解答速報

慶應義塾大学医学部　数学

2023年 2月19日実施

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし，空欄（あ），（い），（う）には既約分数で表される有理数を記入すること。

(1)　三角形 ABC において辺 BC を 4 : 3 に内分する点を D とするとき，等式

$$\boxed{\text{（あ）}}\mathrm{AB}^2+\boxed{\text{（い）}}\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\boxed{\text{（う）}}\mathrm{BD}^2$$

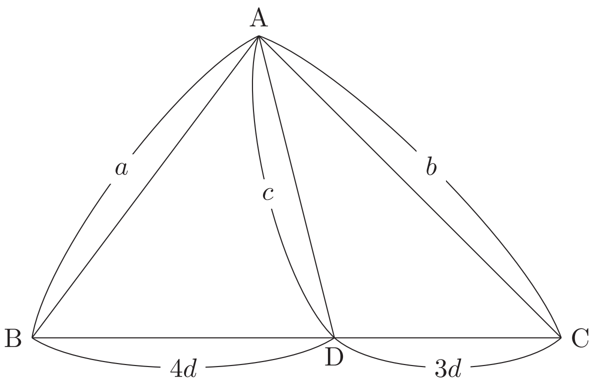
が成り立つ。

(2)　式 $4z^2+4z-\sqrt{3}i=0$ を満たす複素数 z は 2 つある。それらを $\alpha,\ \beta$ とする。ただし i は虚数単位である。$\alpha,\ \beta$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P, Q とすると，線分 PQ の長さは $\boxed{\text{（え）}}$ であり，PQ の中点の座標は $\left(\boxed{\text{（お）}},\ \boxed{\text{（か）}}\right)$ である。また，線分 PQ の垂直二等分線の傾きは $\boxed{\text{（き）}}$ である。

(3)　曲線 $y=x\log(x^2+1)$ の $x\geqq 0$ の部分を C とすると，点 $(1,\ \log 2)$ における C の接線 ℓ の方程式は $\boxed{\text{（く）}}$ である。また，曲線 C と直線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{（け）}}$ である。

解答

(1)



$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{AC}=b,\ \mathrm{AD}=c,\ \mathrm{BD}=4d,\ \mathrm{DC}=3d$ とおく。△ABC と △ABD に注目して余弦定理を考える。

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{a^2+49d^2-b^2}{14ad}=\frac{a^2+16d^2-c^2}{8ad}$$

式を整理して

$$\begin{aligned} &3a^2+4b^2=84d^2+7c^2 \\ \iff &\frac{3}{7}a^2+\frac{4}{7}b^2=c^2+12d^2 \\ \iff &\frac{3}{7}a^2+\frac{4}{7}b^2=c^2+\frac{3}{4}(4d)^2 \end{aligned}$$

つまり

$$\mathbf{\frac{3}{7}AB^2+\frac{4}{7}AC^2=AD^2+\frac{3}{4}BD^2}$$

が成り立つ。

別解

3 点 A，B，C を xy 座標平面上に次のように設定しても一般性は失われない。

$$\mathrm{A}(a,\ b),\ \ \mathrm{B}(-4,\ 0),\ \mathrm{C}(3,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ 0)\ \ (\text{ただし，}b \fallingdotseq 0)$$

ゆえに，

$$\begin{cases} \mathrm{AB}^2=(a+4)^2+b^2 \\ \mathrm{AC}^2=(a-3)^2+b^2 \\ \mathrm{AD}^2=a^2+b^2 \\ \mathrm{BD}^2=16 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで，

$$l\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+n\mathrm{BD}^2$$

を満たす実数 l，m，n を求める。① を代入して整理すると

$$(l+m)a^2+(l+m)b^2+(8l-6m)a+16l+9m=a^2+b^2+16n$$

これが，任意の a，b で成り立つ l，m，n の値を求める。

$$\begin{cases} l+m=1 \\ 8l-6m=0 \\ 16l+9m=16n \end{cases}$$

を解いて　$(l,m,n)=\left(\dfrac{3}{7},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{3}{4}\right)$

ゆえに

$$\mathbf{\frac{3}{7}AB^2+\frac{4}{7}AC^2=AD^2+\frac{3}{4}BD^2}$$

(2)　$4z^2+4z-\sqrt{3}i=0$ の 2 解を α，β とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

ここで，

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &=1+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}|\beta-\alpha|^2&=|(\beta-\alpha)^2| \\ &=|1+\sqrt{3}i|=2\end{aligned}$$

より，PQ$=|\beta-\alpha|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

また，PQ の中点は点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{1}{2}$ より，$\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ 0}\right)$

さらに，$(\beta-\alpha)^2=1+\sqrt{3}i$ の $\beta-\alpha$ に関する複素方程式を解くと，

$\beta-\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

となるので，直線 PQ の傾きは $\dfrac{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (複号同順) である。

よって，線分 PQ の垂直二等分線の傾きは $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

$\boxed{\text{注釈}}$

根号内の虚数単位 i を認めると次のようにもできる。

$4z^2+4z-\sqrt{3}i=0$ に解の公式を用いて

$$\begin{aligned}
&4z^2+4z-\sqrt{3}i=0\\
&\Longleftrightarrow z=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\sqrt{3}i}}{4}\\
&\Longleftrightarrow z=\frac{-2\pm\sqrt{4+2\sqrt{12}i}}{4}\\
&\Longleftrightarrow z=\frac{-2\pm\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right)^2}}{4}\\
&\Longleftrightarrow z=\frac{-2\pm(\sqrt{6}+\sqrt{2}i)}{4}
\end{aligned}$$

ここで，xy 座標平面で考えると，点 P，Q は

$$\mathrm{P}\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

となるので　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{\dfrac{6}{4}+\dfrac{2}{4}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

また，PQ の中点の座標は　$\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ 0}\right)$

さらに，直線 PQ の傾きは $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，線分 PQ の垂直二等分線の傾きは　$\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

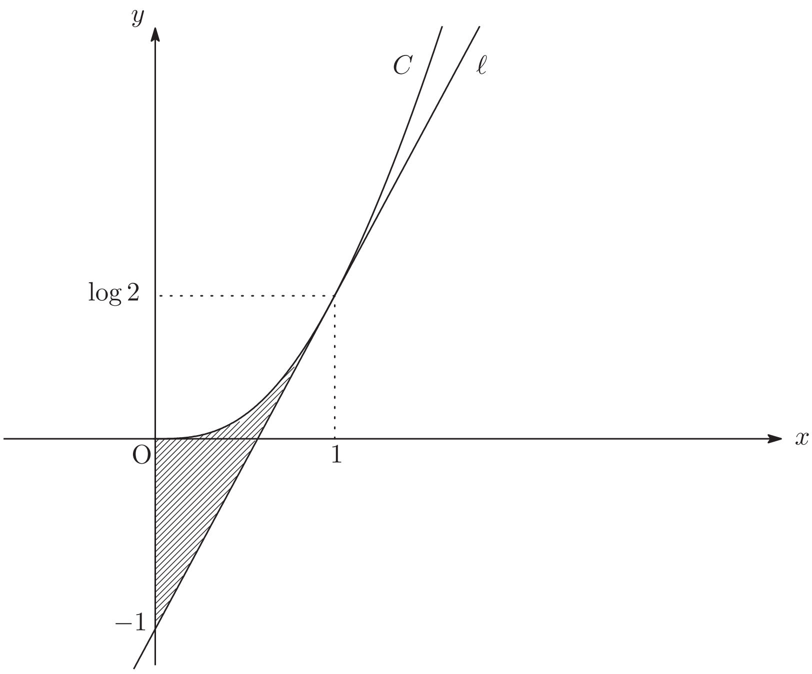
(3)　$y'=\log(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ であるから，$x=1$ を代入することで，接線 ℓ の傾きは　$1+\log 2$

よって，ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{y=(1+\log 2)\,x-1}$$

曲線 C と直線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形の面積を S とする。

$x>0$ において，$y'>0$，$y''=2x\left\{\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{(x^2+1)}\right\}>0$ より，グラフは次のようになり，



$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \left\{x\log\left(x^2+1\right) - (1+\log 2)x + 1\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{2}\right)' \log\left(x^2+1\right) dx - \int_0^1 (1+\log 2)x dx + \int_0^1 dx \\
&= \left[\frac{x^2+1}{2}\cdot\log\left(x^2+1\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{\log 2}{2}}
\end{aligned}
$$

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

n を自然数とする。A 君と B 君の 2 人が以下の試合 T を n セット行い，それぞれが得点をためていくとする。

試合 T

2 人で腕ずもうを繰り返し行う。毎回，A 君，B 君のどちらも勝つ確率は $\frac{1}{2}$ ずつである。どちらかが先に 2 勝したら，腕ずもうを行うのをやめる。2 勝 0 敗の者は 2 点を，2 勝 1 敗の者は 1 点を得る。2 勝しなかった者の得点は 0 点である。

A 君が 1 セット目から n セット目までに得た点の合計を a_n とし，B 君が 1 セット目から n セット目までに得た点の合計を b_n とする。

(1) $n=1$ とする。$a_1=2$ である確率は $\boxed{(あ)}$ であり，$a_1=1$ である確率は $\boxed{(い)}$ である。

(2) $n \geqq 4$ とする。試合 T を n セット行ううち，A 君が 2 点を得るのがちょうど 2 セット，かつ 1 点を得るのがちょうど 2 セットである確率は $\dfrac{\boxed{(う)}}{\boxed{(え)}}$ である。

(3) $n \geqq 2$ とする。$a_n=n+2$ かつ $b_n=0$ である確率は $\dfrac{\boxed{(お)}}{\boxed{(か)}}$ である。

(4) $a_n=2$ である確率は $\dfrac{\boxed{(き)}}{\boxed{(く)}}$ である。

(5) $n=4$ とする。$a_4>b_4$ である確率は $\dfrac{\boxed{(け)}}{\boxed{(こ)}}$ である。

解答

(1) $a_1=2$ となるのは，A 君が 2 連勝するときであるから，求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ である。

$a_1=1$ となるのは，A 君が 1 勝 1 敗からさらに 1 勝するときであるから，求める確率は ${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ である。

(2) (1) より，各セットで A 君が

2 点を得る確率は $\frac{1}{4}$，1 点を得る確率は $\frac{1}{4}$，0 点となる確率は $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

である。

$n \geqq 5$ において，A 君が 2 点を得るのがちょうど 2 セット，かつ 1 点を得るのがちょうど 2 セットであるとき，0 点となるのが $(n-4)$ セットであるから，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}\\
=&\boldsymbol{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^{n+6}}} \quad (\text{これは } n=4 \text{ のときも成り立つ})
\end{aligned}
$$

(3) $n \geqq 3$ のとき，$a_n=n+2$ かつ $b_n=0$ となるのは，

A 君が 2 点を得るのがちょうど 2 セット，1 点を得るのがちょうど $(n-2)$ セット
であるから，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\\
=&\boldsymbol{\frac{n(n-1)}{2^{2n+1}}} \quad (\text{これは } n=2 \text{ のときも成り立つ})
\end{aligned}
$$

(4)　$n \geqq 3$ のとき，$a_n = 2$ となるのは，
A 君が 2 点を得るのがちょうど 1 セット，0 点となるのが $(n-1)$ セット，または
A 君が 1 点を得るのがちょうど 2 セット，0 点となるのが $(n-2)$ セット
であり，それぞれ排反であることから求める確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
=&\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{2^{n+3}}} \quad (\text{これは } n=1,\ 2 \text{ のときも成り立つ})
\end{aligned}
$$

(5)　$a_4 = b_4$ となる確率を考える。
$a_4 = b_4$ となるのは，$a_4 = b_4 = 2,\ 3,\ 4$ の 3 つのパターンのみである。

● $a_4 = b_4 = 2$ の例：

	1 セット目	2 セット目	3 セット目	4 セット目
A 君	1 点	1 点	0 点	0 点
B 君	0 点	0 点	1 点	1 点

(A 君の得点，B 君の得点)$=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ となる場合がそれぞれ 2 セットずつ起こる。

● $a_4 = b_4 = 3$ の例：

	1 セット目	2 セット目	3 セット目	4 セット目
A 君	1 点	2 点	0 点	0 点
B 君	0 点	0 点	1 点	2 点

(A 君の得点，B 君の得点)$=(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2)$ となる場合が 1 セットずつ起こる。

● $a_4 = b_4 = 4$ の例：

	1 セット目	2 セット目	3 セット目	4 セット目
A 君	2 点	2 点	0 点	0 点
B 君	0 点	0 点	2 点	2 点

(A 君の得点，B 君の得点)$=(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ となる場合がそれぞれ 2 セットずつ起こる。

それぞれの得点パターンが起こる事象はそれぞれ排反であり，B 君が各得点を得る確率は A 君と同じであるから，$a_4 = b_4$ となる確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+4!\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\\
=&({}_4\mathrm{C}_2+4!+{}_4\mathrm{C}_2)\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{9}{64}
\end{aligned}
$$

$a_4 > b_4$ と $a_4 < b_4$ となる確率は同じであるから，求める確率は

$$
\left(1-\frac{9}{64}\right)\div 2=\boldsymbol{\frac{55}{128}}
$$

[III]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ （$x \neq 0$）を C とする。a_1 を正の実数とし，点 $\mathrm{A}_1\left(a_1,\ \dfrac{1}{{a_1}^2}\right)$ における C の接線を ℓ_1 とする。ℓ_1 と C の交点で A_1 と異なるものを $\mathrm{A}_2\left(a_2,\ \dfrac{1}{{a_2}^2}\right)$ とする。次に，点 A_2 における C の接線を ℓ_2 とし，ℓ_2 と C の交点で A_2 と異なるものを $\mathrm{A}_3\left(a_3,\ \dfrac{1}{{a_3}^2}\right)$ とする。以下同様にして $n=3,\ 4,\ 5,\cdots$ に対して，$\mathrm{A}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ における C の接線を ℓ_n とし，ℓ_n と C の交点で A_n と異なるものを $\mathrm{A}_{n+1}\left(a_{n+1},\ \dfrac{1}{{a_{n+1}}^2}\right)$ とする。

(1) $\dfrac{a_2}{a_1}=\boxed{(あ)}$ であり，$\dfrac{a_3}{a_1}=\boxed{(い)}$ である。

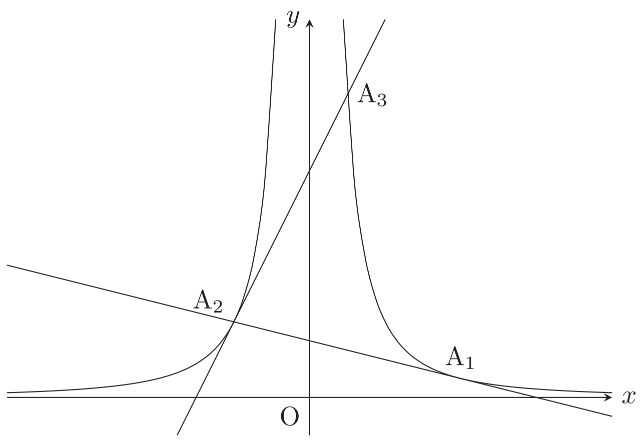
(2) a_n を a_1 を用いて表すと $a_n=\boxed{(う)}$ であり，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和 T を a_1 を用いて表すと $T=\boxed{(え)}$ である。

(3) a_1 を正の実数すべてにわたって動かすとき，三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ の重心が描く軌跡の方程式を $y=f(x)$ の形で求めると，$f(x)=\boxed{(お)}$ となる。

(4) 三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ が鋭角三角形になるための条件は $\boxed{(か)}<a_1<\boxed{(き)}$ である。

(5) x 軸上に 2 点 $\mathrm{A}_1'(a_1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2'(a_2,\ 0)$ をとり，台形 $\mathrm{A_1A_2A_2'A_1'}$ の面積を S_1 とする。また，点 A_1 から点 A_3 にいたる曲線 C の部分，および線分 $\mathrm{A_3A_2}$ と $\mathrm{A_2A_1}$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1:S_2=\boxed{(く)}:\boxed{(け)}$ である。ただし，$\boxed{(く)}$ と $\boxed{(け)}$ は互いに素な自然数である。

解答



(1) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=-\dfrac{2}{x^3}$ であるため，ℓ_1 の傾きは $-\dfrac{2}{{a_1}^3}$ である。ℓ_1 の式を計算すると

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{2}{{a_1}^3}(x-a_1)+\frac{1}{{a_1}^2}\\
&= -\frac{2}{{a_1}^3}x+\frac{3}{{a_1}^2}
\end{aligned}
$$

である。よって，連立方程式

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{{a_1}^3}x + \dfrac{3}{{a_1}^2} \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

を考える。y を消去して整理すると

$$2x^3 - 3a_1x^2 + {a_1}^3 = 0 \iff (x - a_1)^2(2x + a_1) = 0$$

である。解くと $x = a_1$，$-\dfrac{1}{2}a_1$ を得る。よって $a_2 = -\dfrac{1}{2}a_1$ であり，$\dfrac{a_2}{a_1} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$ を得る。

a_1 を a_2 に取り換えて同様の計算をすると $a_3 = -\dfrac{1}{2}a_2$ である。よって $\dfrac{a_3}{a_1} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ となる。

(2)　(1) 同様に計算すると，一般に $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n$ を得る。よって $a_n = \boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} a_1}$ である。また，

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a_1 = \frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}a_1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}a_1}$$

である。

(3)　三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ の重心を $\mathrm{G}(p,\ q)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\left(a_1 - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1\right) \\ &= \frac{1}{4}a_1 \\ q &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{{a_1}^2} + \frac{4}{{a_1}^2} + \frac{16}{{a_1}^2}\right) \\ &= \frac{7}{{a_1}^2} \end{aligned}$$

である。$a_1 > 0$，p の式から $p > 0$ であり，$a_1 = 4p$ である。これを q の式に代入することで $q = \dfrac{7}{16p^2}$（$p > 0$）を得る。

こうして求める式は $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{7}{16x^2}}$（$x > 0$）である。

(4)　$\angle \mathrm{A_1A_2A_3}$ が鋭角である。$\iff \overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} > 0$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}a_1 \\ -\dfrac{3}{{a_1}^2} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}a_1 \\ \dfrac{12}{{a_1}^2} \end{pmatrix}$$

であるため，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} = \frac{9}{8}{a_1}^2 - \frac{36}{{a_1}^4} > 0$$

を解けばよい。よって $\angle \mathrm{A_1A_2A_3}$ が鋭角である $\iff a_1 > \sqrt[6]{32} = 2^{\frac{5}{6}}$ である。

同様に，$\angle \mathrm{A_1A_3A_2}$ が鋭角である。$\iff \overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_3A_2}} > 0$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}a_1 \\ -\dfrac{15}{{a_1}^2} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{A_3A_2}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4}a_1 \\ -\dfrac{12}{{a_1}^2} \end{pmatrix}$$

であるため,

$$\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_3A_2}} = -\frac{9}{16}{a_1}^2 + \frac{180}{{a_1}^4} > 0$$

を解けばよい。よって $\angle \mathrm{A_1A_3A_2}$ が鋭角である $\iff a_1 < \sqrt[6]{320} = 2\cdot 5^{\frac{1}{6}}$ である。

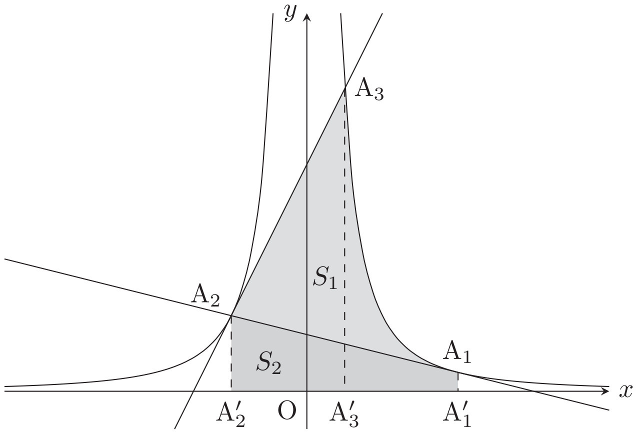
なお,

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}} = \frac{9}{8}{a_1}^2 + \frac{45}{{a_1}^4} > 0$$

より $\angle \mathrm{A_2A_1A_3}$ は常に鋭角である。

以上より三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ が鋭角三角形となるのは $\boldsymbol{2^{\frac{5}{6}} < a_1 < 2\cdot 5^{\frac{1}{6}}}$ のときである。

(5)



まず，S_1 を求める。

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{2}a_1\right)\left(\frac{1}{{a_1}^2} + \frac{4}{{a_1}^2}\right) \\ &= \frac{15}{4a_1} \end{aligned}$$

$\mathrm{A_3'}(a_3,\ 0)$ とおく。

$y = \dfrac{1}{x^2}$ を a_3 から a_1 で積分した値と台形 $\mathrm{A_2A_3A_3'A_2'}$ の面積を足すと $S_1 + S_2$ となる。

よって

$$\begin{aligned} S_2 &= \text{台形 } \mathrm{A_2A_3A_3'A_2'} + \int_{\frac{1}{4}a_1}^{a_1} \frac{dx}{x^2} - S_1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1\right)\left(\frac{4}{{a_1}^2} + \frac{16}{{a_1}^2}\right) + \int_{\frac{1}{4}a_1}^{a_1} \frac{dx}{x^2} - \frac{15}{4a_1} \\ &= \frac{15}{4a_1} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{4}a_1}^{a_1} \\ &= \frac{15}{4a_1} - \frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_1} \\ &= \frac{27}{4a_1} \end{aligned}$$

である。ゆえに $S_1 : S_2 = \dfrac{15}{4a_1} : \dfrac{27}{4a_1} = \mathbf{5 : 9}$ である。

$\boxed{\text{注釈}}$

解答が自然数の比になるため，最終的に a_1 はキャンセルされると推測される。いちいち a_1 を書くのは大変なので，まず $a_1 = 1$ で計算して，後から a_1 を書き込むとラクであろう。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面において原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，C_1 の内部にある第 1 象限の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。さらに点 P を中心とする円 C_2 が C_1 上の点 Q において C_1 に内接し，x 軸上の点 R において x 軸に接しているとする。また，極座標が $(1,\ \pi)$ である C_1 上の点を A とし，直線 AQ の y 切片を t とする。

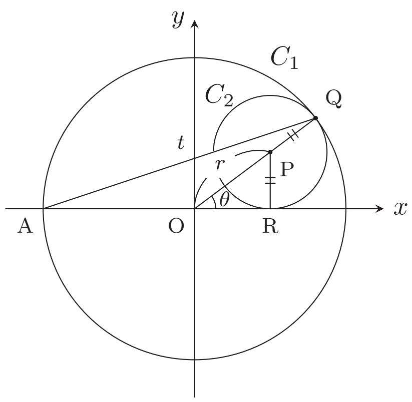
(1) r を θ の式で表すと $r=$ (あ) となり，t の式で表すと $r=$ (い) となる。

(2) 円 C_2 と同じ半径をもち，x 軸に関して円 C_2 と対称な位置にある円 ${C_2}'$ の中心を P$'$ とする。三角形 POP$'$ の面積は $\theta=$ (う) のとき最大値 (え) をとる。条件 $\theta=$ (う) は条件 $t=$ (お) と同値である。

(3) 円 C_1 に内接し，円 C_2 と ${C_2}'$ の両方に外接する円のうち大きい方を C_3 とする。円 C_3 の半径 b を t の式で表すと $b=$ (か) となる。

(4) 3 つの円 C_2，${C_2}'$，C_3 の周の長さの和は $\theta=$ (き) のとき最大値 (く) をとる。

解答



(1) 円 C_2 は点 Q で C_1 に内接しているので

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{OQ}-\mathrm{OP}=1-r$$

また C_2 は点 R で x 軸に接するので

$$\mathrm{PR}=(C_2\text{の半径})=\mathrm{PQ}$$

$$r\sin\theta=1-r$$

$$\therefore\ r=\boldsymbol{\frac{1}{1+\sin\theta}}\ \cdots\cdots①$$

条件より

$$\angle\mathrm{QA}x=\frac{1}{2}\angle\mathrm{QO}x=\frac{\theta}{2}$$

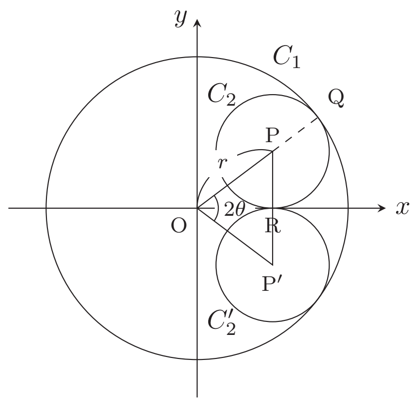
であるから，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ であることに注意すると，①より

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{1+\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{1+2t\cdot\frac{1}{1+t^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1+t^2}{(1+t)^2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
であることは有名なので，①に直接代入してしまってもよい。
上では，導出しながら解答した。

(2)



$\triangle \mathrm{POP}'$ の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{(1+\sin\theta)^2} \qquad (\because\ ①) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos 2\theta(1+\sin\theta)^2-\sin 2\theta\cdot 2(1+\sin\theta)\cos\theta}{(1+\sin\theta)^4} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos 2\theta(1+\sin\theta)-2\sin 2\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3} \\ &= \frac{(1-2\sin^2\theta)(1+\sin\theta)-2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^3} \\ &= \frac{(1-2\sin^2\theta)-2\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2} \\ &= \frac{1-2\sin\theta}{(1+\sin\theta)^2} \end{aligned}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗	極大	↘	

よって，S は $\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ のとき最大値

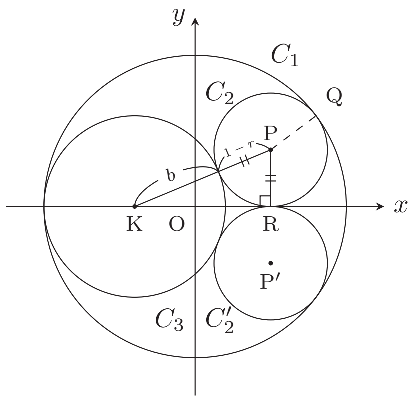
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}} \end{aligned}$$

また，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\begin{aligned} &\sin\frac{\pi}{6} = \frac{2t}{1+t^2} \\ &\frac{1}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ &t^2 - 4t + 1 = 0 \\ \therefore\ \ &t = 2-\sqrt{3} \qquad \left(\because\ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より，} 0 < t < 1\right) \end{aligned}$$

であり，これは逆も成り立つ．
よって，$t = \boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

(3)



円 C_3 の中心を K とする。円 C_3 は円 C_2 に外接するので

$$\begin{aligned} &\mathrm{KP} = (C_2,\ C_3\text{の半径の和}) \\ &\mathrm{KR}^2 + \mathrm{PR}^2 = (b+1-r)^2 \\ &r^2 + 2r(1-r)b\cos\theta + (1-b)^2 = (b+1-r)^2 \\ &(r - r\cos\theta - 2)b = -r(\cos\theta + 1)\ \cdots\cdots② \\ \therefore\ \ &b = \frac{r(\cos\theta+1)}{2+r(\cos\theta-1)} \end{aligned}$$

($\because$ ②で $r - r\cos\theta - 2 = 0$ とすると，$r = 0$ or $\cos\theta = -1$ になり矛盾)

さらに

$$b=\frac{\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)}{2+\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}-1\right)}$$

$$=\frac{\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{2t^2}{1+t^2}}$$

$$=\frac{2}{2(1+t)^2-2t^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2t+1}}$$

(4)　3 つの円の周の長さの和は

$$2\pi(1-r)\times 2+2\pi b$$

$$=2\pi\left(2-2r+\frac{1}{2t+1}\right)$$

$$=2\pi\left(2-2\cdot\frac{1+t^2}{(1+t)^2}+\frac{1}{2t+1}\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{4t}{(1+t)^2}+\frac{1}{2t+1}\right)$$

ここで

$$f(t)=\frac{4t}{(1+t)^2}+\frac{1}{2t+1}$$

とすると

$$f'(t)=4\cdot\frac{(1+t)^2-2t(1+t)}{(1+t)^4}-\frac{2}{(2t+1)^2}$$

$$=\frac{4(1-t)}{(1+t)^3}-\frac{2}{(2t+1)^2}$$

$$=\frac{4(1-t)(2t+1)^2-2(1+t)^3}{(1+t)^3(2t+1)^2}$$

$$=-2\cdot\frac{9t^3-3t^2+3t+1}{(t+1)^3(2t+1)^2}$$

$$=-2\cdot\frac{3t^2(3t+1)-(3t+1)}{(t+1)^3(2t+1)^2}$$

$$=-2\cdot\frac{(3t^2-1)(3t+1)}{(t+1)^3(2t+1)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，すなわち $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のときに最大値

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2}$$

$$=6\sqrt{3}-9$$

をとる。

よって，周の長さの和は $\theta = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ のとき最大値 $\mathbf{6\boldsymbol{\pi}(2\sqrt{3}-3)}$ をとる。

講評

［Ⅰ］［小問集合］(易)
(1) 中線定理の応用 (スチュワートの定理)，(2) 複素数平面，(3) 数Ⅲ微分法・積分法からの出題であった。どれも平易で落とせない。

［Ⅱ］［確率］（やや易）
反復試行の確率に関する出題であった。複雑な事象もなく考えやすかっただろう。ここもできれば落としたくない。

[Ⅲ]［数列，数Ⅲ微分法］（やや易）
接線の交点に関する点列の問題であった。ありふれた題材であり，計算量も例年に比べて少ない。ここもできれば落としたくない。

[Ⅳ]［式と曲線］（標準）
円に内接・外接する円に関する図形量からの出題であった。(3)(4) は要領よく計算することが求められる。計算に詰まったら，他の大問に時間をかけるなどしてトータルで得点を確保したい。

ここ数年の中では最も易しいセットとなった。計算量も大幅に減り，取り組みやすい問題ばかりであった。[Ⅳ] が多少の計算を強いられるが時間内にこなせない量ではない。全体的には数学の得手不得手で大きく差がつくセットとなったであろう。一次突破ラインは 70〜75% 程度か。