医学部専門予備校
YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東京医科大学　数学

2023年 2月8日実施

第 1 問

(1)　ウィルス X に対して陽性または陰性と判定する検査 A に関して次の 2 つのことがわかっている。

(i)　ウィルス X に感染している人に検査 A を実施すると，80% の確率で陽性と判定される。

(ii)　ウィルス X に感染していない人に検査 A を実施すると，70% の確率で陰性と判定される。

ある集団において，40% の人がウィルス X に感染していることがわかっている。この集団の人に対して検査 A を行って陽性と判定されたとき，実際にウィルス X に感染している条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k \cdot {}_n\mathrm{C}_k)$ が 10000 を超えるような最小の正の整数 n は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(3)　i を虚数単位とする。$(1+i)^n$ が正の実数になるような 3 桁の整数 n は $\boxed{\text{キクケ}}$ 個である。

(4)　$f(x) = (1+x)\log(3+x) - (1+x)\log(5+x)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{\text{コサ}}$ である。

解答

(1)　ウイルス X に感染している事象を X，検査 A によって陽性と判定される事象を Y とおく。

条件より $P(X) = 0.4$ である。

ウイルス X に感染している人が検査 A を受けると，80 %の確率で陽性と判定されるため，$P(X \cap Y) = 0.4 \times 0.8 = 0.32$ である。

ウイルス X に感染していない人が検査 A を受けると，30 %の確率で陽性と判定されるため，$P(X \cap Y) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$ である。

$P(Y) = P(X \cap Y) + P(\overline{X} \cap Y) = 0.5$ であるため，求める条件付き確率は $P_Y(X) = \dfrac{0.32}{0.5} = \mathbf{\dfrac{16}{25}}$ である。

(2)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k \cdot {}_n\mathrm{C}_k) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k} \\
&= n \cdot 2^{n-1} \quad (\because \text{二項定理}) \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

である。

$n=10$ のとき $n\cdot 2^{n-1}=10\cdot 512=5120<10000$ である。一方 $n=11$ のとき $n\cdot 2^{n-1}=11\cdot 1024=11264>10000$ である。$n\cdot 2^{n-1}$ が単調増加であることと併せて，答えは $n=\mathbf{11}$ である。

別解

二項定理より，$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k$ である。x で微分して，$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k kx^{k-1}$ であるから，$x=1$ を代入して，①を得る。

(3)　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ である。ド・モアブルの定理より

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

である。$(1+i)^n$ が正の実数となるのは $\cos\frac{n\pi}{4}=1$，すなわち n が 8 の倍数のときである。よって求める値は $\left[\frac{999}{8}\right]-\left[\frac{99}{8}\right]=124-12=\mathbf{112}$ である。

(4)　$f(x)$ をまとめると

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+x)\{\log(3+x)-\log(5+x)\}\\
&=(1+x)\log\left(\frac{3+x}{5+x}\right)\\
&=\log\left(\frac{3+x}{5+x}\right)^{1+x}\\
&=\log\left(1-\frac{2}{5+x}\right)^{1+x}
\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}f(x)&=\lim_{x\to\infty}\log\left(1-\frac{2}{5+x}\right)^{1+x}\\
&=\lim_{y\to\infty}\log\left(1-\frac{2}{y}\right)^{y-4} &&(5+x=y\text{ と置き換えた})\\
&=\lim_{y\to\infty}\log\left(1-\frac{2}{y}\right)^{y}\left(1-\frac{2}{y}\right)^{-4}\\
&=\lim_{y\to\infty}\log\left\{\left(1-\frac{2}{y}\right)^{-\frac{y}{2}}\right\}^{-2}\left(1-\frac{2}{y}\right)^{-4}\\
&=\log(e^{-2}\cdot 1^{-4})\\
&=\mathbf{-2}
\end{aligned}$$

を得る。

第 **2** 問

袋の中に，1 から 8 までの番号が書かれたカードが 2 枚ずつ，合計 16 枚入っている。この袋から同時に 3 枚のカードを取り出し，取り出したカードに書かれた数の積を M，和を S とする。

(1)　M が素数となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。

(2)　M が 4 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。

(3)　M が 8 の倍数であるとき，$S < M$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{キクケ}}{\boxed{コサシ}}$ である。

解答

袋の中から 3 枚のカードを取り出す方法は ${}_{16}\mathrm{C}_3 = 560$(通り) で同様に確からしい。

(1)　M が素数となるのは，1 を 2 枚，素数を 1 枚取り出すときである。今回現れる素数は 2，3，5，7 の 4 通りである。よって確率は $\dfrac{1 \cdot 8}{560} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{70}}$ である。

(2)　余事象を考える。

M が 4 の倍数とならない場合は「奇数を 3 枚取り出すとき」と「2，6 を 1 枚引き，奇数を 2 枚取り出すとき」の 2 パターンである。

(i)　奇数を 3 枚取り出すとき，カードの引き方は ${}_{8}\mathrm{C}_3 = 56$ 通りである。

(ii)　2，6 を 1 枚取り出し，奇数を 2 枚取り出すとき，カードの引き方は $4 \times {}_{8}\mathrm{C}_2 = 112$ 通りである。

よって，M が 4 の倍数とならないカードの取り出し方は 168 通りである。ゆえに M が 4 の倍数となる確率は $1 - \dfrac{168}{560} = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$ である。

(3)　M が 8 の倍数となる事象を A，$S < M$ となる事象を B とする。

(2) 同様，余事象を考える。

(2) で M が 4 の倍数ではないときを求めたため，M が 4 の倍数であるが，8 の倍数ではない組み合わせを考えればよい。場合分けは「4 を 1 枚取り出し，奇数を 2 枚取り出すとき」と「2，6 を 2 枚取り出し，奇数を 1 枚取り出すとき」の 2 パターンである。

(i)　4 を 1 枚取り出し，奇数を 2 枚取り出すとき，カードの取り出し方は $2 \cdot {}_{8}\mathrm{C}_2 = 56$ 通りである。

(ii)　2，6 を 2 枚取り出し，奇数を 1 枚取り出すとき，カードの取り出し方は ${}_{4}\mathrm{C}_2 \cdot 8 = 48$ 通りである。

よって，M が 8 の倍数とならないカードの取り出し方はは $168 + 56 + 48 = 272$ 通りである。ゆえに M が 8 の倍数となる場合の数は $560 - 272 = 288$ 通りで，$P(A) = \dfrac{288}{560}$ である。

次に $S < M$ となる場合の数を計算する。これも余事象を考える。

取り出したカードの数字を a，b，c $(a \leqq b \leqq c)$ とおく。$S \geqq M$ を満たすとして考える。

a，b を固定し，a，b のとり得る値を考える。$S \geqq M$ に a，b，c を代入すると $a + b + c \geqq abc$ となる。

$(a,\ b) \fallingdotseq (1,\ 1)$ のとき，c について解くと $c \leqq \dfrac{a+b}{ab-1}$ となる。$c \geqq 1$ であるため，$\dfrac{a+b}{ab-1} \geqq 1$ である必要がある。

式を変形すると $ab - a - b + 1 \leqq 2$，すなわち $(a-1)(b-1) \leqq 2$ を得る。条件に注意すると，$(a,\ b)$ のとり得る値は $(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 2)$ となる。

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき，$S=c+2>c=M$ である。よって c は任意の値をとり得る。
$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき，$c=2,\ 3$ のいずれかをとり得る。どの場合も M が 8 の倍数となることはない。
$(a,\ b)=(2,\ 2)$ のとき，$a\leqq b\leqq c$ を満たす c は存在せず，M が 8 の倍数となることはない。

以上より，M が 8 の倍数となり，$S\geqq M$ である場合は $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 8)$ のときのみである。ゆえに，M が 8 の倍数となり，$S<M$ となる場合の数は $288-2=286$ 通りで，$P(A\cap B)=\dfrac{286}{560}$ である。
以上より求める条件付き確率は $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{286}{288}=\dfrac{\mathbf{143}}{\mathbf{144}}$ である。

別解

M が 8 の倍数となる事象を A，$S<M$ となる事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。
ここで

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

であり，$n(A\cap B)$ はベン図を考えて，$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\overline{B})$ であるので，$n(A)$ と $n(A\cap\overline{B})$ を考える。
まず，$n(A\cap\overline{B})$ は 8 の倍数，かつ $S\geqq M$ となる事象の場合の数であるから，その組合せは

$$(1,\ 1,\ 8)$$

のみであり，8 のカードが 2 枚あることに注意して，$n(A\cap\overline{B})=2$(通り) である。
続いて，$n(A)$ は 8 の倍数となる場合の数であるから，これらの組み合わせを考えると次のようになる。

$(1,\ 1,\ 8)$ $(1,\ 2,\ 4)$ $(1,\ 2,\ 8)$ $(1,\ 3,\ 8)$ $(1,\ 4,\ 4)$ $(1,\ 4,\ 6)$ $(1,\ 4,\ 8)$ $(1,\ 5,\ 8)$
$(1,\ 6,\ 8)$ $(1,\ 7,\ 8)$ $(1,\ 8,\ 8)$
$(2,\ 2,\ 4)$ $(2,\ 2,\ 6)$ $(2,\ 2,\ 8)$ $(2,\ 3,\ 4)$ $(2,\ 3,\ 8)$ $(2,\ 4,\ 4)$ $(2,\ 4,\ 5)$ $(2,\ 4,\ 6)$
$(2,\ 4,\ 7)$ $(2,\ 4,\ 8)$ $(2,\ 5,\ 8)$ $(2,\ 6,\ 6)$ $(2,\ 6,\ 8)$ $(2,\ 7,\ 8)$ $(2,\ 8,\ 8)$
$(3,\ 3,\ 8)$ $(3,\ 4,\ 4)$ $(3,\ 4,\ 6)$ $(3,\ 4,\ 8)$ $(3,\ 5,\ 8)$ $(3,\ 6,\ 8)$ $(3,\ 7,\ 8)$ $(3,\ 8,\ 8)$
$(4,\ 4,\ 5)$ $(4,\ 4,\ 6)$ $(4,\ 4,\ 7)$ $(4,\ 4,\ 8)$ $(4,\ 5,\ 6)$ $(4,\ 5,\ 8)$ $(4,\ 6,\ 6)$ $(4,\ 6,\ 7)$
$(4,\ 6,\ 8)$ $(4,\ 7,\ 8)$ $(4,\ 8,\ 8)$
$(5,\ 5,\ 8)$ $(5,\ 6,\ 8)$ $(5,\ 7,\ 8)$ $(5,\ 8,\ 8)$
$(6,\ 6,\ 8)$ $(6,\ 7,\ 8)$ $(6,\ 8,\ 8)$
$(7,\ 7,\ 8)$ $(7,\ 8,\ 8)$

したがって，それぞれの数字が書かれたカードが 2 枚ずつあることに注意すると

$$n(A)=24\times 2+30\times 2^3=288(\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{n(A)-n(A\cap\overline{B})}{n(A)}=\frac{288-2}{288}=\frac{\mathbf{143}}{\mathbf{144}}$$

別解

先ほどの別解で 8 の倍数となるパターンを箇条書きにしたが計算で M が 8 の倍数となる場合の数を求めてもよい。M が 8 の倍数となるパターンは
(a)　8 を 1 回，奇数を 2 回取り出すとき
(b)　4 を 1 回，2，6 を 1 回，奇数を 1 回取り出すとき
(c)　8 を 1 回，2，4，6 を 1 回，奇数を 1 回取り出すとき
(d)　4 を 2 回。奇数を 1 回取り出すとき
(e)　8 を 2 回。奇数を 1 回取り出すとき

(f)　偶数を 3 回取り出すとき

である。それぞれについて場合の数を求める。

(a)　$2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 = 56$ 通り

(b)　$2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$ 通り

(c)　$2 \cdot 6 \cdot 8 = 96$ 通り

(d)　$1 \cdot 8 = 8$ 通り

(e)　$1 \cdot 8 = 8$ 通り

(f)　${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通り

以上まとめると $56 + 64 + 96 + 8 + 8 + 56 = 288$ 通りになる。以降は同じように解けばよい。

第 3 問

座標空間上に 4 点 O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，B(1, 2, 0)，C(0, 2, 1) があり，O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。実数 s，t，u に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

で定まる点 P について考える。

(1)　四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　s，t，u が，$0 \leqq s \leqq 2$，$0 \leqq t \leqq 2$，$0 \leqq u \leqq 2$ を満たすように動くとき，P が動く部分の体積は $\boxed{\text{イウ}}$ である。

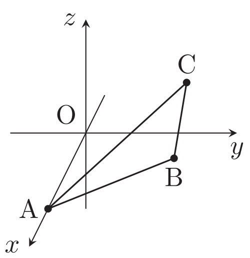
(3)　s，t，u が，$s+t+u=1$，$0 \leqq s$，$0 \leqq t$，$0 \leqq u$ を満たすように動く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

解答

(1)　三角形 OAB は xy 平面上にあるため，四面体 OABC の底面を三角形 OAB と見たとき，高さは C の z 座標である。よって体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot 1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = \mathbf{1}$$

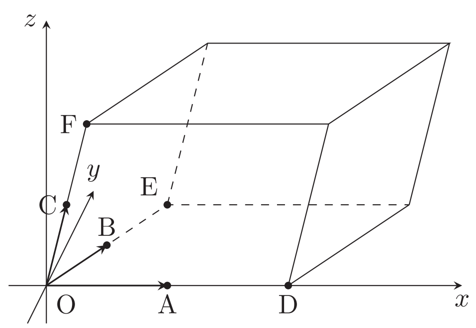
である。



(2)　D(6, 0, 0)，E(2, 4, 0)，F(0, 4, 2) とおく。四面体 ODEF は四面体 OABC と相似であり，相似比は 2 : 1 であるため，体積は 8 である

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OE}} + r'\overrightarrow{\mathrm{OF}} \quad (0 \leqq s',\ t',\ r' \leqq 1)$$

であるため，点 P の動く範囲は下図の平行六面体である。



よって体積は $6\times 8 = \mathbf{48}$ である。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を成分表示で表すと $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ 2t+2u \\ u \end{pmatrix}$ である。

平面 ABC に直交する単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めると $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ となる。ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{n})\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\{(3s+t)+(2t+2u)+u\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|(3s+3t+3u)\\ &= \frac{6}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\end{aligned}$$

である。一方 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\theta$ であるため

$$\frac{6}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\theta$$

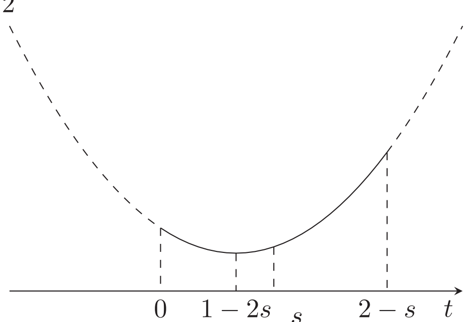
である。よって $\cos\theta = \dfrac{6}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$ である。よって $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値を求めればよい。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= (3s+t)^2+(2t+2u)^2+u^2\\ &= (3s+t)^2+(4-2s)^2+(2-s-t)^2\\ &= 14s^2+2t^2+8st-20s-4t+20\\ &= 2t^2+(8s-4)t+14s^2-20s+20\\ &= 2\{t^2+4(2s-1)t\}+14s^2-20s+20\\ &= 2(t+2s-1)^2+6s^2-12s+18\\ &= 2(t+2s-1)^2+6(s-1)^2+12\end{aligned}$$

である。$M = 2(t+2s-1)^2+6(s-1)^2+12$ とおく。条件より $0 \leqq s+t \leqq 2$，$0 \leqq s,\ t \leqq 2$ である。ゆえに $-1 \leqq 2s-1 \leqq 1$ である。

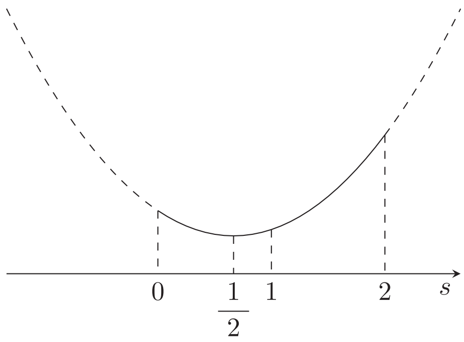
s を固定し，M を t の二次関数と見なしたとき，M は $t=-2s+1$ を軸とする。t^2 の係数から，$t=-2s+1$ のとき最小値を取る。また t の範囲は $0 \leqq t \leqq 2-s$ となる。

$s \geqq 0$ に注意すると，$1-2s \leqq \dfrac{2-s}{2}$ であるため，M は s の値に寄らず，$t=2-s$ のとき最大値を取る。



$t=2-s$ を代入すると $M = 2(s+1)^2+6(s-1)^2+12 = 8\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+18$ となる。M の二次関数と考えると，軸を $s=\dfrac{1}{2}$ に持ち，下に凸である。また，s の範囲は $0 \leqq s \leqq 2$ である。

$\dfrac{1}{2} < 1 = \dfrac{1}{2} \times 2$ より M は $s = 2$ のとき最大値を取る。$u = 2 - (2+0) = 0$ であるため，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値は $s = 2,\ t = u = 0$ のとき 6 となる。よって $\cos\theta$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ となる。



$\boxed{\text{別解}}$

四面体 OABC の底面を三角形 ABC と見たとき，高さは OH である。

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるため，

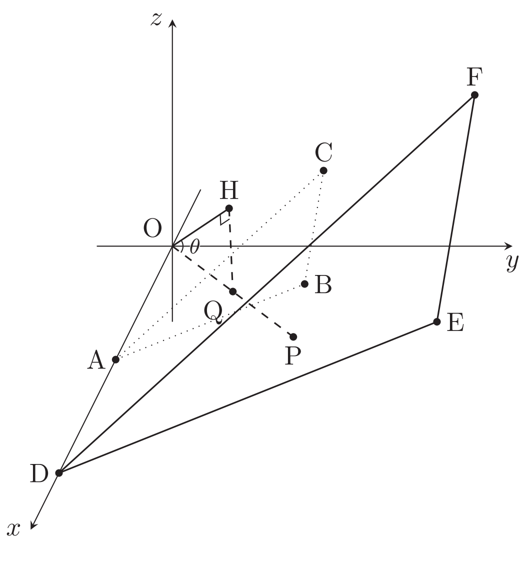
$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot 2 - 4} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。ゆえに $\mathrm{OH} = \dfrac{3\cdot 1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ である。

線分 OP と平面 ABC の交点を Q とおく。平面 ABC と直線 OH は直交するため，三角形 OQH は直角三角形であり，特に $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OQ}} = \dfrac{2\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\mathrm{OP}}$ である。よって OP の最大値を求めればよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OE}} + r'\overrightarrow{\mathrm{OF}} \quad (s' + t' + r' = 1,\ s',\ t',\ r' \geqq 0)$$

であるため，点 P は三角形 DEF の内部および周を動く。よって OP が最大値を取るのは，点 P が 点 D，点 E，点 F のいずれかのとき。$\mathrm{OD} = 6$，$\mathrm{OE} = \mathrm{OF} = 2\sqrt{5}$ であるため，点 P が 点 D と一致するとき，$\cos\theta$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ をとる。



第 4 問

$x > -1$ において定義された関数 $f(x) = (x-1)\log(x+1)$ と，曲線 $C : y = f(x)$ について考える。

(1)　$f''(x) = \dfrac{x + \boxed{\text{ア}}}{\left(x + \boxed{\text{イ}}\right)^2}$ である。

$f'(x) = 0$ を満たす実数 x は $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。

(2)　C と x 軸によって囲まれた部分の面積は，$\boxed{\text{エ}}\log 2 - \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3)　点 $(1,\ f(1))$ における C の接線と，C および y 軸によって囲まれてできる部分の面積は，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} - \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\log 2$ である。

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \log(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \\
&= \log(x+1) + 1 - \frac{2}{x+1} \\
f''(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{x+3}{(x+1)^2}}
\end{aligned}
$$

$x > -1$ において $f''(x) > 0$ であるから，$f'(x)$ は $x > -1$ において単調増加。

加えて，$\displaystyle\lim_{x \to -1+0} f'(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$ であることを併せると，

$y = f'(x)\ (x > -1)$ のグラフは x 軸とただ 1 つの共有点を持つ。

すなわち，$f'(x) = 0$ を満たす実数 x は **1 個** である。

別解

$f'(x) = 0$ となるのは

$$
\log(x+1) + 1 - \frac{2}{x+1} = 0
$$

$$
\therefore\quad \log(x+1) + 1 = \frac{2}{x+1} \quad \cdots\cdots①
$$

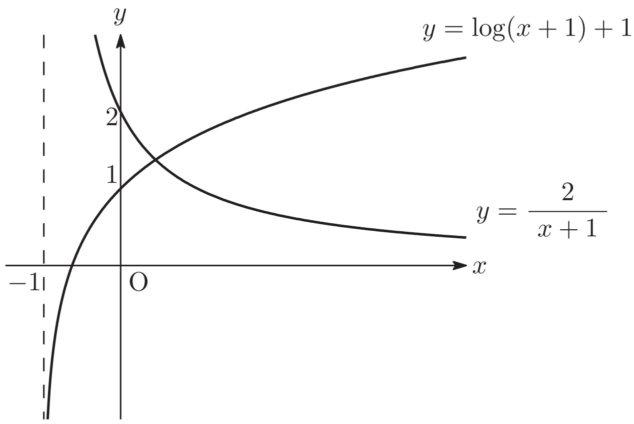
が成り立つときであるが，

$x > -1$ における $y = \log(x+1) + 1$，$y = \dfrac{2}{x+1}$ のグラフを考えると，

次の図のようになり，

①を満たす実数 x の個数はそれらのグラフの共有点の個数に等しい．

したがって，**1 個** である。



(2)　$f(x)=0$ となるのは，

$$(x-1)\log(x+1)=0$$

$$x=1,\ \text{または}\log(x+1)=0$$

$$\therefore\ x=1,\ \text{または}\ 0$$

であり，

$$\begin{cases} -1<x<0,\ 1<x\ \text{のとき} & f(x)>0 \\ 0<x<1\ \text{のとき} & f(x)<0 \end{cases}$$

であるから，求める面積 S は，曲線 C の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれる部分の面積である．

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{-(x-1)\log(x+1)\}\,dx \\ &= -\left\{\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\log(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)^2\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{(x-3)+\frac{4}{x+1}\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x-3)^2+4\log|x+1|\right]_0^1 \\ &= \mathbf{2\log 2-\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

注釈

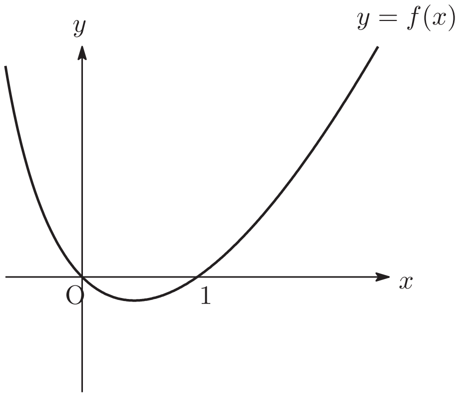
(1) より $f(x)$ の増減は次のようになる．
($f'(x)=0$ を満たす x を $x=\alpha$ とおく。)

x	-1	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

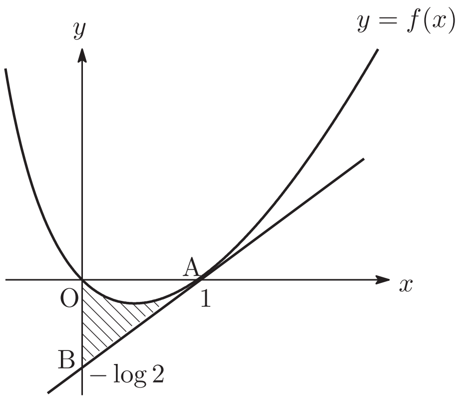
さらに

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

であることも併せると，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



(3)



A$(1,\ f(1))$ における C の接線 l の傾きは $f'(1) = \log 2$ である．
よって，l と y 軸との交点は，B$(0,\ -\log 2)$ である．
したがって，求める面積 T は

$$\begin{aligned} T &= (\triangle \mathrm{OAB}\ \text{の面積}) - S \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \log 2 - \left(2\log 2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\log 2} \end{aligned}$$

講評

第 **1** 問［(1) 確率，(2) 数列，(3) 複素数，(4) 極限］（やや易）
基本的な問題から成る小問集合であった。ここはできれば落としたくない。

第 **2** 問［確率］（(1),(2) 標準，(3) やや難）
袋からカードを引くタイプの確率の問題であった。(2) は余事象を考えたい。(3) が場合分けが煩雑になるため，一旦はスルーしたいところである。

第 **3** 問［空間図形］（(1),(2) 標準，(3) やや難）
ベクトルを使うことに固執しすぎると計算量が多くなる。解答だけを記入すればよいため，ある程度目星が付いたら計算を切り上げるテクニックも必要だろう。

第 **4** 問［微分・積分］（標準）
対数関数に関する微積分の問題であった。丁寧な計算を手掛けたい。誘導を生かしてグラフの概形をある程度予想できると良いだろう。

問題自体はベーシックなものが多かったが，一部計算量が膨大になる箇所があったため，そこを上手く避けたいところだ。一次突破ラインは 60% 程度だろう。