医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

愛知医科大学医学部　数学

2024年 1月16日実施

※聞き取りによる再現問題であることを理解して，利用してください。不正確な情報を含む可能性があります。

Ⅰ

次の 1)〜4) の設問に対して，答えのみを解答欄に記入せよ。

1)　2024 の正の約数について，次の問いに答えよ。

(a)　個数を求めよ。

(b)　総和を求めよ。

2)　A と B がいて，それぞれが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。先に 4 回勝った方を勝ちとするとき，次の確率を求めよ。

(a)　4 回目で勝負が決まる確率を求めよ。

(b)　6 回目で勝負が決まる確率を求めよ。

3)　点 O，A，B，C が $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，$|\overrightarrow{OA}|=5$，$|\overrightarrow{OB}|=4$，$|\overrightarrow{OC}|=6$ を満たしている。

(a)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。

(b)　△ABC の面積を求めよ。

4)　a を正の定数とする。関数 $f(x)=\sqrt{x^2+a}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ とする。

(a)　$f'(x)=\dfrac{\boxed{}}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}$ である。

(b)　関数 $y=f(x)$ が極大値を持つとき，$0<a<\boxed{}$ であり，このとき，極大値は $\boxed{}$ である。また，極小値は $\boxed{}$ である。

解答・解説

1)　$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$ である。

(a)　$4\cdot 2\cdot 2=\mathbf{16}$

(b)　$(1+2^1+2^2+2^3)(1+11^1)(1+13^1)=\mathbf{4320}$

2) (a)　A，または B が 4 連勝する確率を考えて

$$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

(b)　A が勝って勝負が決まるのは，5 回目までに 3 勝 2 敗で 6 回目に A が勝つ場合である。B が勝って勝負が決

まる確率も同じなので，求める確率は

$$2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

3) (a) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ より

$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\ \iff & 5^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4^2 = 6^2 \\ \iff & \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$ より $\overrightarrow{\mathrm{CO}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}}{3}$ であるので，点 O は △ABC の重心である。したがって，△OAB の面積の 3 倍が求める面積である。

よって，(a) を用いて

$$3 \times \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} = \mathbf{\frac{45\sqrt{7}}{4}}$$

4) (a) $f'(x) = \dfrac{x(x^2+a-1)}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}$

(b) $f'(x)$ が $+$ から $-$ に符号変化する条件を考えて

$$a - 1 < 0 \iff 0 < a < 1$$

a は正の定数より

$$\boldsymbol{0 < a < 1}$$

ここで，$f'(x) = 0$ のとき，$x = 0,\ \pm\sqrt{1-a}$

増減を考えて，極大値は

$$f(0) = \boldsymbol{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}}$$

また，極小値は

$$f(\pm\sqrt{1-a}) = \mathbf{2}$$

II

原点を O とする座標平面上の楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の 2 接線を $ax + by + c = 0$ (ℓ_1, ℓ_2とする) とし，この 2 接線に直交する楕円 C の 2 接線を ℓ_3, ℓ_4 とする。(※本番では図あり。)

1) 原点 O と ℓ_1，ℓ_3 の距離をそれぞれ d_1，d_2 とするとき，d_1，d_2 を a，b を用いて表せ。
2) ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，ℓ_4 で作られる長方形 D の対角線の長さを求めよ。
3) 長方形 D の面積の最大値を求めよ。また，このときの長方形 D の頂点を求めよ。

解答・解説

1) x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍すると楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$，$ax + by + c = 0$ (ℓ_1, ℓ_2とする) はそれぞれ $x^2 + y^2 = 1$，$2ax + by + c = 0$ となる。これらが接する条件を考えて

$$\frac{|c|}{\sqrt{4a^2 + b^2}} = 1 \iff |c| = \sqrt{4a^2 + b^2}$$

d_1 は原点 O と直線 $ax + by + c = 0$ の距離であるから

$$d_1 = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{a^2 + b^2}}}$$

また，ℓ_3, ℓ_4 は $bx - ay + c' = 0$ とかけるので，x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍すると $2bx - ay + c' = 0$ となる。これと $x^2 + y^2 = 1$ が接する条件を考えて

$$\frac{|c'|}{\sqrt{4b^2 + a^2}} = 1 \iff |c'| = \sqrt{a^2 + 4b^2}$$

d_2 は原点 O と直線 $bx - ay + c' = 0$ の距離であるから

$$d_2 = \frac{|c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{a^2 + b^2}}}$$

注釈

楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$，$ax + by + c = 0$ (ℓ_1, ℓ_2とする) が接する条件は判別式を用いてもよいが，やや計算が面倒になるので，上記のように拡大・縮小変換を利用して円と直線が接する条件に持ち込むと計算が楽になる。

2) 対角線の長さは

$$\sqrt{(2d_1)^2 + (2d_2)^2} = 2\sqrt{\frac{5(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

3) 長方形 D の面積 S は

$$S = 2d_1 \cdot 2d_2 = 4d_1 d_2$$

ここで，2) より

$$\sqrt{(2d_1)^2 + (2d_2)^2} = 2\sqrt{5} \iff {d_1}^2 + {d_2}^2 = 5$$

$d_1 > 0$，$d_2 > 0$ に注意して，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$
\begin{aligned}
&{d_1}^2 + {d_2}^2 \geqq 2\sqrt{{d_1}^2{d_2}^2} \\
\iff& 5 \geqq 2d_1d_2 \\
\iff& d_1d_2 \leqq \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

等号は $d_1 = d_2 \iff a = b$ のとき成立する。
よって，$4d_1d_2 \leqq 10$ より，求める面積 S の最大値は

$$\mathbf{10}$$

また $a = b$ のとき，$|c| = |c'| = \sqrt{5}|a|$ となるので，ℓ_1, ℓ_2 のうち 1 本は $y = -x + \sqrt{5}$，ℓ_3, ℓ_4 のうち 1 本は $y = x + \sqrt{5}$ となる。これらの交点を考えて $(0,\ \sqrt{5})$ である。
あとは対称性を考えることにより，求める長方形 D の頂点の座標は

$$\boldsymbol{(0,\ \pm\sqrt{5}),\ (\pm\sqrt{5},\ 0)}$$

注釈

$a^2 + b^2 \risingdotseq 0$ などの条件があったかもしれない。そうでないと色々と不都合が生じ，問題が不成立となる。その点も含め，上記の解答・解説は厳密な議論はしていないので，その点は理解してほしい。

III

自然数 k に対して $-\sqrt{k} \leqq x \leqq \sqrt{k}$ を満たす整数 x の個数を a_k とする。また，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

1)　S_4 を求めよ。

2)　$2\sqrt{k} - 1 < a_k \leqq 2\sqrt{k} + 1$ を示せ。

3)　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ。

解答・解説

1)　$a_1 = 3$，$a_2 = 3$，$a_3 = 3$，$a_4 = 5$ より

$$S_4 = 3 \times 3 + 5 = \mathbf{14}$$

2)　実数 y を超えない最大の整数を $[y]$ で表すこととすると，$1 \leqq x \leqq \sqrt{k}$ を満たす整数の個数は $[\sqrt{k}]$ 個と表せるので，$-\sqrt{k} \leqq x \leqq \sqrt{k}$ を満たす整数の個数 a_k は

$$a_k = 2[\sqrt{k}] + 1$$

ここで，$[\sqrt{k}]$ は $[\sqrt{k}] \leqq \sqrt{k} < [\sqrt{k}] + 1$ を満たすので，これを $[\sqrt{k}]$ について解いて整理することで

$$\begin{aligned} & \sqrt{k} - 1 < [\sqrt{k}] \leqq \sqrt{k} \\ \iff & 2\sqrt{k} - 2 < 2[\sqrt{k}] \leqq 2\sqrt{k} \\ \iff & 2\sqrt{k} - 1 < 2[\sqrt{k}] + 1 \leqq 2\sqrt{k} + 1 \\ \iff & 2\sqrt{k} - 1 < a_k \leqq 2\sqrt{k} + 1 \end{aligned}$$

3)　2) より

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} (2\sqrt{k} - 1) < S_n \leqq \sum_{k=1}^{n} (2\sqrt{k} + 1) \\ \iff & \sum_{k=1}^{n} (2\sqrt{k}) - n < S_n \leqq \sum_{k=1}^{n} (2\sqrt{k}) + n \\ \iff & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2\sqrt{\frac{k}{n}} \right) - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} < \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2\sqrt{\frac{k}{n}} \right) + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2\sqrt{\frac{k}{n}} \right) - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right\} = \int_0^1 2\sqrt{x} dx - 0 = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2\sqrt{\frac{k}{n}} \right) + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right\} = \int_0^1 2\sqrt{x} dx + 0 = \frac{4}{3}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

講評

Ⅰ［小問集合］(やや易)

1) 整数の性質，2) 確率，3) ベクトル，4) 数Ⅲ微分法からの出題であった。いずれも典型的な出題であり，ここでの失点は極力避け，80～90% 程度は最低でも得点したい。

Ⅱ［2 次曲線］（やや難）

楕円の準円に内接する長方形に関する出題であった。難関大入試としてはありふれたテーマであるが，問題を解き進められない受験生も多かったのではないだろうか。楕円と直線が接する条件は解答・解説のように拡大・縮小変換を用いると計算量を大幅に減らせる。判別式の利用は計算量が増えるのでここでは避けた方が良いだろう。

Ⅲ［数列，極限］（やや難）

ガウス記号をテーマとした出題であった。同じテーマとしては直近だと群数列の問題が 2023 聖マリアンナ医科大学 (後期) で出題されており，同テーマは入試基礎レベルの内容としてありふれている。本問を群数列として問題を解く場面はないが，このタイプの群数列の問題を多く経験していた受験生にとってはやりやすかったのではないだろうか。

全体的に昨年度とほぼ同程度の難易度であったのではないだろうか。Ⅰの小問集合でしっかりと点数を確保し，Ⅱ Ⅲで点数をかき集めていきたい。一次突破ボーダーは 55～60% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録