

東京女子医科大学 数学

2023年 2月1日実施

※聞き取りによる再現問題です。一部誤りを含む可能性があります。

1

次の各問いに答えよ。

- ① $23^x = 8$, $184^y = 16$ のとき, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ の値を求めよ。
- ② 片面に A, O, I の文字が書かれたカードが 3 枚, Y の文字が書かれたカードが 2 枚の合計 5 枚のカードがある。これを円形に並べるとき, 時計回りに YAYOI と並ぶ確率を求めよ。ただし, 回転して同じになる並べ方は同一の並べ方とみなす。

解答

- ① 条件式でそれぞれ両辺の \log_2 をとると

$$\begin{cases} x \log_2 23 = 3 \\ y \log_2 184 = 4 \end{cases}$$

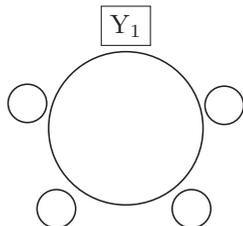
$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{x} = \log_2 23 \\ \frac{4}{y} = \log_2 184 \end{cases}$$

であるから,

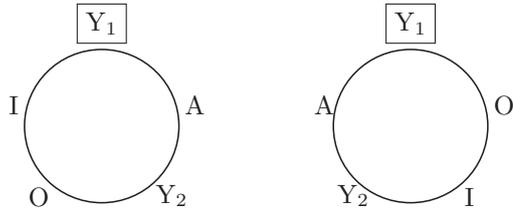
$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} &= \log_2 23 - \log_2 184 \\ &= \log_2 \frac{23}{184} \\ &= \log_2 \frac{1}{8} = -3 \end{aligned}$$

- ② Y_1, Y_2, A, O, I と区別して考える。

これらを円形に並べる順列は (Y_1 の位置を固定して) $4!$ 通りあり, これは同様に確からしく起こる。



このうち, 時計回りに YAYOI となるのは次の 2 通りである。



よって、求める確率は $\frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$

2

毎年初めに a 万円ずつ積み立てて、 n 年度末の元利合計の金額を S_n 万円とする。ただし、年利率を r 、1 年ごとの複利で計算することとする。このとき、次の各問いに答えよ。

- ① $n \geq 2$ のとき、 S_n を S_{n-1} 、 a 、 r を用いて表せ。
- ② S_n を n 、 a 、 r を用いて表せ。
- ③ $n = 10$ 、 $a = 60$ 、 $r = 0.03$ のとき、金利によって増えた合計金額は何万円か、小数点以下を四捨五入して答えよ。ただし、 $(1.03)^{10} = 1.34$ であるとしてよい。

※年利率は r ではなく $r\%$ であったとの声もある。その場合は以下の計算は $r \rightarrow \frac{r}{100}$ とし、③は $r = 3$ として計算してほしい。問題再現にご協力いただいた方々に感謝いたします。

解答

- ① n 年度末の元利合計の金額 S_n 万円は、
 $(n - 1)$ 年度末の元利合計の金額 S_{n-1} 万円と毎年初めに積み立てる a 万円の合計 $(S_{n-1} + a)$ 万円に
 年利率 r の利息がつくので、
 $n \geq 2$ のとき、

$$S_n = (1 + r)(S_{n-1} + a)$$

- ② 特性方程式 $\alpha = (1 + r)(\alpha + a)$ $\left(\alpha = -\frac{a(1+r)}{r}\right)$ を考えると、①の漸化式は

$$S_n - \alpha = (1 + r)(S_{n-1} - \alpha)$$

と変形できる。したがって、数列 $\{S_n - \alpha\}$ は初項 $S_1 - \alpha$ 、公比 $1 + r$ の等比数列となるので

$$S_n - \alpha = (S_1 - \alpha)(1 + r)^{n-1}$$

$$\iff S_n = (S_1 - \alpha)(1 + r)^{n-1} + \alpha$$

$\alpha = -\frac{a(1+r)}{r}$ 、 $S_1 = a(1+r)$ を代入して

$$\begin{aligned} S_n &= \left\{ a(1+r) + \frac{a(1+r)}{r} \right\} (1+r)^{n-1} - \frac{a(1+r)}{r} \\ &= \frac{a(1+r)}{r} (r+1)(1+r)^{n-1} - \frac{a(1+r)}{r} \\ &= \frac{a(1+r)}{r} \{(1+r)^n - 1\} \end{aligned}$$

- ③ ②の結果に $n = 10$ 、 $a = 60$ 、 $r = 0.03$ を代入して

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{60(1+0.03)}{0.03} \{(1+0.03)^{10} - 1\} \\ &= \frac{60 \cdot 1.03}{0.03} \cdot 0.34 \\ &= 700.4 \end{aligned}$$

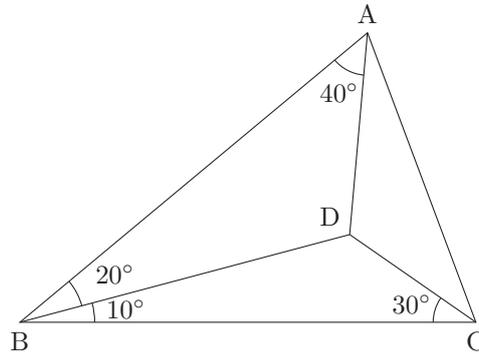
したがって、10 年間で積み立てる合計金額が $60 \times 10 = 600$ 万円であることから、10 年間で金利によって増えた合計金額は

$$S_{10} - 600 = 700.4 - 600 = 100.4(\text{万円})$$

より、求める金額は 100 万円である。

3

図のような三角形がある。ただし、点 D は三角形 ABC の内部にあるものとし、 $BD = a$, $\sin 40^\circ = b$ とする。このとき、次の各問いに答えよ。



- ① AB, BC を a, b を用いて表せ。
- ② 点 A から BD に下した垂線の足を H_1 , 点 C から BD に下した垂線の足を H_2 とする。 BH_1, BH_2 を a, b を用いて表せ。
- ③ $BH_1 - BH_2$ の値を求めよ。

解答

- ① 三角形 ABD に対する正弦定理より

$$\frac{BD}{\sin 40^\circ} = \frac{AB}{\sin 120^\circ}.$$

よって

$$\begin{aligned} AB &= \frac{\sin 120^\circ}{\sin 40^\circ} BD \\ &= \frac{\sqrt{3}a}{2b}. \end{aligned}$$

三角形 BCD に対する正弦定理より

$$\frac{BD}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 140^\circ}.$$

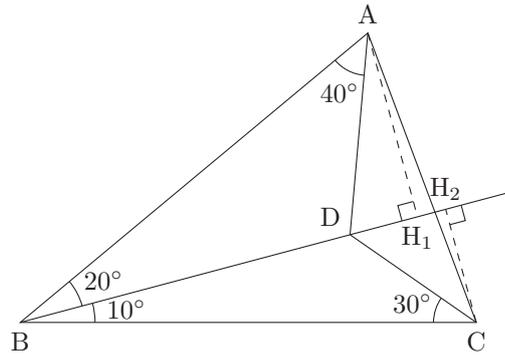
よって

$$\begin{aligned} BC &= \frac{\sin 140^\circ}{\sin 30^\circ} BD \\ &= 2ab. \end{aligned}$$

注釈

$\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$ に注意すること。

②



$\cos 20^\circ = \frac{BH_1}{AB}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
 BH_1 &= AB \cos 20^\circ \\
 &= AB \sin 70^\circ && (\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta) \\
 &= AB(\sin 30^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 30^\circ) && (\text{加法定理}) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{1-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} \right) AB \\
 &= \left(\frac{\sqrt{1-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} \right) \frac{\sqrt{3}a}{2b} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3(1-b^2)}}{4b} + \frac{3}{4} \right) a.
 \end{aligned}$$

$\cos 10^\circ = \frac{BH_2}{BC}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
 BH_2 &= BC \cos 10^\circ \\
 &= BC \sin 80^\circ && (\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta) \\
 &= 2BC \sin 40^\circ \cos 40^\circ && (\text{倍角の公式}) \\
 &= 2 \cdot 2ab \cdot b\sqrt{1-b^2} \\
 &= 4ab^2\sqrt{1-b^2}
 \end{aligned}$$

別解

半角の公式より $2 \cos^2 20^\circ - 1 = \cos 40^\circ$ であるため $\cos 20^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{1-b^2}+1}{2}}$ と表すこともできる。これより

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{\sqrt{1-b^2}+1}{2}} &= \sqrt{\frac{2\sqrt{1-b^2}+2}{4}} \\
 &= \frac{\sqrt{2+2\sqrt{(1+b)(1-b)}}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}{2}
 \end{aligned}$$

と計算することができる。これを用いると

$$BH_1 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+b} + \sqrt{3}\sqrt{1-b}}{4b} a$$

とも表すことができる。

この他にも等価な表記がいくつかあり得るが、③を解く上では本解答の結果が望ましい。

③

$$\begin{aligned} BH_1 - BH_2 &= \left(\frac{\sqrt{3(1-b^2)}}{4b} + \frac{3}{4} - 4b^2\sqrt{1-b^2} \right) a \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-b^2} + 3b - 16b^3\sqrt{1-b^2}}{4b} a \end{aligned}$$

$X = \sqrt{3}\sqrt{1-b^2} + 3b - 16b^3\sqrt{1-b^2}$ とおく。

ここで3倍角の公式より

$$\sin 120^\circ = -4\sin^3 40^\circ + 3\sin 40^\circ$$

である。これを整理すると $-4b^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3b$ となる。代入すると

$$X = \sqrt{3}\sqrt{1-b^2} + 3b + 2\sqrt{3}\sqrt{1-b^2} - 12b\sqrt{1-b^2}$$

となる。 $b = \sin 40^\circ$, $\sqrt{1-b^2} = \cos 40^\circ$ を代入すると

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{3}\cos 40^\circ + 3\sin 40^\circ + 2\sqrt{3}\cos 40^\circ - 12\sin 40^\circ \cos 40^\circ \\ &= 3\sqrt{3}\cos 40^\circ + 3\sin 40^\circ - 12\sin 40^\circ \cos 40^\circ \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\sin 40^\circ \right) - 6\sin 80^\circ \\ &= 6\sin(40^\circ + 60^\circ) - 6\sin 80^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

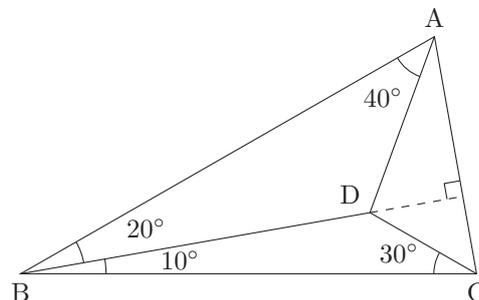
である。こうして $BH_1 - BH_2 = 0$ を得る。

注釈

問題の結論から、 H_1 と H_2 が一致することが分かる。

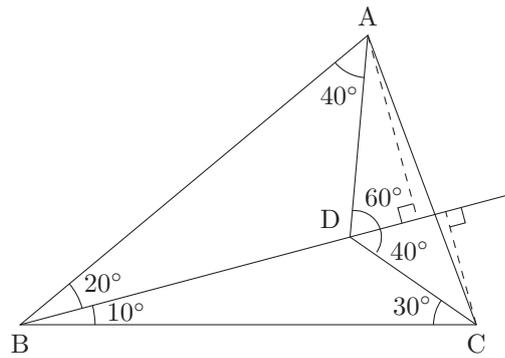
これは BD と AC が直交することを意味する。

正確の図を描くと次のようになる。この図を見ると H_1 と H_2 が一致することが分かりやすい。



別解

a , b を経由しない方法ではあるが、次のように解くこともできる。



三角形 ABD に対する正弦定理より $\frac{AD}{\sin 20^\circ} = \frac{BD}{\sin 40^\circ}$ であり, $AD = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} a$ を得る。

三角形 BCD に対する正弦定理より $\frac{DC}{\sin 10^\circ} = \frac{BD}{\sin 30^\circ}$ であり, $DC = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} a$ を得る。

よって

$$\begin{aligned} BH_1 - BH_2 &= AD \cos 60^\circ - DC \cos 40^\circ \\ &= \left(\frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \cos 60^\circ - \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} \cos 40^\circ \right) a \end{aligned}$$

である。整理し、二倍角の公式を繰り返し用いることで

$$\begin{aligned} \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \cos 60^\circ - \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} \cos 40^\circ &= \frac{\frac{1}{4} \sin 20^\circ - \sin 40^\circ \cos 40^\circ \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin 30^\circ} \\ \frac{1}{4} \sin 20^\circ - \sin 40^\circ \cos 40^\circ \sin 10^\circ &= \frac{1}{4} \sin 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \sin 10^\circ \\ &= \frac{1}{4} \sin 20^\circ - \frac{1}{2} \cos 10^\circ \sin 10^\circ \\ &= \frac{1}{4} \sin 20^\circ - \frac{1}{4} \sin 20^\circ = 0 \end{aligned}$$

となる。こうして $BH_1 - BH_2 = 0$ を得る。

別解

初等的に解くこともできる。

E を三角形 BCD の外心とする。このとき $BE = CE = DE$ である。

直線 BD と直線 CE の交点を F とおく。

中心角の大きさは円周角の大きさの 2 倍であることから $\angle DEC = 2 \times \angle DBC = 20^\circ$ である。

$$\begin{aligned} \angle EDC &= \frac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) \\ &= 80^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle ADC &= \angle ABC + \angle BAD + \angle BCD \\ &= 30^\circ + 40^\circ + 30^\circ \end{aligned}$$

$$\angle EDC + \angle ADC = 180^\circ$$

である。ゆえに A, D, E は同一直線上にある。また $\angle AEF = \angle DEC = 20^\circ$ である。

$\angle ABF = \angle ABD = 20^\circ$ であることとあわせると、円周角の定理から A, B, E, F は同一円周上にある。

円に内接する四角形の対角の和は 180° であることから、

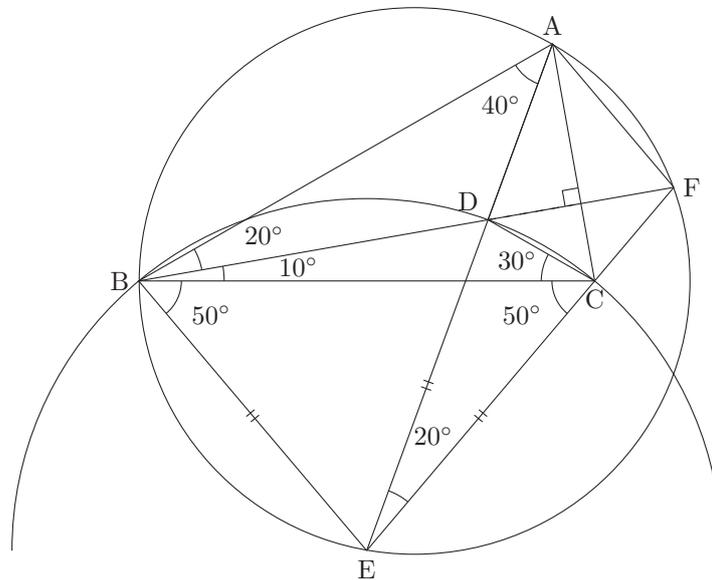
$$\begin{aligned} \angle AFE &= 180^\circ - \angle ABE \\ &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle CAE) \\ &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle BCE) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 50^\circ) \\ &= 100^\circ \end{aligned}$$

である。ところで $\angle ADC = 100^\circ$ であるため、 $\angle ADC = \angle AFE$ を得る。

加えて、円周角の定理から $\angle DFC = \angle BFE = \angle BAE = 40^\circ$ である。一方、外角の計算をすることで $\angle FDC = \angle DBC + \angle DCB = 40^\circ$ である。こうして $\angle DFC = \angle FDC$ を得る。

以上より四角形 ADCF は線分 AC を軸とする四角形である。ゆえに対角線は直交する。これより BD と AC は直交する。

こうして H_1 と H_2 は一致するため、 $BH_1 - BH_2 = \mathbf{0}$ を得る。



4

$f(x) = e^{-x}(a \sin x + b \cos x)$ とするとき、次の各問いに答えよ。

- ① $f'(x) = e^{-x} \sin x$ のとき、 a, b の値を求めよ。
- ② 不定積分 $\int e^{-x} \sin x dx$ を求めよ。
- ③ 定積分 $S_n = (-1)^{n-1} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \sin x dx$ を求めよ。
- ④ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

解答

- ① $f(x)$ を微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(a \sin x + b \cos x) + e^{-x}(a \cos x - b \sin x) \\ &= e^{-x}\{-(a+b) \sin x + (a-b) \cos x\} \end{aligned}$$

である。 $f'(x) = e^{-x} \sin x$ になるので、

$$\begin{cases} -(a+b) = 1 \\ a-b = 0 \end{cases}$$

これを解いて $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$

- ② $f'(x) = e^{-x} \sin x$ より

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= f(x) + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

- ③ ②より

$$\begin{aligned} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \sin x dx &= -\frac{1}{2} \left[e^{-x}(\sin x + \cos x) \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ e^{-n\pi} \cos n\pi - e^{-(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ e^{-n\pi} (-1)^n - e^{-(n-1)\pi} (-1)^{n-1} \right\} \quad (\because \cos n\pi = (-1)^n) \\ &= -\frac{1}{2} (1 + e^\pi) \cdot (-e^{-\pi})^n \end{aligned}$$

よって $S_n = \frac{1 + e^\pi}{2} (e^{-\pi})^n$

- ④ 数列 $\{S_n\}$ は初項 $\frac{1 + e^\pi}{2} \cdot e^{-\pi}$ 、公比 $e^{-\pi}$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1 + e^\pi}{2} \cdot e^{-\pi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)}$$

(参考) ②は次のように解いてもよい。

$$(e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

$$(e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

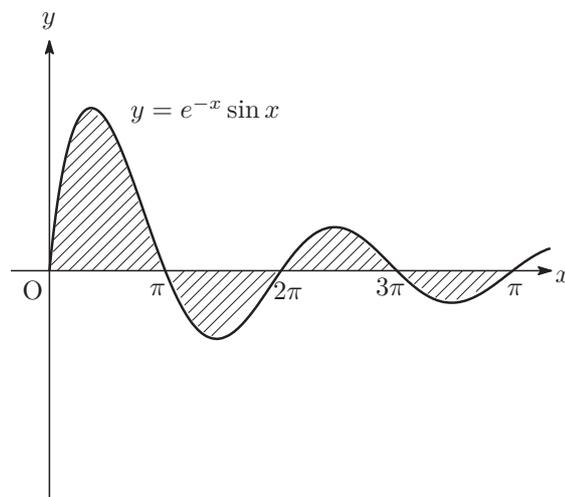
辺々足すことで

$$\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\}' = -2e^{-x} \sin x$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \sin x = \left\{ e^{-x} \left(-\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) \right\}'$$

$$\text{よって } \int e^{-x} \sin x dx = e^{-x} \left(-\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right)$$

(参考) ④の値は図の面積を表している。



講評

1 [対数関数, 確率] (易)

①②にともに基本的な出題であった。①は条件式の両辺の対数をとって計算するだけであるし、②は基本的な円順列に関する確率の問題であった。この大問は絶対に落とせない。

2 [数列] (標準)

複利計算の典型問題からの出題であった。今年度の共通テストでも出題された単元であり、共通テストを受験した受験生はしっかりと復習できていたか、また細かい部分まで気にして問題に取り組んでいるかが試される問題であった。合格のためにはここもなるべく点数を確保したい。

3 [図形と計量, 三角関数] (難)

図形と計量と三角関数からの出題であった。①は正弦定理を利用するだけの問題であり、 $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$ にも気付いてしっかりと正解したい。②③, 特に②は難しいので正解できなくても差はつかないだろう。

4 [数III積分法] (標準～やや難)

減衰曲線の面積に関する典型的な問題の出題であった。この手の計算に慣れている生徒には非常に有利であったが、医学部受験生であれば何度かは経験のある計算であったであろう。

全体として昨年よりはやや易化したか変わらないくらいの難易度であった。ここ3年、大問1が易化しており、ここをしっかりと取れるかが重要なポイントとなっている印象を受けるので、他の大問の基本的な問題を含めて計算ミスがあるかないかで差がついたのではないだろうか。1次突破ボーダーは50%程度であろう。

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部専門予備校
YMS

☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校

メビオ

☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校

英進館メビオ 福岡校

☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録またはLINE友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE登録

