ズバリ的中

2023年度 東京慈恵会医科大学 入試問題

2023年2月9日実施

YMSの「東京慈恵会医科大学模試」から入試問題がズバリ大的中!!

実際の入試問題 ※YMS2023年度解答速報より

3.　O を原点とする座標平面において，
第 1 象限に属する点 $P(\sqrt{2}r,\ \sqrt{3}s)$（r，s は有理数）をとるとき，
線分 OP の長さは無理数となることを示せ。

解答

③は①と同じ形の式なので，上と同様の議論により

$$x' = 3x'',\ y' = 3y'',\ L' = 3L'' \quad (x'',\ y'',\ L'' \text{は自然数})$$

とおけて，

$$2x''^2 + 3y''^2 = L''^2$$

となる。以下，同様の議論を無限に続けることができるから，

$$x,\ y,\ L \text{ は 3 で無限回割り切れる}$$

ことになるが，このような整数は 0 しか存在せず，
①の整数解は $(x,\ y,\ L) = (0,\ 0,\ 0)$ のみである。
これは☆に矛盾する。
ゆえに，OP が有理数であると仮定すると
矛盾が起こるから，OP は無理数である。

「無限降下法」が大的中!!

YMS 東京慈恵会医科大学模試（2022年11月実施）

3. 複素数 α，β は $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{2}$，$|\alpha - \beta| = \sqrt{6}$ を満たすとする．
m，n を整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) m または n が奇数ならば $|m\alpha + n\beta|^2$ は 4 の倍数でないことを示せ．

(2) $|m\alpha + n\beta|$ が整数となるような m，n の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

解 答

(2) $d = |m\alpha + n\beta|$ が整数ならば，② より d は偶数であり，d^2 は 4 の倍数である．
したがって，(1) より m，n はともに偶数であるから

$$m = 2m',\ n = 2n' \ (m',\ n' \text{ は整数})$$

とおくと

$$|2m'\alpha + 2n'\beta| = d$$

$$\therefore\ |m'\alpha + n'\beta| = \frac{d}{2} = (\text{整数}) \quad (\because\ d \text{ は偶数})$$

となるから，上と同じ議論により m'，n' は偶数である．この議論は無限に続けることができるから，m，n は 2 で無限回割り切れることになるが，そのような整数は 0 のみであるから，$(m,\ n) = (0,\ 0)$ でなければならない．

一方，$(m,\ n) = (0,\ 0)$ ならば $|m\alpha + n\beta| = 0$（整数）となり，条件を満たす．

以上により，求める $(m,\ n)$ は $\underline{\boldsymbol{(m,\ n) = (0,\ 0)}}$ //

「空間の軌跡と内積の最大・最小」が的中!!

実際の入試問題 ※YMS2023年度解答速報より

4. Oを原点とする座標空間に 2 点 A(0, 0, 1), B(0, 0, −1) がある。$r>0$, $-\pi \leqq \theta < \pi$ に対して，2点 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{r}\cos\theta,\ \dfrac{1}{r}\sin\theta,\ 0\right)$ をとり，2直線 AP と BQ の交点を $\mathrm{R}(a,\ b,\ c)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a, b, c の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 点 G(4, 1, 1) をとる。r, θ が $r\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ をみたしながら変化するとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値とそのときの a, b, c の値を求めよ。

(1)はどちらも軌跡を求める問題

YMS 東京慈恵会医科大学模試(2022年11月実施)

4. Oを原点とする xyz 空間の3点を A(0, 0, 2), B(1, 0, $\sqrt{3}$), C(1, 1, $\sqrt{3}$) とする．点Oを中心とし，点Aを通る球面を S，点Bを通り，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直な平面を α，平面 α 上で点Bを中心とする半径 $2\sqrt{3}$ の円を T，点Oを頂点とし，円 T を底面とする直円錐面を U とする．さらに，S と U の交線を V とする．

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が V 上にあるとき，x, y, z が満たす条件を求めよ．

(2) $\angle\mathrm{POC}=\theta$ とする．点Pが V 上を動くとき，$\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

解答

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta$ より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{1}{2\sqrt{5}}(x+y+\sqrt{3}z)\ \cdots\cdots③$$

である．

まず，①，② のもとで，$x+y+\sqrt{3}z$ のとりうる値の範囲を求める．

$x+y+\sqrt{3}z=k$ という値をとりうる

$$\iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+\sqrt{3}z=2 \\ x+y+\sqrt{3}z=k \end{cases}$$

となる実数 x, y, z が存在する

(2)も実質、内積の最大・最小で本質は同じ!

3・4の出題順も同じ