解答速報

日本医科大学(後期)　数学

2023年 3月1日実施

[I]

中身がそれぞれ空である白い箱と黒い箱が 1 個ずつある。また，互いに区別のつかない球が十分多くある。1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころを 1 回投げるごとに，出た目が偶数であれば白い箱に目の数に等しい個数の球を入れ，出た目が奇数であれば黒い箱に目の数に等しい個数の球を入れる。ただし，1 度箱に入れた球は取り出さない。さいころを 3 回続けて投げたとき，白い箱に入っている球の個数を n_{W}，黒い箱に入っている球の個数を n_{B} として，以下の各問いの空欄に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。ただし，分数は既約分数として表すこと。

問 1　$n_{\mathrm{B}}=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

問 2　$n_{\mathrm{B}}=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

問 3　$n_{\mathrm{W}}=8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

問 4　$n_{\mathrm{W}}=8$ という条件の下で，$n_{\mathrm{B}} \fallingdotseq 0$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

解答

問 1　黒い箱に入る球の個数を考えると，0 と奇数のみからなる 3 つの 0 以上の整数の組で，和が 4 になるものを見つければよい。このような組は (0, 1, 3) のみである。0 に対応するのは偶数の目であることと (0, 1, 3) の並べ替え方が 6 通りあることに注意すると，求める確率は

$$6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

問 2　黒い箱に入る球の個数を考えると，0 と奇数のみからなる 3 つの 0 以上の整数の組で，和が 3 になるものを見つければよい。このような組は (0, 0, 3) と (1, 1, 1) の 2 つである。(0, 0, 3) が出る確率は，並べ替え方が 3 通りあることに注意すると，

$$3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

(1, 1, 1) が出る確率は，並べ替え方が 1 通りしかないことに注意すると，

$$1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

なので，合わせて $\boldsymbol{\dfrac{7}{54}}$ が求める確率である。

問 3　白い箱に入る球の個数を考えると，0 とその他の偶数のみからなる 3 つの 0 以上の整数の組で，和が 8 になるものを見つければよい。このような組は (0, 2, 6), (0, 4, 4), (2, 2, 4) の 3 つである。

(0, 2, 6) が出る確率は，並べ替え方が 6 通りあることに注意すると，

$$6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

(0, 4, 4) が出る確率は，並べ替え方が 3 通りあることに注意すると，

$$3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

(2, 2, 4) が出る確率は，並べ替え方が 3 通りあることに注意すると，

$$3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

なので，3 つ合わせて $\boldsymbol{\frac{5}{36}}$ が求める確率である。

問 4　$n_{\mathrm{B}} \fallingdotseq 0$ となるためには奇数が 1 回以上出ていなければいけない。これを満たすのは，問 3 の 3 パターンのうち (0, 2, 6), (0, 4, 4) の 2 パターンのみである。この 2 つのどちらかが起こる確率は問 3 の結果より $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$ なので，求める条件付き確率は

$$\frac{1}{8} \div \frac{5}{36} = \boldsymbol{\frac{9}{10}}$$

[II]

O を原点とする xy 平面上の曲線 $C_1 : y = f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$,
と曲線 $C_{2,k} : y = g_k(x) = x^3 - \frac{2k+3}{5}x^2 + \frac{2k}{5}x - \frac{2}{5}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$（ただし，k は 0 以上の定数）の共有点の個数を $N(k)$ とおく。このとき，以下の各問いに答えよ。問 4 については導出過程を記せ。

問 1　$f(x) = 0$ を満たす x（ただし，$-1 \leqq x \leqq 2$）の値をすべて求めよ。答えのみでよい。

問 2　曲線 C_1 の概形を図示せよ。凹凸や変曲点は調べてなくてよい。答えのみでよい。

問 3　問 1 で求めた各 x に対して，$g_k(x)$ の値を求めよ。答えのみでよい。

問 4　$N(k)$ を求めよ。

解答

問 1　$f(x) = 0$ より

$$\frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = 0$$
$$4x^3 - 3x - 1 = 0$$
$$(x-1)(4x^2+4x+1) = 0$$
$$(x-1)(2x+1)^2 = 0$$
$$\therefore \ \boldsymbol{x = 1, \ -\frac{1}{2}}$$

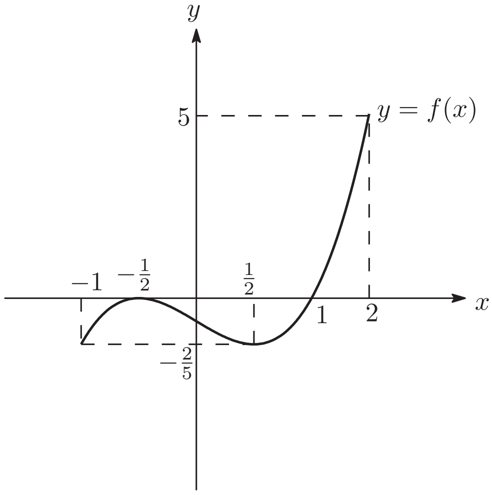
問 2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{5} \\ &= \frac{12}{5}\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

より $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{5}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{5}$	$\nearrow$	5

よって，曲線 C_1 の概形は次のようになる。



問 3

$$g_k(1) = \mathbf{0}$$

$$g_k\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{3}{10}k - \frac{27}{40}}$$

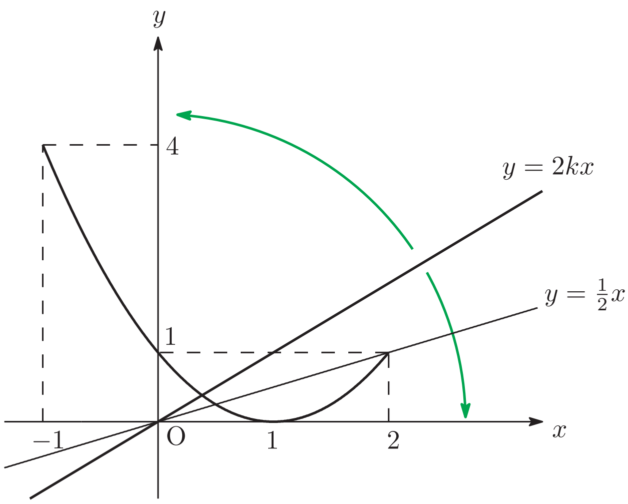
問 4　曲線 C_1，$C_{2,k}$ の共有点の個数は，方程式 $f(x) = g_k(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の解の個数に等しい。

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = x^3 - \frac{2k+3}{5}x^2 + \frac{2k}{5}x - \frac{2}{5} \\
&4x^3 - 3x - 1 = 5x^3 - (2k+3)x^2 + (2k+3)x - 2 \\
&x^3 - (2k+3)x^2 + (2k+3)x - 1 = 0 \\
&(x-1)\{x^2 - 2(k+1)x + 1\} = 0 \\
\therefore\ &x = 1 \text{ または } x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0 \ \cdots\cdots①
\end{aligned}$$

さらに，方程式①の実数解は，$x^2 - 2x + 1 = 2kx$ の実数解，すなわち

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \ (= (x-1)^2) \\ y = 2kx \end{cases}$$

の共有点の x 座標に等しい。



よって，上の図の共有点の個数に，$x = 1$ の 1 個を加えて

($k=0$ のときは $x=1$ が重複することに注意)

①の $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲の解の個数は

$\boldsymbol{k}$	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$	$\cdots$
$\boldsymbol{N(k)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$

[III]

　O を原点とする座標空間において，1 辺の長さが 1 である正四面体を OABC とする。$0 < x < 1$ を満たす x に対して，辺 AB を $x : (1-x)$ に内分する点を D とし，辺 BC を $x : (1-x)$ に内分する点を E とする。また，線分 AE と線分 CD の交点を P とおき，直線 OE 上の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ となるようにとる。$\triangle$APC の面積を S とし，$\triangle$OAQ の面積を T とする。このとき，以下の各問いに答えよ。問 4 については導出過程も記せ。

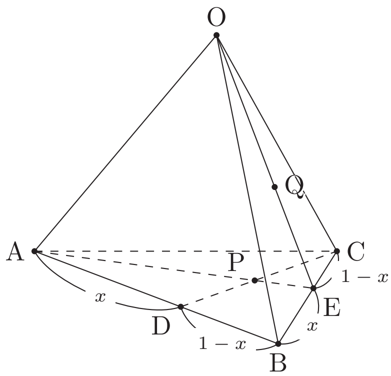
問 1　S を x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$ を x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　$r = x(1-x)$ とおくとき，T を r のみを用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　x を $0 < x < 1$ の範囲で動かすとき，$\dfrac{S}{T^2}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答



問 1　メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \times \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}} = 1$$

すなわち

$$\frac{x}{1} \times \frac{x}{1-x} \times \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}} = 1$$

であるため $\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}} = \dfrac{1-x}{x^2}$ である。

こうして

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{APC} \\ &= \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CD}}\triangle\mathrm{ACD} \\ &= \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\triangle\mathrm{ABC} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1-x}{1-x+x^2} \cdot \frac{x}{1} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x-x^2}{1-x+x^2}\right)} \end{aligned}$$

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ である。（同様の計算により $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{2}$ などが得られる。）

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = x\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるため

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 &= |x\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\ &= x^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 2x(1-x)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-x)^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\ &= x^2 + x(1-x) + (1-x)^2 \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

である，こうして $|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = \boldsymbol{\sqrt{x^2-x+1}}$ である。

問 3　Q は線分 OE 上にあるため，ある実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と表される。t を求める。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}} &= (1-x)\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot x\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \frac{x(1-x)}{2} \\ &= \frac{r}{2} \end{aligned}$$

であるため $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{r}{2}$ である。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(x\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1-x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = t\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{t}{2}$ である。以上より $t = r$ である。

$$\begin{aligned} T &= \triangle\mathrm{OAQ} \\ &= r\triangle\mathrm{OAE} \\ &= \frac{r}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}})^2} \\ &= \frac{r}{2}\sqrt{1\cdot(x^2-x+1) - \frac{1}{4}} \\ &= \boldsymbol{\frac{r}{4}\sqrt{3-4r}} \end{aligned}$$

である。

問 4　$r = x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ より $0 < r \leqq \dfrac{1}{4}$ である。

問 2，3 の結果を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{S}{T^2} &= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{r}{1-r}\cdot\frac{16}{r^2(3-4r)} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{r(1-r)(3-4r)} \end{aligned}$$

と計算される。

$f(r) = r(1-r)(3-4r) = 3r - 7r^2 + 4r^3$ とおく。$f(r)\ (>0)$ の $0 < r \leqq \dfrac{1}{4}$ における最大値を求めればよい。

$f'(r) = 12r^2 - 14r + 3$ であるため，$f'(r) = 0$ を解くと $r = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$ となる。ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{7 - \sqrt{13}}{12} &= \frac{-4 + \sqrt{13}}{12} \\ &= \frac{-\sqrt{16} + \sqrt{13}}{12} \\ &< 0\end{aligned}$$

より，増減表は

r	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
$f'(r)$		$+$	
$f(r)$		$\nearrow$	

であるため，$f(r)$ は $r = \dfrac{1}{4}$ で最大値 $\dfrac{1}{4} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(3 - 4\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{8}$ を取る。また，$r = \dfrac{1}{4}$ となるのは $x = \dfrac{1}{2}$ となるときである。

こうして $x = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ のとき，$\dfrac{S}{T^2}$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{32}{3}\sqrt{3}}$ をとる。

[Ⅳ]

以下の各問いに答えよ。問 2(2)，問 3 については導出過程も記せ。

問 1　次の定積分の値を求めよ。答えのみでよい。

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+4}$$

問 2　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ とするとき，$0<a<1$ を満たす a に対し

$$I_n(a)=\int_0^a \frac{x^{3n}}{1-x^3}dx$$

とおく。

(1)　次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$0 \leqq I_n(a) \leqq \frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}$$

(2)　$I_n(a)-I_{n+1}(a)$ を n と a のみで表せ。

問 3　次の無限級数は収束する。その和を求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n$$

解答

問 1　与式は $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{(x+1)^2+3}$ と変形できるので，$x+1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおく。

$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$，$x:0\to\sqrt{3}-1$ のとき $\theta:\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{(x+1)^2+3} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{3}d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{36}\pi}\end{aligned}$$

問 2 (1)　$0\leqq x\leqq a$ のとき，$\dfrac{x^{3n}}{1-x^3}\leqq 0$ ($\because$ $0<a<1$) より

$$\int_0^a \frac{x^{3n}}{1-x^3}dx \geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

また，$0 \leqq x \leqq a$ のとき，$\dfrac{x^{3n}}{1-x^3} \leqq \dfrac{x^{3n}}{1-a^3}$ $(\because 0 < a < 1)$ より

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{x^{3n}}{1-x^3}dx &\leqq \int_0^a \frac{x^{3n}}{1-a^3}dx \\ &= \left[\frac{x^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}\right]_0^a \\ &= \frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

よって，①②より与式は示された。

(2)

$$\begin{aligned}I_n(a) - I_{n+1}(a) &= \int_0^a \left(\frac{x^{3n}}{1-x^3} - \frac{x^{3n+3}}{1-x^3}\right)dx \\ &= \int_0^a \frac{x^{3n}(1-x^3)}{1-x^3}dx \\ &= \int_0^a x^{3n}dx \\ &= \left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^a \\ &= \boldsymbol{\frac{a^{3n+1}}{3n+1}}\end{aligned}$$

問 3　$\dfrac{3\sqrt{3}-5}{4} = \dfrac{6\sqrt{3}-10}{8} = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3$ であるから，

問 2(2) において，$a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ $(= a'$ とおく，$0 < a' < 1$ を満たす$)$ とすると

$$\frac{a'^{3n+1}}{3n+1} = I_n(a') - I_{n+1}(a') \iff \frac{a'^{3n}}{3n+1} = \frac{1}{a'}\{I_n(a') - I_{n+1}(a')\}$$

したがって，求める無限級数の部分和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n$ は

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3n+1}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3\right\}^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3n+1}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3\right\}^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{a'^{3n}}{3n+1} \\ &= \frac{1}{a'}\sum_{n=0}^{N}\{I_n(a') - I_{n+1}(a')\} \\ &= \frac{1}{a'}\{I_0(a') - I_{N+1}(a')\} \quad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

ここで，問 2(1) より

$$0 \leqq I_{N+1}(a') \leqq \frac{a'^{3(N+1)+1}}{(1-a'^3)\{3(N+1)+1\}}$$

であり，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{a'^{3(N+1)+1}}{(1-a'^3)\{3(N+1)+1\}}=0$ ($\because 0<a'<1$) であるから，
はさみうちの原理を用いて

$$\lim_{N\to\infty} I_{N+1}(a')=0$$

よって，③より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n=\frac{1}{a'}I_0(a') \quad \cdots\cdots ④$$

となるので，以下 $I_0(a')$ を計算する。

$I_0(a')=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\frac{1}{1-x^3}dx$ である。

$x=\dfrac{t}{2}$ とおくと，$dx=\dfrac{dt}{2}$ であり，$x:0\to\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき $t:0\to\sqrt{3}-1$ であるので

$$\begin{aligned}
I_0(a')&=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{1-(\frac{t}{2})^3}\cdot\frac{dt}{2}\\
&=4\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{8-t^3}dt\\
&=4\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{(2-t)(4+2t+t^2)}dt\\
&=4\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2-t}+\frac{t+4}{t^2+2t+4}\right)dt\\
&=\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}-1}\left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2t+2}{t^2+2t+4}+3\cdot\frac{1}{t^2+2t+4}\right)dt\\
&=\frac{1}{3}\Big[-\log|2-t|+\frac{1}{2}\log|t^2+2t+4|\Big]_0^{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{36}\pi \quad (\because \text{問 } 1)\\
&=\frac{1}{3}\left\{\log(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}\log 2\right\}+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi\\
&=\frac{1}{36}\{12\log(\sqrt{3}+1)-6\log 2+\sqrt{3}\pi\}
\end{aligned}$$

したがって，④より，求める無限級数の値は

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n&=\frac{1}{a'}I_0(a')\\
&=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{36}\{12\log(\sqrt{3}+1)-6\log 2+\sqrt{3}\pi\}\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+1}{36}\{12\log(\sqrt{3}+1)-6\log 2+\sqrt{3}\pi\}}
\end{aligned}$$

注釈

最初の $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ は問 1 が誘導と考えて，$\sqrt{3}-1$ 絡みの値を実際に 3 乗してみて見つけ出した。
また，次のように計算することもできる。
$(p+q\sqrt{3})^3=6\sqrt{3}-10$ となる有理数 p，q をとることができたとする。このとき，左辺を展開して 1 と $\sqrt{3}$ の係数を比較すると

$$\begin{cases}p^3+9pq^2=-10\\ 3p^2q+3q^3=6\end{cases}$$

である。定数部分を消去すると

$$p^3 + 9pq^2 = -5(p^2q + q^3)$$

となる。$r = \dfrac{p}{q}$ とおくと

$$r^3 + 5r^2 + 9r + 5 = 0$$

を得る。$r = -1$ が解であることに注意して因数分解すると

$$(\text{左辺}) = (r+1)(r+2+i)(r+2-i)$$

となる。こうして $\dfrac{p}{q} = -1$ となる。元の連立方程式に代入し整理することで $p = -1$ および $q = 1$ を得る。ゆえに $(\sqrt{3}-1)^3 = 6\sqrt{3} - 10$ となる。

講評

［Ｉ］［確率］（やや易）
反復試行の確率の基本的な問題であった。事象も単純で，計算量も多くないので，ここは落とせない。

［II］［二次関数］（標準）
2 つの 3 次関数のグラフの共有点の個数を求める問題であった。方程式が因数分解でき，最終的に 2 次方程式の解の配置を考えることになる。

［III］［空間ベクトル，図形と計量］（標準）
正四面体の種々の図形量に関する出題であった。問 3 までは誘導にしたがって，面積や線分の長さを求めるだけなので，確実に得点したい。問 4 の最小値は 3 次関数の最大値を求める問題となる。定義域と極値の位置関係に注意して解きたい。

［IV］［数III積分法］（やや難）
無限級数の典型的な問題からの出題であった。問 1 は置換積分の王道問題であるから落とせない。問 2 以降は類題を解いた経験がないと少々難しいかもしれない。問 1，問 2 が問 3 の誘導になっていることに気づけたかどうかがポイントである。

例年通り，計算量が多く得点しづらい試験であった。一方で，数学IIIの微分法や複素数平面などが出題されなかった点は珍しい。解ける部分をしっかりと見抜き，確実に得点を積み重ねたい。一次突破ラインは 55～60% 程度か。