医学部専門予備校 YMS heart of medicine
医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

# 解答速報

# 順天堂大学医学部　数学

2023年 2月3日実施

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\phantom{ア}}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{\phantom{ア}}$ がある場合は同一の値が入る。

(1) (a)　複素数 $z$ に対して，$w=z^2$ とおく。点 $z$ が複素平面上の点 $\dfrac{3}{8}$ を通り，虚軸に平行な直線上を動くとする。このとき，$z=\dfrac{3}{8}+yi$，$w=u+vi$ とおくと $u=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}-\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}v^{\boxed{キ}}$ という関係が得られるので，点 $w$ は複素数平面上で実軸と点 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ で交わり，虚軸と $\pm\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}i$ の 2 点で交わる放物線を描く。

(b)　複素数 $z$ に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とおく。点 $z$ が複素数平面上の点 $2i$ を通り，実軸に平行な直線上を動くとする。このとき，$z=x+2i$，$w=u+vi$ とおくと $u^2+v^2=\dfrac{1}{x^2+\boxed{セ}}$ となり，

$u^2+\left(v+\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\right)^{\boxed{チ}}=\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}$ という関係が得られるので，点 $w$ は複素平面上で点 $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}i$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ の円を描く。ただし点 $\boxed{ハ}$ を除く。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) (a)　$w=\left(\dfrac{3}{8}+yi\right)^2=\dfrac{9}{64}-y^2+\dfrac{3}{4}yi$ より $u=\dfrac{9}{64}-y^2$，$v=\dfrac{3}{4}y$ である。$y$ を消去して

$\boldsymbol{u=\dfrac{9}{64}-\dfrac{16}{9}v^2}$ を得る。

実軸と交わるのは $v=0$ のときで，$u=\boldsymbol{\dfrac{9}{64}}$ となる。また，虚軸と交わるのは $u=0$ のときで，$\dfrac{9}{64}-\dfrac{16}{9}v^2=0$ を解くことで，$v=\pm\dfrac{9}{32}$ を得る。よって $\boldsymbol{\pm\dfrac{9}{32}i}$ である。

(b)　$w=\dfrac{1}{x+2i}=\dfrac{x-2i}{x^2+4}$ であるため，$u=\dfrac{x}{x^2+4}$，$v=-\dfrac{2}{x^2+4}$ である。このとき

$$\begin{aligned} u^2+v^2 &= \frac{x^2}{(x^2+4)^2}+\frac{4}{(x^2+4)^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{x^2+4}} \end{aligned}$$

である。これを $v$ の式に代入することで $v=-2u^2-2v^2$ となる。整理することで

$$\boldsymbol{u^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}} \quad \cdots\cdots①$$

を得る。以上より 点 $w$ は中心が点 $\boldsymbol{-\frac{1}{4}i}$，半径が $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ の円を描く。

$x^2+4 \fallingdotseq 0$ より $v \fallingdotseq 0$ である。① に $v=0$ を代入すると，$u=0$ であるため，$(u,\ v)=(0,\ 0)$ に対応する点は取り除かれる。よって，点 $\mathbf{0}$ は除く。

$\boxed{\text{注釈}}$

あくまでも数字さえ答えればよい。そのため，$u=\dfrac{x}{x^2+4} \to 0\ (x\to\infty)$，$v=-\dfrac{2}{x^2+4} \to 0\ (x\to\infty)$ より $(u,\ v)=(0,\ 0)$ に対応する点は取り除かれると考えるのも手である。

Ⅰ $\boxed{\phantom{ア}}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{\phantom{ア}}$ がある場合は同一の値が入る。

(2) 座標平面上の 3 点 A$(-1,\ -1)$，P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の関係があるとき，

$x_1=\boxed{\text{ア}}x_2+\boxed{\text{イ}}$，$y_1=\boxed{\text{ウ}}y_2+\boxed{\text{エ}}$ となる。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たしながら点 P が曲線 $\ell_1 : y=x^3-3x$ 上を動くとき，点 Q は曲線 $\ell_2 : y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上を動く。ただし，$a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$，$c=\boxed{\text{キ}}$，$d=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

このような関係があるとき，曲線 $\ell_1$ と曲線 $\ell_2$ は点 A を相似の中心として相似の位置にあるといい，相似比は $1:2$ である。

曲線 $\ell_1$ と曲線 $\ell_3 : y=\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x-\dfrac{11}{4}$ が相似の位置にあるとき，3 次の係数より相似比は $\boxed{\text{ス}}:1$ であり，相似の中心は点 B$\left(\boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソ}}\right)$ である。

解答

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x_1+1,\ y_1+1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(x_2+1,\ y_2+1)$ であるため

$$\begin{cases}2x_2+2=x_1+1\\2y_2+2=y_1+1\end{cases}$$

である。整理することで $(x_1,\ y_1)=(2x_2+1,\ 2y_2+1)$ となる。これを $y_1={x_1}^3-3x_1$ に代入し整理すると

$$\begin{aligned}&2y_2+1=(2x_2+1)^3-3(2x_2+1)\\\Longleftrightarrow\ &2y_2=8{x_2}^3+12{x_2}^2+6x_2+1-6x_2-3-1\\\Longleftrightarrow\ &y_2=4{x_2}^3+6{x_2}^2-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。こうして $\ell_2$ は $y=\boldsymbol{4x^3+6x^2-\dfrac{3}{2}}$ となる。

相似比を $1:\alpha$ とすると，$x^3$ の係数は $\alpha^2$ となる。よって $\ell_3$ の場合 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ であるため，相似比は **2 : 1** である。

相似変換によって $\ell_1$ の点 P が $\ell_3$ 上の点 R$(x_3,\ y_3)$ に写るとする。このとき相似の中心を B$(p,\ q)$ とすると，$x_1=\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{2}p$，$y_1=\dfrac{1}{2}y_3+\dfrac{1}{2}q$ と表される。これを $\ell_1$ の式に代入して整理すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}y_3+\frac{1}{2}q=\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}p\right)^3-3\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}p\right)\\\Longleftrightarrow\ &y_3=\frac{1}{4}{x_3}^3+\frac{3}{4}p{x_3}^2+\left(\frac{3}{4}p^2-3\right)x_3+\left(\frac{1}{4}p^3-3p-q\right)\end{aligned}$$

である。$\ell_3$ の式の係数と比較すると

$$\begin{cases}\dfrac{3}{4}p=\dfrac{3}{4}\\\dfrac{1}{4}p^3-3p-q=-\dfrac{11}{4}\end{cases}$$

である。これを解くと B$(p,\ q)=\boldsymbol{(1,\ 0)}$ を得る。よって $\ell_3$ の $x$ の係数は $\dfrac{3}{4}p^2-3=\boldsymbol{-\dfrac{9}{4}}$ となる。

$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\phantom{アイ}}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{\phantom{アイ}}$ がある場合は同一の値が入る。

(3) (a) 初項 1，公比 $-\dfrac{4}{5}$ の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とおくと，$S_n < \dfrac{1}{2}$ を満たす $n$ の最大値は $n = \boxed{\text{アイ}}$ である。ただし，$\log_{10} 2$ の小数点第 4 位までの近似値は 0.3010 である。

(b) 一般項が $a_n = \sin^n\left(\dfrac{2}{3}n\pi\right)$ である数列 $\{a_n\}$ について，

$$\sum_{n=1}^{6} a_n = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}} + \boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$ である。

また，$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(3) (a) $S_n = \dfrac{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n}{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)} = \dfrac{5}{9}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n\right\}$ である。

$S_n < \dfrac{1}{2}$ を変形すると

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{9}\left\{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right\} < \frac{1}{2}\\
\Longleftrightarrow\ &1-\left(-\frac{4}{5}\right)^n < \frac{9}{10}\\
\Longleftrightarrow\ &\left(-\frac{4}{5}\right)^n > \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

である。$n$ が奇数のとき，$\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n$ は負の数であるため，$n$ は偶数であるとしてよい。このとき

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n > \frac{1}{10}$$

を考えればよい。両辺に $\log_{10}$ をとり，変形すると

$$\begin{aligned}
&n\log_{10}\frac{4}{5} > \log_{10}\frac{1}{10}\\
\Longleftrightarrow\ &n(3\log_{10}2-1) > -1\\
\Longleftrightarrow\ &0.097n < 1\\
\Longleftrightarrow\ &n < \frac{1}{0.097} = 10.3097\cdots
\end{aligned}$$

を得る。よって不等式を満たす最大の $n$ は **10** である。

(b) 次に注意する。

$$\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right) = \begin{cases} 0 & (n\text{ が 3 の倍数のとき})\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (n\text{ が 3 で割って 1 余るとき})\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (n\text{ が 3 で割って 2 余るとき}) \end{cases}$$

6 項目までの和を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{6} a_n &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + 0 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{9\sqrt{3}}{32} \\
&= \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}+42}{32}}
\end{aligned}
$$

である。3 で割って 1 余る項と，3 で割って 2 余る項で分けて計算すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{k=0}^{\infty}(a_{3k+1} + a_{3k+2}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{k} + \frac{3}{4}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{k}\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{k} + \frac{3}{4}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{k}\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{N}}{1-\frac{3\sqrt{3}}{8}} + \frac{3}{4}\frac{1-\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{N}}{1+\frac{3\sqrt{3}}{8}}\right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{1-\frac{3\sqrt{3}}{8}} + \frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{3\sqrt{3}}{8}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{8}{8-3\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\frac{8}{8+3\sqrt{3}} \\
&= \frac{4\sqrt{3}(8+3\sqrt{3}) + 6(8-3\sqrt{3})}{64-27} \\
&= \boldsymbol{\frac{14\sqrt{3}+84}{37}}
\end{aligned}
$$

となる。

$\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\phantom{ア}}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{\phantom{ア}}$ がある場合は同一の値が入る。

(a) 点 O を原点とする座標空間において，2 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。△OAB は 1 辺の長さが $\boxed{\text{ア}}$ の正三角形である。

$t$ を実数として，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき平面 $z=t$ と辺 OA は点 $\left(\boxed{\text{イ}}t,\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}t,\ t\right)$ で交わり，平面 $z=t$ と辺 AB は点 $\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}t,\ t\right)$ で交わる。

△OAB を $z$ 軸の周りに 1 回転して得られる立体を $V$ とすると, 立体 $V$ と平面 $z=t$ は $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき交わりを持ち, そのときの立体 $V$ の平面 $z=t$ による切り口は半径 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}t$ と $\sqrt{\boxed{\text{サ}}+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}t^2}$ の同心円で囲まれた部分となる。したがって，切り口の面積は $\left(\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}t^2\right)\pi$ となり，$V$ の体積は $\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\pi$ となることがわかる。

(b) 3 点 O, A, B を通る円 $C$ は中心が点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}}\right)$, 半径が $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ の円であり，$z=\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}y$ で表される平面上にある。円 $C$ と平面 $z=t$ は $\boxed{\text{ヒフ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{ヘ}}$ のとき交点を持ち，その交点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{\text{ホ}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}}\left(\boxed{\text{ム}} \pm \sqrt{\boxed{\text{メ}}-t^2}\right),\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{モ}}}}{\boxed{\text{ヤ}}}t,\ t\right)$ と表される。したがって，円 $C$ とその内部からなる円板を $z$ 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}\pi^2$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

(a) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{3+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=2$，$\mathrm{AB}=\sqrt{1+3}=2$ より △OAB は 1 辺の長さが **2** の正三角形である。

平面 $z=t$ と辺 OA，辺 AB の交点をそれぞれ P，Q とおく。辺 AB の中点を $D$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるため，P の座標は $\left(\boldsymbol{2t},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}t},\ \boldsymbol{t}\right)$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ より，点 Q の座標は $\left(\boldsymbol{\sqrt{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}t},\ \boldsymbol{t}\right)$ である。

以上より立体 $V$ の平面 $z=t$ における切り口は，半径

$$\sqrt{(2t)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2+(t-t)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{39}}{3}t}$$

と半径

$$\sqrt{\sqrt{3}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2+(t-t)^2}=\sqrt{\boldsymbol{3+\frac{1}{3}t^2}}$$

の同心円上で囲まれた部分となる。

したがって切り口の面積は

$$\pi\left(3+\frac{1}{3}t^2-\frac{13}{3}t^2\right)=\boldsymbol{(3-4t^2)\pi}$$

である。また，$V$ の体積は

$$\begin{aligned}V&=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(3-4t^2)\pi dt\\&=\frac{1}{6}\cdot 4\pi\cdot(\sqrt{3})^3\\&=\boldsymbol{2\sqrt{3}\pi}\end{aligned}$$

である。

(b)　△OAB は正三角形であるため，外心は重心と一致する。

よって中心の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ すなわち，$\boldsymbol{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)}$ である。

半径は点 O と中心の距離であるため $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ である。

$x$ 軸方向から見ると，円は傾き $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{3}$ の直線である。すなわち平面 $\boldsymbol{z=\sqrt{3}y}$ 上にある。

円 $C$ は，$xz$ 平面上の中心 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$，半径 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ の円（以下 $D$ とおく）を $x$ 軸を中心に $30^\circ$ 回転させたものである。よって $C$ 上の点の $z$ 座標の範囲は

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq z\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。ゆえに円 $C$ と平面 $z=t$ は $\boldsymbol{-1\leqq t\leqq 1}$ のとき，交点を持つ。

交点は円 $D$ 上の $z=\frac{2\sqrt{3}}{3}t$ である点を，$x$ 軸を中心に $30^\circ$ 回転させたものである。ゆえに $x$ 座標は

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}t\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1\pm\sqrt{1-t^2}\right)$$

である。（$x$ 軸中心の回転であるため，$x$ 座標に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ などをかける必要はない。）

こうして交点の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1\pm\sqrt{1-t^2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}t,\ t\right)}$ である。

ゆえに立体を $z=t$ で切った切断面の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned}S_n=&\,\pi\left[\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)\right\}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2\right]\\&-\pi\left[\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\right\}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2\right]\\=&\,\frac{4}{3}\pi\cdot 4\sqrt{1-t^2}\\=&\,\frac{16\pi}{3}\sqrt{1-t^2}\end{aligned}$$

である。こうして体積は

$$\int_{-1}^{1} S(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{16\pi}{3}\sqrt{1-t^2}dt$$
$$= \frac{16\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi^2}$$

である。

$\boxed{\text{別解}}$

円 $C$ と平面 $z=t$ の交点の $x$ 座標は直接計算しても良い。

$z=t$，かつ $z=\sqrt{3}y$ 上にある点 $\left(x,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}t,\ t\right)$ と円の中心 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$ の距離が $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ であるため

$$\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2 + t^2 = \frac{4}{3}$$

である。整理すると

$$x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + \frac{4}{3}t^2 = 0$$

であるため，解は

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}t^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1\pm\sqrt{1-t^2}\right)$$

である。

$\boxed{\text{III}}$

$P(s,\ t)$ を $s,\ t$ の整式とする。

(1) $A = s^3 + 2s^2t + 3st^2 + 4t^3$ と $B = s + t$ を $s$ の整式と考えて，$A$ を $B$ で割った商と余りを求めよ。

(2) $P(s,\ t) = f_n(t)s^n + f_{n-1}(t)s^{n-1} + \cdots + f_1(t)s + f_0(t)$ とおく。
ただし，$f_n(t),\ f_{n-1}(t), \cdots,\ f_0(t)$ は $t$ の整式とし，$f_n(t) \fallingdotseq 0$ とする。このとき，$s,\ t$ の整式 $Q(s,\ t)$ と $t$ の整式 $R(t)$ を使って

$$P(s,\ t) = Q(s,\ t)(s-t) + R(t)$$

と表せることを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) $P(x,\ y) = -P(y,\ x)$ であるとき，1 次式 $(s-t)$ は整式 $P(s,\ t)$ の因数であることを示せ。ただし，$P(x,\ y)$ は $P(s,\ t)$ に $s = x,\ t = y$ を代入して得られる整式をあらわし，$P(y,\ x)$ は $P(s,\ t)$ に $s = y,\ t = x$ を代入して得られる整式をあらわす。

(4) 1 次式 $(s-t)$ が整式 $P(s,\ t)$ の因数であることは $P(x,\ y) = -P(y,\ x)$ であることの十分条件ではないことを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $s$ の整式 $A = s^3 + 2ts^2 + 3t^2s + 4t^3$ を $B = s + t$ で割って，

$$\textbf{商：}\boldsymbol{s^2 + ts + 2t^2}\textbf{，余り：}\boldsymbol{2t^3}$$

(2) $P_n(s,\ t) = f_n(t)s^n + f_{n-1}(t)s^{n-1} + \cdots + f_1(t)s + f_0(t)$ とする。
以下，0 以上の整数 $n$ について

$$P_n(s,\ t) = Q_n(s,\ t)(s-t) + R_n(t)$$

と表せることを数学的帰納法で証明する。

( i ) $n = 0$ のとき

$$P(s,\ t) = f_0(t) = 0 \cdot (s-t) + f_0(t)$$

であるから，$Q_0(s,\ t) = 0,\ R_0(t) = f_0(t)$ とすることで成立する。

( ii ) $n = k$ ($k$ は 0 以上の整数) のとき

$$P_k(s,\ t) = Q_k(s,\ t)(s-t) + R_k(t)$$

と表せると仮定する。このとき，

$$\begin{aligned}
P_{k+1}(s,\ t) &= f_{k+1}(t)s^{k+1} + f_k(t)s^k + \cdots\cdots + f_1(t)s + f_0(t) \\
&= f_{k+1}(t)s^{k+1} + P_k(s,\ t) \\
&= f_{k+1}(t)s^{k+1} - f_{k+1}(t)t^{k+1} + f_{k+1}(t)t^{k+1} + P_k(s,\ t) \ \cdots\cdots (*) \\
&= f_{k+1}(t)(s^{k+1} - t^{k+1}) + f_{k+1}(t)t^{k+1} + P_k(s,\ t) \\
&= f_{k+1}(t)(s-t)(s^k + s^{k-1}t + \cdots\cdots + st^{k-1} + t^k) + f_{k+1}(t)t^{k+1} + Q_k(s,\ t)(s-t) + R_k(t) \quad (\because \text{仮定}) \\
&= \{f_{k+1}(t)(s^k + s^{k-1}t + \cdots\cdots + st^{k-1} + t^k) + Q_k(s,\ t)\}(s-t) + R_k(t) + f_{k+1}(t)t^{k+1}
\end{aligned}$$

であるから, $Q_{k+1}(s,\ t)=f_{k+1}(t)(s^k+s^{k-1}t+\cdots\cdots+st^{k-1}+t^k)+Q_k(s,\ t)$, $R_{k+1}(t)=R_k(t)+f_{k+1}(t)t^{k+1}$ とすることで $n=k+1$ のときも成立する。

以上 (ｉ)(ⅱ) より，証明された。

注釈

$(*)$ の式変形はたとえば $n=2$ あたりで具体的に計算してみると気づけるだろう。

$$\begin{aligned}P_2(s,\ t)&=f_2(t)s^2+f_1(t)s+f_0(t)\\&=f_2(t)s^2+P_1(s,\ t)\\&=f_2(t)s^2+Q_1(s,\ t)(s-t)+R_1(t)\\&=f_2(t)s^2-f_2(t)t^2+f_2(t)t^2+Q_1(s,\ t)(s-t)+R_1(t)\\&=f_2(t)(s^2-t^2)+f_2(t)t^2+Q_1(s,\ t)(s-t)+R_1(t)\\&=\{f_2(t)(s+t)+Q_1(s,\ t)\}(s-t)+R_1(t)+f_2(t)t^2\end{aligned}$$

(3)　$P(x,\ y)=-P(y,\ x)$（両辺はともに $x,\ y$ の整式）が成り立つので

この両辺に $x=t$，$y=t$ を代入して

$$P(t,\ t)=-P(t,\ t)\qquad(\text{両辺はともに } t \text{ の整式})$$

$$\therefore\ P(t,\ t)=0\ \cdots\cdots①\qquad(t \text{ の整式としての等式})$$

が成り立つことに注意する。

さて，(2) より，

$$P(s,\ t)=Q(s,\ t)(s-t)+R(t)\ \cdots\cdots②$$

と表せるので，$s=t$ を代入すると，

$$P(t,\ t)=R(t)$$

$$\therefore\ R(t)=0\qquad(\because ①)$$

よって，②に代入して

$$P(s,\ t)=Q(s,\ t)(s-t)$$

となるから，示された。

(4)　例えば，$P(s,\ t)=(s-t)^2$ とすると，$P(s,\ t)$ は $(s-t)$ を因数にもつが

$$P(x,\ y)=(x-y)^2=(y-x)^2=P(y,\ x)$$

であるから，$P(x,\ y)\fallingdotseq -P(y,\ x)$ である。

よって，$(s-t)$ が整式 $P(s,\ t)$ の因数であることは $P(x,\ y)=-P(y,\ x)$ であることの十分条件ではない。

注釈

$P(s,\ t)$ は $(s-t)$ を因数にもつので

$$P(s,\ t)=Q(s,\ t)(s-t)$$

と表せるから，$P(x,\ y)\fallingdotseq -P(y,\ x)$ とするには

$$Q(x,\ y)(x-y)\fallingdotseq -Q(y,\ x)(y-x)$$

$$\therefore\ Q(x,\ y)\fallingdotseq Q(y,\ x)$$

となるような $Q(s,\ t)$ をもってくればよい。

今回は $Q(s,\ t)=s-t$ として解答した。

## 講評

$\boxed{\mathrm{I}}$［(1) 複素数，(2) 三次関数，ベクトル，(3) 三角関数，無限級数］（やや易）

(1) は複素数の変換に関する問題であった。基本的な式変形がメインであるため，計算ミスをしないようにしっかりと得点したい。

(2) は三次曲線の拡大・縮小に関する問題であった。後半の計算は前半を参考にすると良いだろう。

(3) は無限級数の問題であった。あまり見ない形ではあるが，三角関数の周期性に着目すると良い。ルートの有理化など，計算が煩雑であるが，落ち着いて丁寧に計算をしたい。

$\boxed{\mathrm{II}}$［空間図形・体積］（標準）

回転体の体積を求める問題であった。誘導に従い丁寧に計算をしたい。

$\boxed{\mathrm{III}}$［多項式］（標準）

2 変数の多項式に関する論証問題であった。慣れていないと考えにくい問題である。(1) を確実に解答し，可能であれば (2) まで解けると良いだろう。(4) は意外にも簡単な例があるが，経験がないと思いつきにくいかもしれない。

$\boxed{\mathrm{I}}$ $\boxed{\mathrm{II}}$ は計算がメインで昨年度に比べ解きやすい問題であった。所々数字が煩雑な箇所があったため，そこで計算ミスをしないようにしたい。$\boxed{\mathrm{III}}$ はあまり見ないタイプの問題であったため，昨年度に比べ点数がとりにくく，そこで時間を使いすぎないように注意したいところだ。全体的には昨年度と同程度の難易度であったと言えるだろう。一次突破ラインは数学の配点率が低く何とも言えず他科目次第では 60 %なくても問題ないが，60〜65% 程度を目標としたい。