とする積分の計算からの典型的な出題であった。医学部を目指す受験生であれば一度は経験のある問題であったであろう。大問［Ⅰ］と同様に丁寧に計算を進められたかが鍵であった。ここでもしっかりと点数を稼ぎたい。

全体的な難易度は昨年度並みであったが，［Ⅱ］が難しめで，どの大問に時間をかけられたかが重要であった。昨年度は大問［Ⅲ］の最後の小問で非常に煩雑な計算を要する問題があり，今年度は大問［Ⅱ］(2)(3) がそうであった。なお，本学では 2020 年度も数え上げるのに難儀する場合の数の出題があった。本試では典型問題である大問［Ⅰ］大問［Ⅲ］でどれだけ点数を稼げたかが合否に大きく影響するだろう。一次突破ボーダーは 55～60% 程度か。