日本医科大学（前期）　数学

2023年2月2日実施

[I]

　k を実数の定数とする。1 から 6 の目をもつ大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げて出た目をそれぞれ a，b とするとき，2 次関数 $f_k(x)$ を

$$f_k(x)=\frac{a}{2}x^2+(a+b-k)x-\frac{b}{2}$$

と定める。 O を原点とする xy 平面における放物線 $C: y=f_k(x)$ と x 軸との交点を x 座標の値が小さい順に P，Q とし，C と y 軸との交点を R とする。このとき，△PQR が直角三角形となる確率を $P_0(k)$，直角二等辺三角形となる確率を $P_1(k)$，正三角形となる確率を $P_2(k)$ として，以下の各問いの空欄に適する数値を求めよ。

問 1　確率 $P_0(k)$ は k の値によらずに $P_0(k)=$ ア となる。

問 2　$P_1(k)\neq 0$ となるような k の値を求めると $k=$ イ ，または ウ （ただし， イ < ウ ）となる。
　このとき，$P_1($ イ $)=$ エ ，$P_1($ ウ $)=$ オ となる。

問 3　$P_2(k)\neq 0$ となるような k の値を求めると $k=$ カ ，または キ （ただし， カ < キ ）となる。
　このとき，$P_2($ カ $)=$ ク ，$P_2($ キ $)=$ ケ となる。

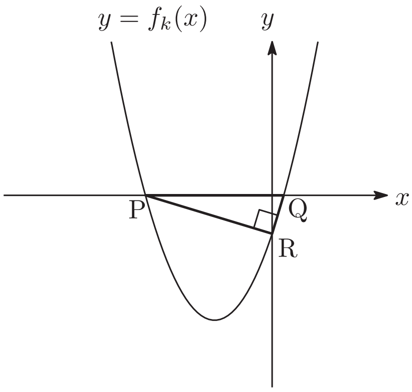
解答

　まず，サイコロ 2 個を同時に投げるとき，出る目の組 $(a,\ b)$ の出方は $6\times 6=36$ 通りあり，それらはすべて同様に確からしい。
放物線 C は下に凸であり，$f_k(0)=-\dfrac{b}{2}<0$ であるから，放物線 C と x 軸は異なる 2 交点をもつので，それを P$(\alpha,\ 0)$，Q$(\beta,\ 0)$（$\alpha<\beta$）とすると，
$\alpha,\ \beta$ は $f_k(x)=0$ の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{2(a+b-k)}{a} & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=-\dfrac{b}{a} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

である。
また，R$\left(0,\ -\dfrac{b}{2}\right)$ である。

問 1　$f_k(0)=-\dfrac{b}{2}<0$ より，P と Q が原点と一致することはないから，
　△PQR が直角三角形となるのは，$\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$，すなわち RP $\perp$ RQ の場合に限られる。



$\overrightarrow{\mathrm{RP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ となる条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = 0$$

$$\left(-\alpha,\ \frac{b}{2}\right) \cdot \left(-\beta,\ \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$\alpha\beta + \frac{b^2}{4} = 0$$

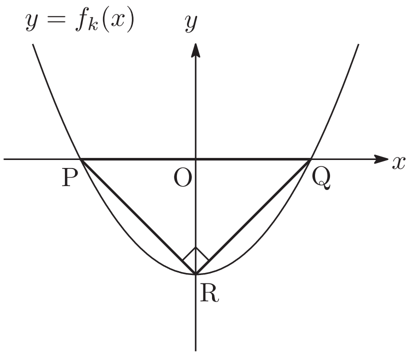
$$-\frac{b}{a} + \frac{b^2}{4} = 0 \qquad (\because\ ①)$$

$$ab = 4$$

$$\therefore\ (a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)\ \cdots\cdots③$$

したがって，△PQR が直角三角形となる確率は $P_0(k) = \dfrac{3}{36} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$

問 2



問 1 を踏まえると，△PQR が直角二等辺三角形となる条件は

$$\begin{cases} \angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ \\ \mathrm{RP} = \mathrm{RQ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ③ \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1) \\ a + b - k = 0 \qquad (\because\ ①) \end{cases}$$

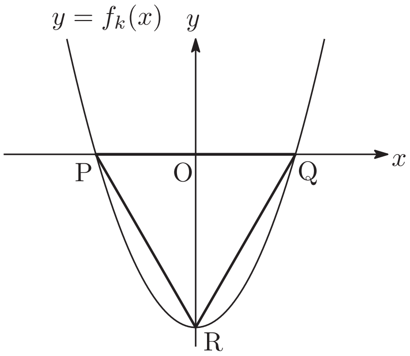
$\therefore\ k = 4$，または 5

であるから，$P_1(k) \fallingdotseq 0$ となるような k の値は $k = \mathbf{4}$，または $\mathbf{5}$ であり，

$$P_1(4) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$$

$$P_1(5) = \frac{2}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$$

問 3



$\triangle$PQR が正三角形となる条件は，

$$\begin{cases} \mathrm{RP} = \mathrm{RQ} \\ \mathrm{PQ} : \mathrm{OR} = 2 : \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\mathrm{OR} = \sqrt{3}\mathrm{PQ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = a + b \qquad (\because ①) \\ 2 \cdot \dfrac{b}{2} = \sqrt{3}(\beta - \alpha) = \sqrt{3}\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = a + b \\ 2 \cdot \dfrac{b}{2} = \sqrt{3}\sqrt{0^2 - 4 \cdot \left(-\dfrac{b}{a}\right)} \qquad (\because ①②) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = a + b \\ ab = 12 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = a + b \\ (a,\ b) = (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2) \end{cases}$$

であるから，$P_2(k) \fallingdotseq 0$ となるような k の値は $k = \mathbf{7}$ または $\mathbf{8}$ であり，

$$P_2(7) = \frac{2}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$$

$$P_2(8) = \frac{2}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$$

注釈

(2)(3) では，C が y 軸に関して対称であることが必要とわかった段階で

$$f_k(x) = \frac{a}{2}x^2 - \frac{b}{2}$$

となるから，C と x 軸との交点の x 座標は $x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}\ (= \alpha,\ \beta)$ であることを用いる，という方法もある。

[Ⅱ]

Oを原点とする xyz 空間において，次の2つの球面 S_1，S_2 が与えられている。

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=1$$

$$S_2 : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$$

S_1 と S_2 の交わりの図形を E とし，E を含む平面 π と xy 平面との交線を l とする。xy 平面において，l を y 軸に関して対称移動して得られる直線を m とする。 l と m の交点を A，m と x 軸の交点を B，l と x 軸の交点を C とし，E 上の点を P として四面体 PABC を考えるとき，以下の各問いに答えよ。問4については導出過程も記せ。

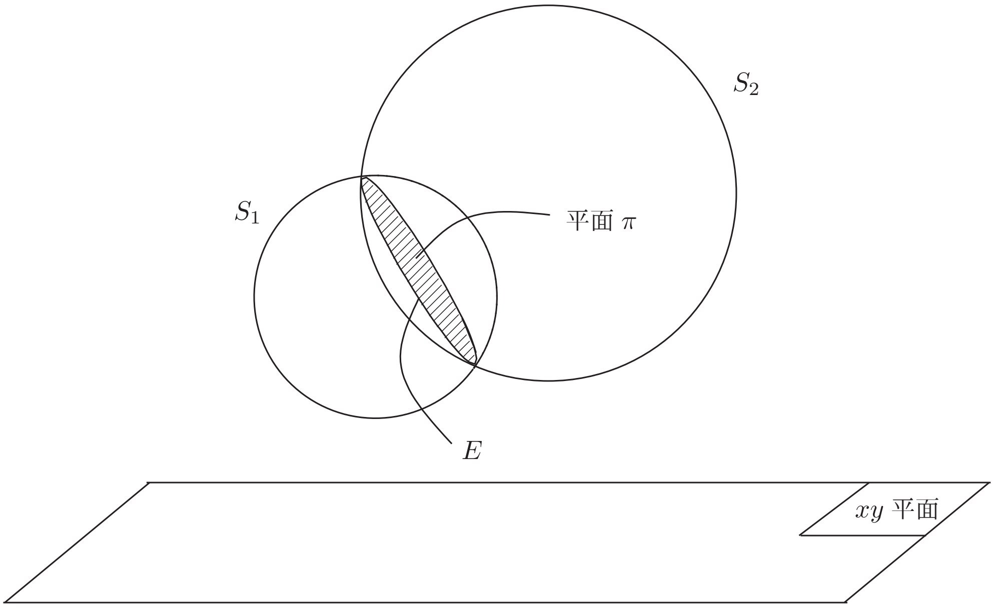
問1　π の方程式を x, y, z を用いて表せ。答えのみでよい。

問2　xy 平面内における l の方程式を x, y を用いて表せ。答えのみでよい。

問3　xy 平面内における m の方程式を x, y を用いて表せ。答えのみでよい。

問4　四面体 PABC の体積 V の最小値を求めよ。また，そのときの P の座標を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$



$$S_1 : x^2+y^2+z^2-4z+3=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$S_2 : x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9=0 \quad \cdots\cdots ②$$

問1　実数 k を用いて，① $+ k \times$ ② で計算される方程式

$$x^2+y^2+z^2-4z+3$$
$$+k(x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9)=0$$

は球面 S_1，S_2 の共有点すべてを通る図形の方程式を表す。

平面 π は，$k=-1$ とすると

$$\boldsymbol{x+2y+z=3} \quad \cdots\cdots ③$$

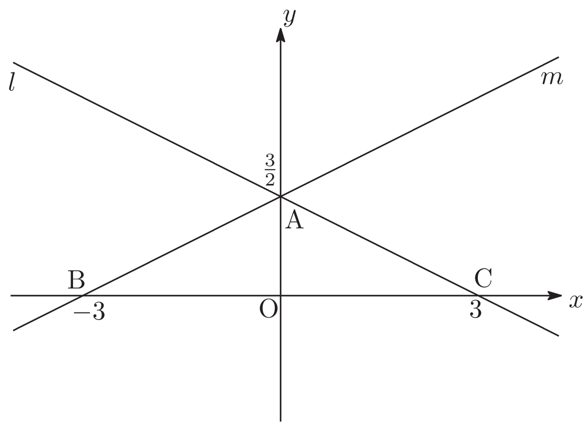
となり，これは平面となるので，これが求める平面の方程式である。

問 2　③に $z=0$ を代入することで

$$\boldsymbol{l : x+2y-3=0}$$

問 3　直線 m は xy 平面において，傾き $\dfrac{1}{2}$ で点 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通る直線なので，

$$\boldsymbol{m : x-2y+3=0}$$



注釈

直線 l において，$x \to -x$ としてもよい。

問 4　A$\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$，B$(-3,\ 0,\ 0)$，C$(3,\ 0,\ 0)$ であるから，三角形 ABC の面積は $6\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$ である。

つまり，四面体 PABC の体積 V は，点 P と xy 平面との距離 h を用いて

$$V=\frac{9}{2}\cdot h\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{2}h \quad \cdots\cdots ④$$

と表せる。つまり，h が最小のとき，V が最小となる。

ここで，図形 E は平面 π と球面 S_1 との共有部分であることから，図形 E は

$$x+2y+z=3 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$x^2+y^2+z^2-4z+3=0 \quad \cdots\cdots ⑥$$

の両方を満たす点の集合である。P$(x,\ y,\ z)$ とし，⑤ と ⑥ から z の取りうる値の範囲を求める。

$$⑤ \iff x=3-2y-z$$

を⑥に代入して

$$(3-2y-z)^2+y^2+z^2-4z+3=0$$

$$\iff 5y^2+4(z-3)y+2z^2-10z+12=0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

y は実数であるから，y の 2 次方程式 ⑦ が実数解をもつ実数 z の条件を調べる。⑦ の判別式を D とすると

$$D/4 \geqq 0 \iff 4(z-3)^2-5(2z^2-10z+12)\geqq 0$$

$$\iff 3z^2-13z+12 \leqq 0$$

$$\iff (3z-4)(z-3)\leqq 0$$

$$\iff \frac{4}{3}\leqq z \leqq 3$$

つまり，点 P が xy 平面に最も近づくときの距離は　$\dfrac{4}{3}$

よって，h の最小値が $\dfrac{4}{3}$ であるから，V の最小値は④より

$$V = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \mathbf{2}$$

$z = \dfrac{4}{3}$ を ⑤, ⑥ に代入して

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{5}{3} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

これを解いて　$(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ つまり，V 最小となる点 P の座標は

$$\left(\mathbf{\frac{1}{3}},\ \mathbf{\frac{2}{3}},\ \mathbf{\frac{4}{3}}\right)$$

[Ⅲ]

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\left(\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1\right)^{n+2}$ の展開式の x^3 の係数を A_n とするとき，以下の問 1 〜問 3 の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　$A_n=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(n+\boxed{\text{ウ}}\right)\left(n+\boxed{\text{エ}}\right)\left(n+\boxed{\text{オ}}\right)$（ただし，$\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$）である。

問 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

問 3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

問 4　問 1 で求めた A_n に関して $a_n=n+\boxed{\text{ウ}}$，$b_n=n+\boxed{\text{エ}}$，$c_n=n+\boxed{\text{オ}}$ とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

を求めよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ を証明なしに用いてよい。

解答

問 1　$\left(\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1\right)^{n+2}$ の展開項は一般的に

$$\frac{(n+2)!}{p!q!r!}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^p\left(\frac{3}{2}x\right)^q\cdot 1^r=\frac{(n+2)!}{p!q!r!}\left(\frac{3}{2}\right)^{p+q}x^{2p+q}$$

と表すことができる。ただし，$p,\ q,\ r$ は $p+q+r=n+2$ を満たす 0 以上の整数である。

x^3 の係数を考えるので，$2p+q=3$ を満たす $p,\ q$ について考えると，これを満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q)$ は

$$(p,\ q)=(0,\ 3),\ (1,\ 1)$$

である。$p+q+r=n+2$ も踏まえると

$$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ n-1),\ (1,\ 1,\ n)$$

である。したがって，求める x^3 の係数 A_n は

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{(n+2)!}{0!3!(n-1)!}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{(n+2)!}{1!1!n!}\left(\frac{3}{2}\right)^2\\&=\frac{(n+2)(n+1)n}{6}\cdot\frac{27}{8}+(n+2)(n+1)\cdot\frac{9}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{9}{16}(n+1)(n+2)(n+4)}\end{aligned}$$

問 2　部分和を計算したのち，極限を計算する。十分に大きな n に対して，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k &= \frac{9}{16}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)\{(k+3)+1\} \\
&= \frac{9}{16}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)\} \\
&= \frac{9}{16}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-k(k+1)(k+2)(k+3)\}\right. \\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{3}\{(k+1)(k+2)(k+3)-k(k+1)(k+2)\}\right] \\
&= \frac{9}{16}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[\frac{1}{4}\{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\}\right. \\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{3}\{(n+1)(n+2)(n+3)-1\cdot 2\cdot 3\}\right] \\
&= \frac{9}{16}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)-\frac{24}{n^4}\right\}\right. \\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{3n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)-\frac{6}{n^3}\right\}\right] \\
&= \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{9}{64}}
\end{aligned}
$$

注釈

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)(k+4)$ を展開して，$\sum$ の公式を利用して計算してもよい。実際の本番では答えのみ求めればよいので，n^4 の項だけ計算すればよく，答えを出すだけなら $\sum$ の公式を利用した方が早いだろう。

別解

自然数 k に対して

$$k^3 < (k+1)(k+2)(k+4) < (k+4)^3$$

が成り立つので，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として足し合わせて $\dfrac{1}{n^4}$ を乗ずると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 < \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)(k+4) < \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+4)^3 \\
\iff &\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 < \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k < \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k+4)^3
\end{aligned}
$$

ここで

$$(\text{左辺}) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 \to \frac{9}{16}\int_0^1 x^3dx = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{64}\quad (n\to\infty)$$

$$(\text{右辺}) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{k=5}^{n+4}k^3 = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=5}^{n+4}\left(\frac{k}{n}\right)^3 \to \frac{9}{16}\int_0^1 x^3dx = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{64}\quad (n\to\infty)$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k = \boldsymbol{\frac{9}{64}}$$

注釈

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ や $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+4)^3$ は $\sum$ の公式を用いて計算してもよい。

問 3　$\dfrac{1}{A_k}$ を部分分数分解すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_k} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k+4}\\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{k+1}-\frac{3}{k+2}+\frac{1}{k+4}\right)\end{aligned}$$

であるから，十分に大きな n に対して

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k} &= \frac{8}{27}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k+1}-\frac{3}{k+2}+\frac{1}{k+4}\right)\\ &= \frac{8}{27}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)\right\}\\ &= \frac{8}{27}\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}-\frac{2}{n+4}\right)\right\}\\ &= \frac{8}{27}\left(2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{10}{81}}\end{aligned}$$

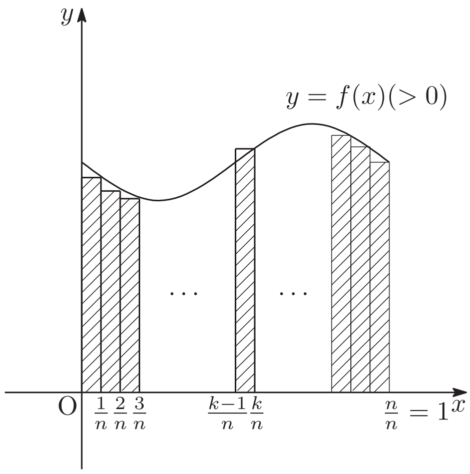
問 4　与式が正であることより，自然対数をとって計算する。

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}} &= \log\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(3n+7)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n^2}\right)^n\left\{\frac{(3n+7)!}{n!}\right\}\\ &= \frac{1}{n}\log\frac{1}{n^{2n}}\{(3n+7)(3n+6)\cdots(n+2)(n+1)\}\\ &= \frac{1}{n}\log\frac{1}{n^{2n+7}}\{(3n+7)(3n+6)\cdots(n+2)(n+1)\}\cdot n^7\\ &= \frac{1}{n}\log\left(\frac{3n+7}{n}\cdot\frac{3n+6}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)+\frac{1}{n}\log n^7\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n+7}\log\frac{k}{n}+7\cdot\frac{\log n}{n}\\ &\to \int_1^3\log x\,dx+0\quad(n\to\infty)\quad\left(\because\ \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0,\ \text{※参考参照}\right)\\ &= \Big[x(\log x-1)\Big]_1^3\\ &= 3\log 3-2\\ &= \log\frac{27}{e^2}\end{aligned}$$

よって，求める極限値は，log を外して考えて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{27}{e^2}}$$

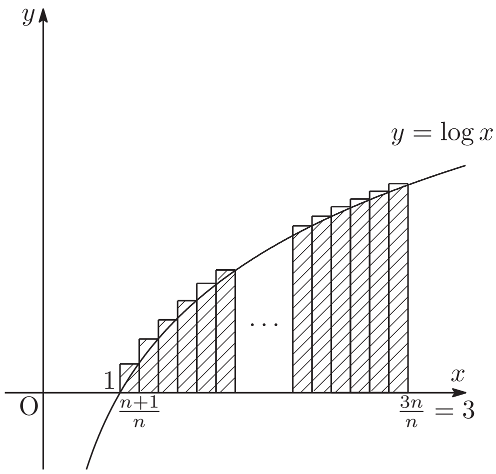
(参考)　区分求積法の積分区間については次のように考えている。区間については，記述答案でも触れておくこと。



区分求積法について，上図の斜線部分の面積は $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ であることより，$n\to\infty$ のとき，

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)dx$ となることが示される。ここで，$\sum$ の区間は $\dfrac{k}{n}$ に依存することがわかるので，本問の $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n+7}$ では区間 $\left[\dfrac{n+1}{n},\ \dfrac{3n+7}{n}\right]$，すなわち $n\to\infty$ として区間 $[1,\ 3]$ であることがわかる。

また，直接図を用いてイメージを説明すると，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n+7}\log\dfrac{k}{n}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\log\dfrac{k}{n}+\dfrac{1}{n}\sum_{k=3n+1}^{3n+7}\log\dfrac{k}{n}$ であり，第 1 項目について，



であるから，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n}\log\dfrac{k}{n}\to\int_1^3\log x dx$（$n\to\infty$）となることがわかる。なお，第 2 項目については

$$\frac{1}{n}\sum_{k=3n+1}^{3n+7}\log\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\log\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3+\frac{7}{n}\right)$$
$$\to 0\quad(n\to\infty)$$

である。以上から，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n+7}\log\dfrac{k}{n}\to\int_1^3\log x dx$（$n\to\infty$）が言える。

※この紙面上では図の関係上，あえて $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n+7}\log\dfrac{k}{n}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\log\dfrac{k}{n}+\dfrac{1}{n}\sum_{k=3n+1}^{3n+7}\log\dfrac{k}{n}$ と分けてい

る。実際の答案では $\dfrac{n+1}{n}$ から $\dfrac{3n+7}{n}$ の図を描いてまとめて説明してよい。

[Ⅳ]

O を原点とする xyz 空間において，xy 平面（平面 $z=0$）内の曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2,\ 0)$（ただし，$0<t<1$）における C の接線 l と直線 $x=1$ との交点を Q とする。また，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2,\ t-t^2)$（ただし，$0<t<1$）とする。$t$ が $0<t<1$ を満たしながら動くとき三角形 PQR が通過してできる立体に，線分 OA と点 B を付け加えた立体を K とし，その体積を V とおく。$0 \leqq a \leqq 1$ を満たす a に対して，K と平面 $x=a$ の共通部分からなる平面図形 $K(a)$ の面積を $S(a)$ とおく。ただし，1 点あるいは線分の面積は 0 とみなして考える。このとき，以下の各問いに答えよ。問 3〜問 5 については導出過程も記せ。

問 1　xy 平面内における接線 l の方程式を x，y，t を用いて表せ。また，Q の座標を Q(1, $\boxed{\text{ア}}$, 0) と表すとき，$\boxed{\text{ア}}$ に入る適切な式を t を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　xy 平面（平面 $z=0$）内の点 $(a,\ b,\ 0)$ を $0<a<1$，かつ $0<b \leqq a^2$ を満たすようにとる。このとき，点 $(a,\ b,\ 0)$ が線分 PQ 上の点となるように $t=t_{a,b}$ $(0<t<1)$ の値を定め，$t_{a,b}$ を a と b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　$0 \leqq a \leqq 1$ を満たす a に対して，平面図形 $K(a)$ が，次の 1 つの等式と 2 つの不等式

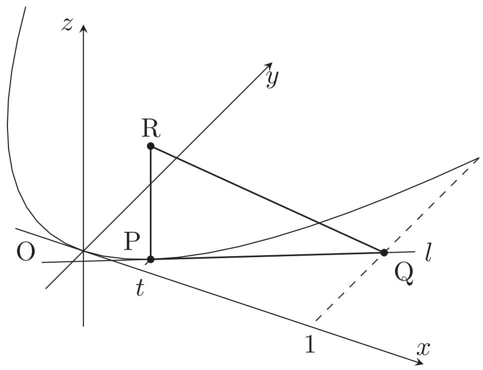
$$x=a,\ 0 \leqq y \leqq a^2,\ 0 \leqq z \leqq \boxed{\text{イ}}$$

により表される平面図形と一致するように，$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を y と a を用いて表せ。

問 4　$S(a)$ を求めよ。

問 5　V を求めよ。

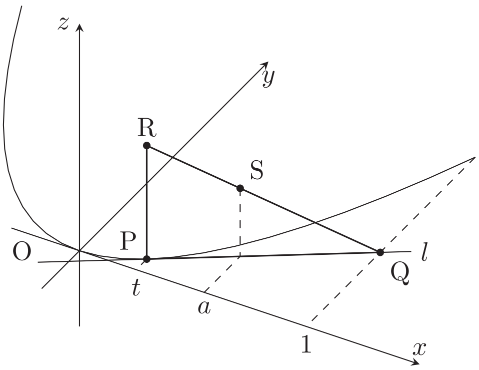
解答



問 1　$(x^2)'=2x$ であるため，接線の方程式は $y=2t(x-t)-t^2$，すなわち $\boldsymbol{y=2tx-t^2}$ である。
$x=1$ を代入することで $y=\boldsymbol{2t-t^2}$ を得る。

問 2　$(a,\ b)$ を $y=2tx-t^2$ に代入し整理すると $t^2-2ta+b=0$ である。これを解くと $t=a\pm\sqrt{a^2-b}$ となる。
条件より $(a,\ b,\ 0)$ は線分 PQ 上にあるため，$t_{a,b} \leqq a$ である。よって $t_{a,b}=\boldsymbol{a-\sqrt{a^2-b}}$ である。

問 3　$S(a,\ b,\ c)$ を K の点とする。
a，b を固定したとき，c が最大値を取るのは，S が線分 RQ 上にあるときである。
$T(a,\ b,\ 0)$ とする。T は線分 PQ 上にあるため，問 2 より $t=a-\sqrt{a^2-b}$ とできる。
3 点 P，Q，R を含む平面上での断面を考えると次の図のようになる。



よって，

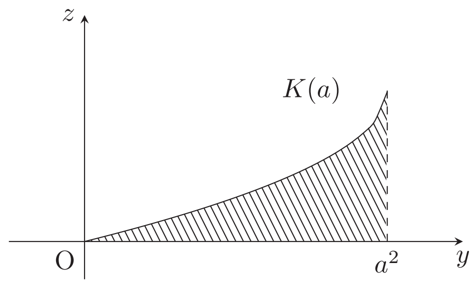
$$c=(t-t^2)\frac{1-a}{1-t}=t(1-a)=(1-a)(a-\sqrt{a^2-b})$$

である。b を y，c を z に置き換えることで $0 \leqq z \leqq \boldsymbol{(1-a)(a-\sqrt{a^2-y})}$ である。

注釈

a，b を固定すると，問 2 から $t_{a,b}$ が**一意**に定まるため「他の t で線分 QR が $x=a$，$y=b$ を通ることがあるのではないだろうか？」と疑う必要はない。

問 4　平面 $x=a$ 上で $f(y)=(1-a)(a-\sqrt{a^2-y})$ によって定まる曲線と y 軸で囲まれた図形が $K(a)$ である。

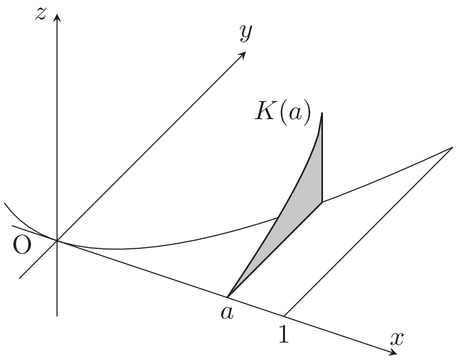


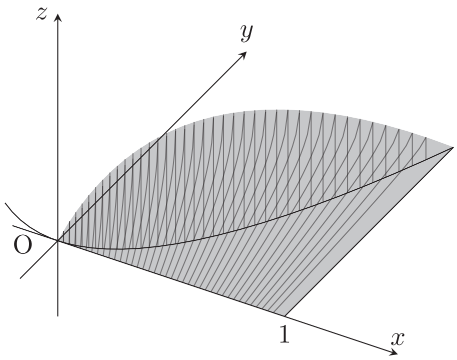
よって

$$\begin{aligned}
S(a)&=\int_0^{a^2}(1-a)(a-\sqrt{a^2-y})dy\\
&=a^3(1-a)-(1-a)\int_0^{a^2}\sqrt{a^2-y}dy\\
&=a^3(1-a)-(1-a)\Big[-\frac{2}{3}(a^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{a^2}\\
&=a^3(1-a)-\frac{2}{3}a^3(1-a)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3(1-a)}
\end{aligned}$$

である。

問 5





$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 S(a)da \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}a^3(1-a)da \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{5}a^5\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{60}}.
\end{aligned}
$$

注釈

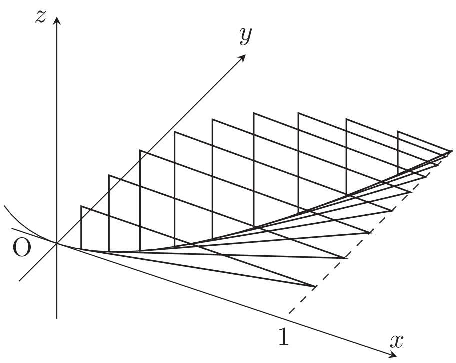
第一種オイラー積分の公式を用いると

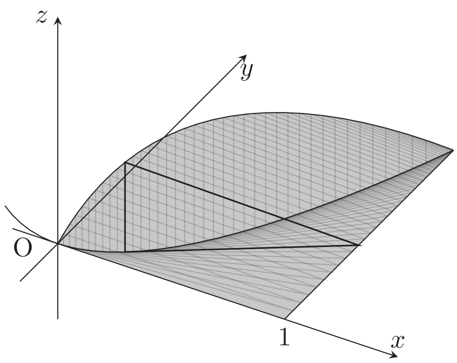
$$\int_0^1 \frac{1}{3}a^3(1-a)da = \frac{1}{3}\frac{3!\cdot 1!}{5!} = \frac{1}{60}$$

と計算することもできる。

参考

実際に立体を描くと次のようになる。





講評

[Ⅰ]［確率，二次関数］（やや易）
二次関数と x 軸，y 軸の交点を題材とした確率からの出題であった。問 2 のアイデアがそのまま問 3 に活かせる。うまく得点したい。

[Ⅱ]［空間図形］（やや易）
空間における平面の方程式や体積からの出題であった。一見イメージしにくい空間図形の問題であるが，丁寧に計算をすれば解くことができる。問 1〜3 は答えのみで良いので，ある程度の目星を付けて解くのもよいだろう。

[Ⅲ]［多項定理，極限，数Ⅲ積分法］（標準）
多項定理を元に様々な極限の計算をさせる出題であった。数列の和の計算や区分求積などをうまく活用して解いていきたい。YMS 生は問 2 は冬期特別講義 (天国) で，問 3 は 6 月模試 (聖マリ模試) で，問 1，4 は本科テキストで類似の問題を扱っている。

[Ⅳ]［数Ⅲ積分法の応用］（やや難）
三角形が通過する領域の体積に関する出題であった。非常にイメージが難しい立体であるが，セオリー通り断面の面積を考えることになる。問 2 より $(a,b,0)$ に対応する t が一意に定まることがポイントである。

難易度は大きく変わらないが，例年より小問数が増加してその分解きやすく易化した印象である。大問 4 など計算量も減った。例年と同じく問題の選択によって大きく差が出ただろう。大問 1 と 2 は着実に解き，大問 3 の問 1 や大問 4 の問 1 など，地道に小問で得点を重ねることも重要であろう。50〜60 %が一次突破ラインか。

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録