解答速報

岩手医科大学医学部　数学

2024年 1月17日実施

※聞き取りによる再現問題であることを理解して，利用してください。不正確な情報を含む可能性があります。

第 1 問

n を整数とする。$f(x)=n(\log_2 x)^2+12\log_2 x+n+6$ について，次の問い（問 1〜問 4）に答えよ。

問 1　$n=4$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値は $\boxed{}$ である。また，そのときの x の値は $\boxed{}$ である。

問 2　方程式 $f(x)=0$ がただ 1 つの実数解を持つときの n の値は $\boxed{}$ である。

問 3　k を整数とする。方程式 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つ $x=2^k$ なる解を持つような n の個数は $\boxed{}$ 個である。
また，このうち最大の n の値は $\boxed{}$ である。

問 4　方程式 $f(x)=0$ が実数解を持つとき，実数解のとりうる値の最大値は $x=\boxed{}$ である。

解答・解説

問 1　$\log_2 x=X$ とおくと，X は全ての実数をとりうる。
このとき，$f(x)=g(X)$ とすると

$$\begin{aligned} g(X)&=4X^2+12X+10\\ &=4\left(X+\frac{3}{2}\right)^2+1 \end{aligned}$$

よって，$g(X)(=f(x))$ の最小値は **1** で，このとき

$$X=-\frac{3}{2}\iff \log_2 x=-\frac{3}{2}\iff x=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

問 2　$\log_2 x=X$ のとき，x と X は 1 対 1 に対応するので，$g(X)=0$ がただ 1 つの実数解を持つときの整数 n の値を求める。
$g(X)=0$ がただ 1 つの実数解を持つのは，$n\fallingdotseq 0$ のときは 2 次方程式 $g(X)=0$ が重解をもつ，または $n=0$ のときは 1 次方程式 $g(X)=0$ が実数解をもつときである。
$n\fallingdotseq 0$ のときは 2 次方程式 $g(X)=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=0\iff n^2+6n-36=0$$

となるが，n は整数より不適である。
$n=0$ のときは 1 次方程式 $g(X)=0$ を解くと

$$X=-\frac{1}{2}\iff x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となり，x は実数より適する。
よって，求める整数 n は $n=\mathbf{0}$ である。

問 3　$f\left(2^k\right)=0$ より

$$nk^2+12k+n+6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$n=0$ のとき k は整数とならないので，$n \fallingdotseq 0$ である。①を k の 2 次方程式と考えると，k が整数より①は実数解を持つ必要があるので，判別式を D_k とすると

$$D_k/4 \geqq 0 \iff -3-3\sqrt{5} \leqq n \leqq -3+3\sqrt{5}$$

n は整数より，$n=-9,\ -8,\ \cdots,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$ が必要である。これを①に代入して k が整数となる組み合わせを考えると

$$(n,\ k)=(3,\ -3),\ (3,\ -1),\ (-6,\ 0),\ (-9,\ 1),\ (-6,\ 2)$$

よって，求める整数 n の個数は **3** 個である。また，このうち最大の n の値は **3** である。

注釈

①を n について解いて，$n=-\dfrac{12k+6}{k^2+1} \quad \cdots\cdots ②$ となるので，n が 0 以外の整数であることを踏まえれば

$$|12k+6| \geqq k^2+1$$

を満たす必要がある。絶対値を外して，整数 k の値の候補を求めると

$$k=-11,\ -10,\ \cdots,\ 12$$

となるので，あとは②に代入して n が整数となるものを考えれば

$$(n,\ k)=(3,\ -3),\ (3,\ -1),\ (-6,\ 0),\ (-9,\ 1),\ (-6,\ 2)$$

を得る。

問 4　$\log_2 x=X$ のとき，x と X は 1 対 1 に対応し，かつ X は x について単調増加であるので，X が最大となる場合を考える。
$g(X)=0$ について

$$nX^2+12X+n+6=0 \iff n=-\frac{12X+6}{X^2+1}$$

であるので，$y=-\dfrac{12X+6}{X^2+1}$ のグラフの概形を考えると，$n=-1$ となる X が実数 X のとりうる値の最大値である。
$n=-1$ のとき

$$g(X)=0$$

$$\iff X^2-12X-5=0$$

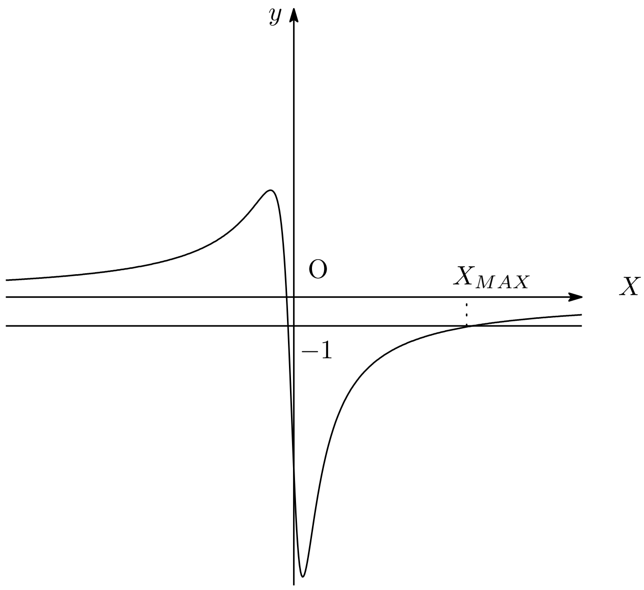
$$\iff X=6\pm\sqrt{41}$$

よって，実数 X のとりうる値の最大値は $X=6+\sqrt{41}$ であり，このとき

$$\log_2 x=6+\sqrt{41} \iff x=\mathbf{2^{6+\sqrt{41}}}$$

注釈

参考までに $y=-\dfrac{12X+6}{X^2+1}$ のグラフの概形を示しておく。



別解

$n \fallingdotseq 0$ のとき $nX^2+12X+n+6=0$ が実数解を持つ条件を考えると

$$-3-3\sqrt{5} \leqq n \leqq -3+3\sqrt{5}$$

となるので，n は整数より $n=-9,\ -8,\ \cdots,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$ とわかる。あとは $n=0$ も含めると，
$n=-9,\ -8,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ $nX^2+12X+n+6=0$ に代入して，それぞれ X を求めて最大となるものを探して解くこともできる。が，かなり面倒なので，上記のようにグラフによる考察で解いた。

別解

なお，グラフによる考察は次のように数IIIの知識を利用せずとも解くことができる。

$n=0$ のとき，$g(X)=0 \iff X=-\dfrac{1}{2}$

$n \fallingdotseq 0$ のとき，

$$g(X)=0$$
$$\iff X^2+1=-\frac{12}{n}\left(X+\frac{1}{2}\right)$$

$y=X^2+1$ と $y=-\dfrac{12}{n}\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ の共有点の X 座標が最大になるのは $-\dfrac{12}{n}=12$，つまり $n=-1$ のときである。$n=-1$ のとき，

$$g(X)=0$$
$$\iff X^2-12X-5=0$$
$$\iff X=6\pm\sqrt{41}$$

よって，以上を踏まえると実数 X のとりうる値の最大値は $X=6+\sqrt{41}$ であり，このとき

$$\log_2 x=6+\sqrt{41} \iff x=\mathbf{2^{6+\sqrt{41}}}$$

第 2 問

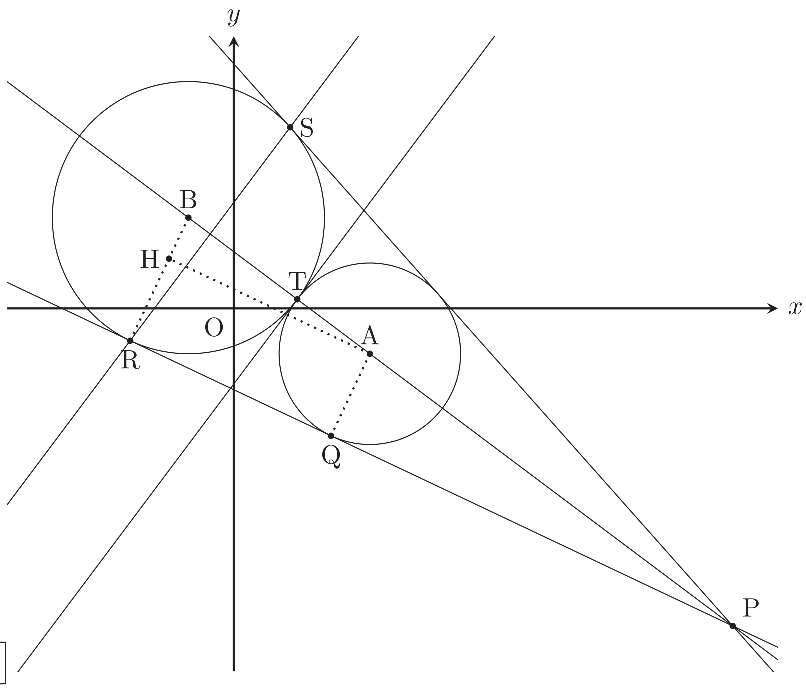
座標平面上に点 A を中心とする円 $C: x^2+y^2-6x+2y+6=0$ がある。また，中心を点 $\mathrm{B}(-1,\ 2)$ とする円 D が点 T で円 C に外接している。円 C と円 D に接する 3 本の接線のうち，点 T を通るものを ℓ，点 T を通らない 2 本の接線のうち傾きが大きい方を m とし，小さい方を n とする。このとき，次の問い（問 1〜問 4）に答えよ。

問 1　円 D の半径は $\boxed{}$ である。また，T の座標は ($\boxed{}$, $\boxed{}$) である。

問 2　直線 ℓ の方程式は $\boxed{}$ である。

問 3　直線 m と n の交点を P とし，直線 m と円 C，円 D の接点をそれぞれ Q，R とする．P の座標は P($\boxed{}$, $\boxed{}$) であり，線分 QR の長さは $\boxed{}$ である。

問 4　直線 AB に関して点 R と対称な点を S とするとき，直線 RS の方程式は $\boxed{}$ である。



解答・解説

問 1　円 C と円 D の中心間距離 AB$=5$ である。円 $C: (x-3)^2+(y+1)^2=4$ より円 C の半径が 2 より円 D の半径は $5-2=\mathbf{3}$ である。

また，点 T は AB を $2:3$ に内分する点となるので，計算して

$$\mathrm{T}\left(\mathbf{\frac{7}{5}},\ \mathbf{\frac{1}{5}}\right)$$

問 2　直線 ℓ は点 T を通り直線 AB に垂直な直線である。したがって，直線 ℓ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より

$$\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}}$$

問 3　$\mathrm{AQ}:\mathrm{BR}=2:3$ より，相似な三角形に注目して $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:3$ であるので（点 P は AB を $2:3$ に外分する点なので），計算して

$$\mathrm{P}(\mathbf{11},\ \mathbf{-7})$$

点 A から直線 BR に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{QR}=\mathrm{AH}$ である。$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BH}=3-2=1$ より，$\triangle\mathrm{ABH}$ において三平方の定理を用いて

$$\mathrm{QR}=\mathrm{AH}=\sqrt{5^2-1^2}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

問 4　直線 RS は円 D の点 P に対する極線であるので，円 $D:(x+1)^2+(y-2)^2=9$ より

$$\begin{aligned}&(11+1)(x+1)+(-7-2)(y-2)=9\\ \Longleftrightarrow\ &12(x+1)-9(y-2)=9\\ \Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

問 4 について，点 S は円 D 上にあるので，点 $\mathrm{R}(x_1,\ y_1)$，点 $\mathrm{S}(x_2,\ y_2)$ における接線の方程式はそれぞれ

$$(x_1+1)(x+1)+(y_1-2)(y-2)=9,\ (x_2+1)(x+1)+(y_2-2)(y-2)=9$$

これらが点 $\mathrm{P}(11,\ -7)$ を通るので，それぞれ

$$\begin{aligned}&(x_1+1)(11+1)+(y_1-2)(-7-2)=9,\ (x_2+1)(11+1)+(y_2-2)(-7-2)=9\\ \therefore\ &12(x_1+1)-9(y_1-2)=9,\ 12(x_2+1)-9(y_2-2)=9\end{aligned}$$

これは直線 $12(x+1)-9(y-2)=9$ が 2 点 $\mathrm{R}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{S}(x_2,\ y_2)$ を通ることを表し，そのような直線は 1 つしかないので，直線 $12(x+1)-9(y-2)=9$ が直線 RS である。

$\boxed{\text{注釈}}$

問 4 について，直線 QR の方程式，点 R の座標を求めるなどして，あとは直線 RS が直線 ℓ に平行であることを利用して直線 QS の方程式を求めてもよい。

第 3 問

袋の中に A，B，C，D，E と書かれた球がそれぞれ 1 つずつ計 5 個入っている。この袋から同時に 3 個の球の取り出し，確認した後，袋の中に戻すという試行を繰り返す。次の問い（問 1〜問 4）に答えよ。

問 1　この試行を 1 回行うとき，A の球を取り出す確率は $\boxed{}$ であり，また，A の球と B の球をともに取り出す確率は $\boxed{}$ である。

問 2　この試行を 5 回繰り返すとき，A の球と B の球を少なくとも 1 つ取り出さない確率は $\boxed{}$ である。

問 3　この試行を 5 回繰り返すとき，A の球を連続して 3 回以上取り出す確率は $\boxed{}$ である。

問 4　この試行を 5 回繰り返すとき，取り出さない球がない確率は $\boxed{}$ である。

解答・解説

問 1　A の球を取り出す確率は

$$\frac{{}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

A の球と B の球をともに取り出す確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

問 2　1 回の試行で A の球と B の球を少なくとも 1 個取り出さない確率は，問 1 より $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ であるから，試行を 5 回繰り返すとき，A の球と B の球を少なくとも 1 個取り出さない確率は

$$\boldsymbol{\left(\frac{7}{10}\right)^5}$$

問 3　試行を 5 回繰り返すとき，A の球を連続して 3 回取り出すのは，「AAA ×△」「× AAA ×」「△× AAA」（A は A の球，×は A 以外の球，△は A〜E の球を取り出すことを表す）の順で取り出すときなので

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1 \times 2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^3 \cdot 3^4}{5^5}$$

試行を 5 回繰り返すとき，A の球を連続して 4 回取り出すのは，「AAAA ×」「× AAAA」の順で取り出すときなので

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5} \times 2 = \frac{2^2 \cdot 3^4}{5^5}$$

試行を 5 回繰り返すとき，A の球を連続して 4 回取り出すのは，「AAAAA」の順で取り出すときなので

$$\left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{3^5}{5^5}$$

よって，求める確率は

$$\frac{2^3 \cdot 3^4}{5^5} + \frac{2^2 \cdot 3^4}{5^5} + \frac{3^5}{5^5} = \frac{3^4(8+4+3)}{5^5} = \frac{243}{625} = \boldsymbol{\frac{3^5}{5^4}}$$

問 4　余事象を考える。

試行を 5 回繰り返すとき，アルファベットが書かれた 3 種類の球を取り出す確率は

$$\left(\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}\right)^5 \times {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{1}{10^4}$$

試行を 5 回繰り返すとき，アルファベットが書かれた 4 種類の球を取り出す確率は

$$\left\{\left(\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}\right)^5-\left(\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}\right)^5\times 4\right\}\times{}_5\mathrm{C}_4=\frac{2\cdot 4^4-2}{10^4}$$

よって，求める確率は余事象を考えて

$$1-\left(\frac{1}{10^4}+\frac{2\cdot 4^4-2}{10^4}\right)=\mathbf{1-\frac{2^5}{5^4}+\left(\frac{1}{10}\right)^4}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

本番では問 3，問 4 は上記の形で答えさせていたとの情報があるので，そのようにした。

講評

第 1 問［整数，対数］(やや難)

整数を係数とする対数の関数，方程式に関する出題であった。実質 2 次関数，2 次方程式の問題であったが，整数が絡んでの融合問題で取り組みにくい内容であっただろう。特に問 3 以降は手がつかなかった受験生も多かったのではないだろうか。

第 2 問［図形と方程式］（標準）

外接する 2 円の共通外接線，共通内接線に関する出題であった。図形の性質をうまく利用して解くことが求められ，座標平面上の図形問題に対する普段の姿勢が問われた形だ。

第 3 問［確率］（やや易）

文字の書かれた球の取り出す方法に関する確率からの出題であった。確率の基本が身についているかの出題で，例年より取り組みやすかったのではないだろうか。

全体的に昨年度とほぼ同程度の難易度であったのではないだろうか。数IIIからの出題が見られなかったのは目新しい (第 1 問は数IIIの知識を利用して解くこともできる)。一次突破ボーダーは 55〜60% 程度か。