医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2023年 2月9日実施

1.

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

袋の中に 1 から 5 までの番号をつけた 5 個の玉が入っている。この袋から玉を 1 個取り出し，番号を調べてから元に戻す試行を，4 回続けて行う。n 回目（$1 \leqq n \leqq 4$）に取り出された玉の番号を r_n とするとき，

- $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leqq 8$ となる確率は $\boxed{(ア)}$
- $\dfrac{4}{r_1 r_2} + \dfrac{2}{r_3 r_4} = 1$ となる確率は $\boxed{(イ)}$

である。

解答

この試行における $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ の組は全部で 5^4 通りあり，
それらはすべて同様に確からしい。
（ア）　$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leqq 8$ を満たす $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ の組は

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leqq 8 \\ 1 \leqq r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4 \leqq 5 \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

を満たす自然数解 $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ の組数を数えればよいが，①の解は

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 9 - s \\ 1 \leqq r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ s \leqq 5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + s = 9 \\ 1 \leqq r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ s \leqq 5 \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

の自然数解 $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ s)$ と 1 対 1 対応することから，
②の解の個数を数えると，（○ 9 個の隙間に｜を 4 本入れる入れ方の数に一致するから，）

$${}_8\mathrm{C}_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ 通り}$$

よって，求める確率は

$$\frac{70}{5^4} = \mathbf{\frac{14}{125}}$$

別解

すべて書き出してしまってもよい。
$S = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ とおき，$S \leqq 8$ を満たす $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ が何通りあるかを調べる。
$S \geqq 4$ であることに注意する。

S	取り出す番号	$(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$
$S=4$	$\{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$	1 通り
$S=5$	$\{1,\ 1,\ 1,\ 2\}$	4 通り
$S=6$	$\{1,\ 1,\ 1,\ 3\}$	4 通り
	$\{1,\ 1,\ 2,\ 2\}$	6 通り
$S=7$	$\{1,\ 1,\ 1,\ 4\}$	4 通り
	$\{1,\ 1,\ 2,\ 3\}$	12 通り
	$\{1,\ 2,\ 2,\ 2\}$	4 通り
$S=8$	$\{1,\ 1,\ 1,\ 5\}$	4 通り
	$\{1,\ 1,\ 2,\ 4\}$	12 通り
	$\{1,\ 1,\ 3,\ 3\}$	6 通り
	$\{1,\ 2,\ 2,\ 3\}$	12 通り
	$\{2,\ 2,\ 2,\ 2\}$	1 通り

よって，

$$1\times 2+4\times 5+6\times 2+12\times 3=70\ \text{通り}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{70}{5^4}=\mathbf{\frac{14}{125}}$$

(イ)

$$\frac{4}{r_1r_2}+\frac{2}{r_3r_4}=1\ \cdots\cdots③$$

を満たす $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ の組が何通りあるかを調べる。$r_1r_2=x,\ r_3r_4=y$ とおくと，$1\leqq x\leqq 25,\ 1\leqq y\leqq 25$ であり，③は

$$\frac{4}{x}+\frac{2}{y}=1$$

$$4y+2x=xy$$

$$xy+2x+4y=0$$

$$\therefore\ (x-4)(y-2)=8$$

であり，$-3\leqq x-4\leqq 21,\ -1\leqq y-2\leqq 23$ に注意すると，

$x-4$	1	2	4	8
$y-2$	8	4	2	1

$x=r_1r_2$	5	6	8	12
$y=r_3r_4$	10	6	4	3

(i) $(r_1r_2,\ r_3r_4)=(5,\ 10)$ のとき
$r_1r_2=5$ となるのが $(r_1,\ r_2)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の 2 通り
$r_3r_4=10$ となるのが $(r_3,\ r_4)=(2,\ 5),\ (5,\ 2)$ の 2 通り
あるから，$2\times 2=4$ 通りある。

(ii) $(r_1r_2,\ r_3r_4)=(6,\ 6)$ のとき
$r_1r_2=6$ となるのが $(r_1,\ r_2)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$ の 2 通り
$r_3r_4=6$ となるのが $(r_3,\ r_4)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$ の 2 通り
あるから，$2\times 2=4$ 通りある。

(iii) $(r_1r_2,\ r_3r_4)=(8,\ 4)$ のとき
$r_1r_2=8$ となるのが $(r_1,\ r_2)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ の 2 通り

$r_3r_4=4$ となるのが $(r_3,\ r_4)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の 3 通り
あるから，$2\times3=6$ 通りある。

(iv)　$(r_1r_2,\ r_3r_4)=(12,\ 3)$ のとき
$r_1r_2=12$ となるのが $(r_1,\ r_2)=(3,\ 4),\ (4,\ 3)$ の 2 通り
$r_3r_4=3$ となるのが $(r_3,\ r_4)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の 2 通り
あるから，$2\times2=4$ 通りある。

以上 (ⅰ)〜(iv) より合計 18 通りあるから，求める確率は

$$\frac{18}{5^4}=\boldsymbol{\frac{18}{625}}$$

2.

n を自然数，a を正の定数とする。関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = x + \frac{1}{n}\int_0^x f(t)dt$$

をみたし，関数 $g(x)$ は

$$g(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + a$$

とする。2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はある 1 点を共有し，その点における 2 つの曲線の接線が直交するとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) $h(x) = e^{-\frac{x}{n}}f(x)$ とおくとき，導関数 $h'(x)$ と $h(x)$ を求めよ。

(2) a を n を用いて表せ。

(3) 2 つの曲線 $y = f(x), y = g(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n^3}$ を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $h(x) = e^{-\frac{x}{n}}f(x)$ より

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}f(x) + e^{-\frac{x}{n}}f'(x) \\ &= \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\{-f(x) + nf'(x)\} \\ &= \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\left\{-f(x) + n\left(1 + \frac{1}{n}f(x)\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{e^{-\frac{x}{n}}} \end{aligned}$$

したがって，C を積分定数として，$h(x) = \displaystyle\int h'(x)dx = -ne^{-\frac{x}{n}} + C$ となる。

ここで，$h(0) = e^0 f(0) = 1 \cdot 0 = 0$ であるから，$C = n$ である。

よって，

$$h(x) = -ne^{-\frac{x}{n}} + n = \boldsymbol{n(1 - e^{-\frac{x}{n}})}$$

(2) (1) より $e^{-\frac{x}{n}}f(x) = n(1 - e^{-\frac{x}{n}})$ であるから，$f(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1)$ である。

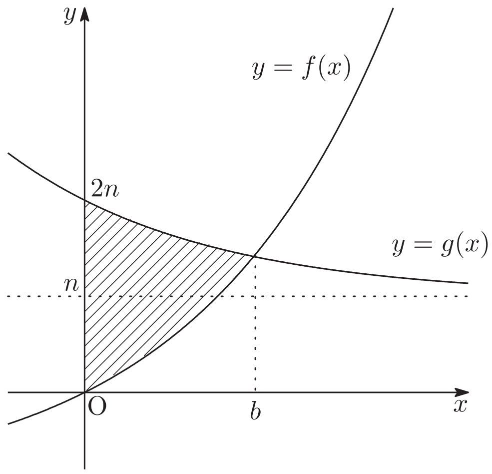
したがって，$f'(x) = e^{\frac{x}{n}}$ である。

また，$g(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + a$ より，$g'(x) = -\dfrac{a}{n}e^{-\frac{x}{n}}$ である。

よって，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = b$ において 2 つの曲線の接線が直交するとすると

$$f'(b)g'(b) = -1 \iff e^{\frac{b}{n}} \cdot \left\{-\frac{a}{n}e^{-\frac{b}{n}}\right\} = -1 \iff a = \boldsymbol{n}$$

(3)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を図示すると，次のようになる。



$f(b)=g(b)$ より，b を求めると

$$
\begin{aligned}
f(b)=g(b) &\iff n(e^{\frac{b}{n}}-1)=ne^{-\frac{b}{n}}+n \\
&\iff n(B-1)=n\cdot\frac{1}{B}+n \quad (e^{\frac{b}{n}}=B\ (>0)\ \text{とした}) \\
&\iff B^2-2B-1=0 \\
&\iff B=1+\sqrt{2} \quad (\because\ B>0) \\
&\iff e^{\frac{b}{n}}=1+\sqrt{2} \\
&\iff \frac{b}{n}=\log(1+\sqrt{2}) \\
&\iff b=n\log(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
S_k &= \int_0^b \{f(x)-g(x)\}dx \\
&= k\int_0^b (e^{-\frac{x}{k}}-e^{\frac{x}{k}}+2)dx \\
&= k\Big[-ke^{-\frac{x}{k}}-ke^{\frac{x}{k}}+2x\Big]_0^b \\
&= k\left(-ke^{-\frac{b}{k}}-ke^{\frac{b}{k}}+2b+2k\right) \\
&= -k^2e^{-\log(1+\sqrt{2})}-k^2e^{\log(1+\sqrt{2})}+(2b+2k)k \\
&= -k^2\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}-k^2(1+\sqrt{2})+\{2k\log(1+\sqrt{2})+2k\}k \\
&= 2\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}k^2
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S_1+S_2+\cdots+S_n &= \sum_{k=1}^{n} S_k \\
&= 2\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n^3}&=2\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}\cdot\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}\\&=2\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}\cdot\frac{2}{6}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}\{\log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}}\end{aligned}$$

3.

Oを原点とする座標平面において，第1象限に属する点 $P(\sqrt{2}r,\ \sqrt{3}s)$（r，s は有理数）をとるとき，線分 OP の長さは無理数となることを示せ。

解答

点Pは第1象限に属するので $r>0$，$s>0$ である。

$r=\dfrac{a}{b}$，$s=\dfrac{c}{d}$（a，b，c，d は自然数）とし，

OP が有理数となると仮定し，矛盾を導く。

OP が有理数となると仮定すると，$\mathrm{OP}=\dfrac{M}{N}$（M，N は自然数）とおけるので，

$$\sqrt{\frac{2a^2}{b^2}+\frac{3c^2}{d^2}}=\frac{M}{N}$$
$$N^2(2a^2d^2+3b^2c^2)=M^2b^2d^2$$

より，$2a^2d^2+3b^2c^2=L^2$（L は自然数）でなければならない。

さらに，$ad=x$，$bc=y$ とおくと，x，y は自然数であり，

$$2x^2+3y^2=L^2 \quad \cdots\cdots ①$$

が自然数解 $(x,\ y,\ L)$ をもたなければならない。……☆

①より

$$3y^2=L^2-2x^2 \quad \cdots\cdots ①'$$

となるが，x と L を3で割った余りで分類し，L^2-2x^2 を3で割った余りを調べると次の表になる。

$L \setminus x$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	2	2
2	1	2	2

したがって，①$'$ が成り立つのは，x，L がともに3の倍数のときのみなので

$$x=3x',\ L=3L' \quad (x',\ L'\text{は自然数})$$

とおける。①に代入して

$$18x'^2+3y^2=9L'^2$$
$$6x'^2+y^2=3L'^2 \quad \cdots\cdots ②$$
$$\therefore\ y^2=3(L'^2-2x'^2)$$

より，y^2 は3の倍数，すなわち y も3の倍数なので

$$y=3y' \quad (y'\text{は自然数})$$

とおける。②に代入して

$$6x'^2+9y'^2=3L'^2$$
$$2x'^2+3y'^2=L'^2 \quad \cdots\cdots ③$$

③は①と同じ形の式なので，上と同様の議論により

$$x'=3x'',\ y'=3y'',\ L'=3L'' \quad (x'',\ y'',\ L''\text{は自然数})$$

とおけて，

$$2x''^2 + 3y''^2 = L''^2$$

となる。以下，同様の議論を無限に続けることができるから，

$$x,\ y,\ L \text{ は } 3 \text{ で無限回割り切れる}$$

ことになるが，このような整数は 0 しか存在せず，
①の整数解は $(x,\ y,\ L) = (0,\ 0,\ 0)$ のみである。
これは☆に矛盾する。
ゆえに，OP が有理数であると仮定すると矛盾が起こるから，OP は無理数である。

4.

O を原点とする座標空間に 2 点 A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(0,\ 0,\ -1)$ がある。$r>0$，$-\pi \leqq \theta < \pi$ に対して，2 点 P$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$，Q$\left(\dfrac{1}{r}\cos\theta,\ \dfrac{1}{r}\sin\theta,\ 0\right)$ をとり，2 直線 AP と BQ の交点を R$(a,\ b,\ c)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b，c の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 点 G$(4,\ 1,\ 1)$ をとる。r，θ が $r\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ をみたしながら変化するとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値とそのときの a，b，c の値を求めよ。

解答

(1) R は線分 AP 上にあるので，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots①$$

と表される。一方線分 BQ 上にもあるので，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cos\theta \\ \frac{1}{r}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots②$$

と表される。ここでベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ との内積をそれぞれ計算すると，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -\cos\theta \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= -\cos\theta + sr^2\cos\theta + s\cos\theta \\
\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -\cos\theta \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cos\theta \\ \frac{1}{r}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \cos\theta
\end{aligned}$$

となる。よって

$$-\cos\theta + sr^2\cos\theta + s\cos\theta = \cos\theta$$

を得る。s について解くことで $s = \dfrac{2}{1+r^2}$ を得る。① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \begin{pmatrix} \dfrac{2r}{1+r^2}\cos\theta \\ \dfrac{2r}{1+r^2}\sin\theta \\ \dfrac{r^2-1}{1+r^2} \end{pmatrix}$$

（ここまで，①②の $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の各成分を比較して求めてもよい。）

すなわち $a=\dfrac{2r}{1+r^2}\cos\theta,\ b=\dfrac{2r}{1+r^2}\sin\theta,\ c=\dfrac{r^2-1}{1+r^2}$ を得る。ゆえに $a,\ b,\ c$ が満たすべき条件は

$$\begin{cases} -\pi \leqq \theta < \pi,\ r>0 \\ a=\dfrac{2r}{1+r^2}\cos\theta \\ b=\dfrac{2r}{1+r^2}\sin\theta \\ c=\dfrac{r^2-1}{1+r^2}=1-\dfrac{2}{r^2+1} \end{cases} \quad \text{を満たす } r,\ \theta \text{が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} -\pi \leqq \theta < \pi,\ r>0 \\ \cos\theta=\dfrac{1+r^2}{2r}a \\ \sin\theta=\dfrac{1+r^2}{2r}b \\ r^2+1=\dfrac{2}{1-c} \quad (\because\ \text{上の式より，} c<1) \end{cases} \quad \text{を満たす } r,\ \theta \text{が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} r>0 \\ \left(\dfrac{1+r^2}{2r}a\right)^2+\left(\dfrac{1+r^2}{2r}b\right)^2=1 \\ r^2=\dfrac{1+c}{1-c} \end{cases} \quad \text{を満たす } r \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} r>0 \\ a^2+b^2=\dfrac{4r^2}{(1+r^2)^2} \\ r^2=\dfrac{1+c}{1-c} \end{cases} \quad \text{を満たす } r \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+b^2=\dfrac{4\left(\frac{1+c}{1-c}\right)}{\left(\frac{2}{1-c}\right)^2} \\ \dfrac{1+c}{1-c}>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+b^2=(1+c)(1-c) \\ -1<c<1 \end{cases}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a^2+b^2+c^2=1} \text{ **かつ** } \boldsymbol{-1<c<1}$$

$\boxed{\text{補足}}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$ であるから，$\angle\mathrm{ARQ}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つので，

R は AB を直径とする球面上に存在するから，$a^2+b^2+c^2=1$ が成り立つことはすぐにわかる。

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4a+b+c \text{ が } k \text{ という値をとりうる}$$

$$\iff \begin{cases} -\pi \leqq \theta < \pi,\ r>0 \\ r\cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{2r}{1+r^2}\cos\theta \\ b=\dfrac{2r}{1+r^2}\sin\theta \\ c=\dfrac{1-r^2}{1+r^2}=1-\dfrac{2}{1+r^2} \\ 4a+b+c=k \end{cases} \text{ を満たす実数の組 } (r,\ \theta,\ a,\ b,\ c) \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} a=\dfrac{1}{1+r^2}=\dfrac{1-c}{2} \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ -1<c<1 \\ 4a+b+c=k \end{cases} \text{ を満たす実数の組 } (r,\ a,\ b,\ c) \text{ が存在する}$$

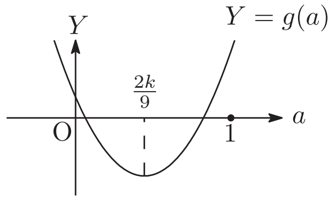
$$\iff \begin{cases} c=1-2a \ \cdots\cdots③ \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ -1<c<1 \\ 4a+b+c=k \end{cases} \text{ を満たす実数の組 } (a,\ b,\ c) \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+b^2+(1-2a)^2=1 \\ -1<1-2a<1 \\ b=k-2a-1 \ \cdots\cdots④ \end{cases} \text{ を満たす実数の組 } (a,\ b) \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+(k-2a-1)^2+(1-2a)^2=1 \\ 0<a<1 \end{cases} \text{ を満たす実数 } a \text{ が存在する}$$

$$\iff 9a^2-4ka+(k-1)^2=0 \text{ が } 0<a<1 \text{ に少なくとも 1 解もつ } \cdots\cdots⑤$$

である。



$g(a)=9a^2-4ka+(k-1)^2$ とおき,

$g(0)=(k-1)^2 \geqq 0,\ \ g(1)=k^2-6a+10=(k-3)^2+1>0$

であることに注意すると,

⑤を満たす条件は

$$\begin{cases} (g(a)=0 \text{ の判別式 } D)=(2k)^2-9(k-1)^2 \geqq 0 \\ \text{軸：} 0<\dfrac{2k}{9}<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5k-3)(k-3) \leqq 0 \\ \text{軸：} 0<k<\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ \ \frac{5}{3} \leqq k \leqq 3$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値は **3** である。

また，このとき $a=\dfrac{2k}{9}=\dfrac{2}{3}$ であり，③，④より $c=-\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$

すなわち，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)}$

別解

直接計算する方法を紹介する。

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{2r}{1+r^2}\cos\theta\\ \dfrac{2r}{1+r^2}\sin\theta\\ \dfrac{r^2-1}{1+r^2}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{8r}{1+r^2}\cos\theta+\frac{2r}{1+r^2}\sin\theta+\frac{r^2-1}{r^2+1}$$

ここで $r\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ であったため，$r\sin\theta=\pm\sqrt{r^2-\dfrac{1}{4}}$ である。いま，内積の最大値を求めればよいため，$r\sin\theta\geqq 0$ として計算してよい。

$r\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$r\sin\theta=\sqrt{r^2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{4r^2-1}}{2r}$ を代入することで

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{4}{1+r^2}+\frac{\sqrt{4r^2-1}}{1+r^2}+\frac{r^2-1}{1+r^2}$$
$$=\frac{\sqrt{4r^2-1}+r^2+3}{1+r^2}$$
$$=\frac{\sqrt{4r^2-1}+2}{1+r^2}+1$$

$x=\sqrt{4r^2-1}$ とおく。$r=\dfrac{1}{2\cos\theta}\geqq\dfrac{1}{2}$ $(\because\ r>0)$ より $x\geqq 0$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{1+\dfrac{x^2+1}{4}}\cdot(x+2)+1$$
$$=4\cdot\frac{x+2}{x^2+5}+1$$

$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+5}$ とおくと，導関数は

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+5)-2x\cdot(x+2)}{(x^2+5)^2}$$
$$=\frac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2}$$
$$=\frac{-(x+5)(x-1)}{(x^2+5)^2}$$

と計算される。増減表を書くと

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

より $x=1$ すなわち $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は最大値をとることが分かる。計算すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=4\cdot\frac{1+2}{1^2+5}+1=\mathbf{3}$$

となる。また，a，b，c を計算すると

$$a=\frac{2}{1+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$b=\frac{\sqrt{4\cdot\frac{1}{2}-1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$c=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

となる。（このとき，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となる。）

別解

上記の別解で $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+5}$ を微分することで最大値を計算したが，微分せずに計算することもできる。

改めて $x+2=y$ と置きなおすと，$x\geqq 0$ より $y\geqq 2>0$ である。さて，$\dfrac{1}{f(x)}$ (>0) が最小値をとるとき，$f(x)$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は最大値をとる。

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{(y-2)^2+5}{y}=y-4+\frac{9}{y}$$

である。$y>0$ であるため，相加平均と相乗平均の大小関係から

$$y+\frac{9}{y}\geqq 2\sqrt{y\cdot\frac{9}{y}}=2\cdot 3=6$$

である。等号成立条件は $y=\dfrac{9}{y}$ すなわち $y=3$ のときである。$y\geqq 2$ より，これを満たす y が存在することが分かる。（このとき，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となる。）

以上をまとめると $y=3$，すなわち $x=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が最大値をとることがわかる。

講評

1.［確率］（やや易）
例年同様に確率からの出題であった。袋から玉を取り出すオーソドックスな状況の問題であり，後半の問題のことを考えると，この問題は確実に解きたいところである。

2.［積分］（標準）
積分方程式から始まり面積・極限を計算する問題であった。誘導に従い，うまく計算したい。接線が直交する条件をうまく活かしたい。途中やや煩雑な式が出てくるが，本学の受験生であれば確実に処理したい。

3.［集合と論証，整数の性質］（標準）
無理数であることを示す論証であった。$\sqrt{2}$ が無理数である証明を思い出しながら解答を書きたい。

4.［空間図形］（やや難）
(2) の計算が煩雑な問題であった。時間内に解き切ることは中々難しいであろうから，着実に部分点を回収していきたい。

例年と同程度の難易度であったが，例年に比べると取り組みやすい問題が多かったのではないか。しかし，計算が重たい問題もあり，苦しんだ受験生も多かっただろう。一次突破ラインは 55 %程度か。