

## 東北医科薬科大学 数学

2024年 1月20日実施

[ I ]

座標平面上の3次曲線  $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  は定数) が, 次の2つの条件 (i), (ii) を満たすと  
 する。

- (i)  $x = p$  で極小値 1 をとり,  $x = q$  で極大値をとる。
- (ii)  $y = f(x)$  の変曲点  $(r, f(r))$  の  $y$  座標は  $f(r) = 3$  である。

このとき, 以下の間に答えなさい。

(1)(1-1)  $q = -\frac{\text{ア}a + \text{イ}p}{\text{ウ}}$ , 極大値は  $f(q) = \text{エ}$  である。

(1-2)  $y = f(x)$  と直線  $y = 1$  で囲まれた図形の面積は  $\frac{\text{オカ}}{\text{キ}}$  である。

(2) 2点  $(p, 1)$ ,  $(q, f(q))$  を通る直線を  $l$  とおく。

(2-1)  $l$  の傾きは  $\text{クケ}$  である。

(2-2)  $l$  が点  $(3, -9)$  を通るとき,  $p = \text{コサ}$ ,  $a = \text{シ}$  である。

**解答**

(1)(1-1)  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ,  $f''(x) = 6x + 2a$  より変曲点は  $(-\frac{a}{3}, f(-\frac{a}{3}))$  である。3次関数は変曲点に  
 関して点対称であるため, 変曲点は  $(p, f(p))$ ,  $(q, f(q))$  の中点である。よって  $\frac{p+q}{2} = -\frac{a}{3}$ , 整理して  
 $q = -\frac{2a+3p}{3}$ . 同じく  $\frac{f(p)+f(q)}{2} = f(-\frac{a}{3})$ ,  $f(p) = 1$  に  $f(-\frac{a}{3}) = 3$  を代入して整理すると  
 $f(q) = 5$ .

(1-2) 求める面積を  $S$  とおく。

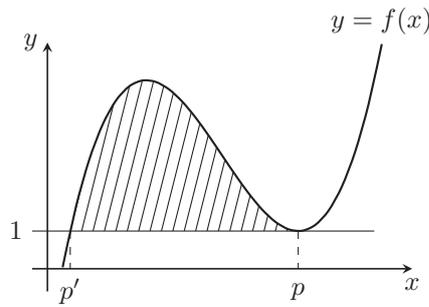
方程式  $f(x) = 1$  は  $p$  を重解に持つ。残りの1つの解を  $p'$  とおく。  $f(x) = 1$  を整理すると

$$x^3 + ax^2 + bx + c - 1 = 0 \quad \dots\dots\text{①}$$

であるため  $f(x) - 1 = (x - p)^2(x - p')$  と表され

$$S = \int_{p'}^p (x - p)^2(x - p')dx = \frac{1}{12}(p - p')^4$$

となる。



① について、解と係数の関係から  $2p + p' = -a$ 、整理して  $p' = -a - 2p$  となる。  $a = -\frac{3}{2}(p + q)$  とあわせると

$$p - p' = a + 3p = -\frac{3}{2}(p + q) + 3p = \frac{3}{2}(p - q)$$

となる。こうして

$$S = \frac{27}{64}(p - q)^4$$

となる。

さて、

$$f(p) - f(q) = \int_q^p f'(x) dx$$

であるが、  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$  より  $f(x) = 3(x - p)(x - q)$  と表され、

$$\int_q^p f'(x) dx = -\frac{3}{6}(p - q)^3 = -\frac{1}{2}(p - q)^3$$

となる。  $f(p) = 1$ 、  $f(q) = 5$  と合わせると

$$\frac{1}{2}(p - q)^3 = 4$$

なので、  $p, q$  が実数であることより  $p - q = 2$  である。

以上より  $S = \frac{27}{64} \times 2^4 = \frac{27}{4}$ 。

(2)(2-1) (1-1), (1-2) の計算から  $\frac{f(p) - f(q)}{p - q} = \frac{1 - 5}{2} = -2$ 。

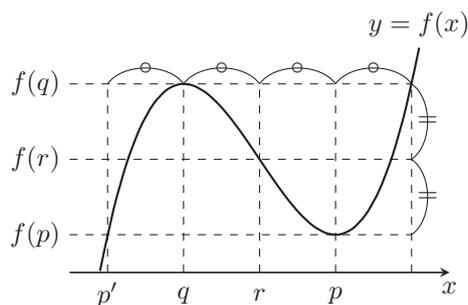
(2-2)  $l$  の式は  $y = -2(x - p) + 1$  である。(3, -9) を代入すると  $-9 = 2p - 5$  であるため、  $p = -2$  である。

$p - q = 2$  より  $q = -4$  で、  $\frac{p + q}{2} = -\frac{a}{3}$  に代入して整理すると  $a = 9$  となる。

**注釈**

3 次関数の対称性を用いた問題である。

実際、3 次関数のグラフは次の図のようになる。



この構図が頭に入っていると  $f(q) = 5$  や  $p + q = -\frac{2}{3}a$  や  $2p + p' = -a$  にすぐ気付くことができるだろう。また  $p - p' = \frac{3}{2}(p - q)$  であることもすぐに分かる。

**注釈**

(1-2) で  $p - q$  を計算するという発想に至るのは受験生には少々難しいかもしれない。(2-1) で  $\frac{f(p) - f(q)}{p - q}$  を計算させることからヒントを得たいところだ。

**注釈**

例えば 3 次関数のグラフが変曲点に関して点対称になることは、次のように証明できる。

3 次関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) を考える。 $f''(x) = 0$  を満たす  $x$  は  $x = -\frac{b}{3a}$  であり、 $f\left(-\frac{b}{3a}\right) = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$  であるので、 $y = f(x)$  を  $x$  軸方向に  $\frac{b}{3a}$ 、 $y$  軸方向に  $-\frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d$  だけ平行移動すると (変曲点が原点にくるように平行移動すると)、平行移動した関数を  $g(x)$  として

$$\begin{aligned} g(x) &= a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d + \left(-\frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d\right) \\ &= ax^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x \end{aligned}$$

$g(-x) = -g(x)$  より、 $y = g(x)$  のグラフは原点に関して点対称であるから、3 次関数  $y = f(x)$  のグラフは変曲点  $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$  に関して点対称である。

[II]

座標平面上の動点 P は原点 O の位置にある。この点 P の次の試行により移動させる。

赤球 4 個、青球 3 個、黄球 2 個、白球 1 個の計 10 個の球が袋の中に入っている。この袋から赤球を取り出したときは点 P を  $x$  方向に +1 だけ、青球を取り出したときは点 P を  $y$  軸方向に +1 だけ、黄球を取り出したときは点 P を  $x$  軸方向に -1 だけ、白球を取り出したときは点 P を  $y$  軸方向に -1 だけ移動させるという指示である。このとき、以下の間に答えなさい。

- (1) 袋の中から 1 個球を取り出し、その球の指示に従い点 P を移動し、取り出した球を袋に戻す。この試行を 2 回行った後、点 P が元の原点 O の位置にある確率は  $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$  である。O と P の距離 OP が  $OP > 1$  となる確率は  $\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$  である。
- (2) 袋の中から 1 個球を取り出し、その球の指示に従い点 P を移動し、取り出した球を袋に戻す。この試行を 4 回行った後、点 P が元の原点 O の位置にある確率は  $\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シスセソ}}}$  である。
- (3) 袋の中から 1 個ずつ元に戻さずに 5 回取り出し、取り出した順の指示に従って点 P を 5 回移動する。このとき、点 P が  $y$  軸上にある確率は  $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$  である。
- (4) 袋の中から 1 個ずつ元に戻さずに 6 回取り出し、取り出した順の指示に従って点 P を 6 回移動する。このとき、点 P が直線  $y = x$  上にある確率は  $\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$  である。

解答

- (1) 1 回の試行で点 P が

$$\begin{cases} x \text{ 軸方向に } +1 \text{ だけ移動するという事象を } A \\ y \text{ 軸方向に } +1 \text{ だけ移動するという事象を } B \\ x \text{ 軸方向に } -1 \text{ だけ移動するという事象を } C \\ y \text{ 軸方向に } -1 \text{ だけ移動するという事象を } D \end{cases}$$

する。

この試行を 2 回行った後、点 P が原点の位置となるのは

(i)  $A$  と  $C$  が 1 回ずつ起こる

(ii)  $B$  と  $D$  が 1 回ずつ起こる

のいずれかの場合のみである。

(i) が起こる確率は

$${}_2C_1 \left( \frac{4}{10} \right) \cdot \left( \frac{2}{10} \right)$$

(ii) が起こる確率は

$${}_2C_1 \left( \frac{3}{10} \right) \cdot \left( \frac{1}{10} \right)$$

であり、これらは排反であるから、求める確率は

$${}^2C_1 \left(\frac{4}{10}\right) \cdot \left(\frac{2}{10}\right) + {}^2C_1 \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{11}{50}$$

また、この試行を2回行った後、 $OP > 1$ となるのは、  
2回後に点Pが原点Oの位置にない場合であるから、その確率は

$$1 - \frac{11}{50} = \frac{39}{50}$$

(2) この試行を4回行ったとき、事象A, B, C, Dが起こる回数をそれぞれa, b, c, dとする。4回後に点Pが原点Oの位置にあるのは

$$\begin{cases} a + b + c + d = 4 & \dots\dots ① \\ a - c = 0 & \dots\dots ② \\ b - d = 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

を満たす場合である。これらより

$$\begin{cases} a = c, b = d \\ a + b = 2, c + d = 2 \end{cases}$$

が成り立ち、 $a, b, c, d \geq 0$ であることに注意すると

$$(a, b, c, d) = (2, 0, 2, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 2, 0, 2)$$

の場合のみであり、これらが起こる事象は排反である。

よって、求める確率は

$${}^4C_2 \left(\frac{4}{10}\right)^2 \left(\frac{2}{10}\right)^2 + 4! \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} + {}^4C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{507}{5000}$$

(3) 取り出した球は元に戻さないことに注意する。5回の試行において、事象A, B, C, Dが起こる回数をそれぞれa, b, c, dとする。

5回取り出して移動した後、点Pがy軸上にあるのは

$$\begin{cases} a + b + c + d = 5 \\ a = c \\ 0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 3, 0 \leq c \leq 2, 0 \leq d \leq 1 \end{cases}$$

を満たす場合である。

(あ)  $a = c = 0$ の場合

$$b + d = 5$$

となるが、 $0 \leq b + d \leq 4$ であるから、起こることはない。

(い)  $a = c = 1$ の場合

$b + d = 3$ 、すなわちBまたはDが3回起こるので、確率は

$$\frac{{}^4C_1 \cdot {}^2C_1 \cdot {}^4C_3}{{}^{10}C_5}$$

(う)  $a = c = 2$  の場合

$b + d = 1$ , すなわち  $B$  または  $D$  が 1 回起こるので, 確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_5}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_4C_3 + {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_5} = \frac{2}{9}$$

(4)  $a, b, c, d$  は (3) と同じものとする.

6 回取り出して移動した後に, 点  $P$  が直線  $y = x$  上にある条件は

$$\begin{cases} a + b + c + d = 6 \\ a - c = b - d \\ 0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 3, 0 \leq c \leq 2, 0 \leq d \leq 1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} a + b + c + d = 6 \\ a + d = b + c = 3 \\ 0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 3, 0 \leq c \leq 2, 0 \leq d \leq 1 \end{cases}$$

である. これを満たす場合は

$$(a, b, c, d) = (3, 3, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (3, 1, 2, 0), \\ (2, 3, 0, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1)$$

のいずれかの場合のみである.

(あ)  $(a, b, c, d) = (3, 3, 0, 0)$  の場合

確率は

$$\frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_3}{{}_{10}C_6}$$

(い)  $(a, b, c, d) = (3, 2, 1, 0)$  の場合

確率は

$$\frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_2C_1}{{}_{10}C_6}$$

(う)  $(a, b, c, d) = (3, 1, 2, 0)$  の場合

確率は

$$\frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2}{{}_{10}C_6}$$

(え)  $(a, b, c, d) = (2, 3, 0, 1)$  の場合

確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_6}$$

(お)  $(a, b, c, d) = (2, 2, 1, 1)$  の場合

確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_6}$$

(か)  $(a, b, c, d) = (2, 1, 2, 1)$  の場合

確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_1}{{}_{10}C_6}$$

以上を加えて、求める確率は

$$\frac{10}{21}$$

**注釈**

注釈 (4) では、6 回後の点 P の位置が  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$  の場合に分けて求めてもよい。

III

座標平面において、極方程式  $r = \frac{3}{5 - 3\cos\theta}$  で与えられる楕円の直交座標  $(x, y)$  による方程式を  $f(x, y) = 0$  とおく。以下の問に答えなさい。

- (1) 楕円  $f(x, y) = 0$  の長軸の長さは  $\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ 、短軸の長さは  $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$  である。
- (2) 楕円  $f(x, y) = 0$  の焦点は  $\left(\frac{\text{カ}}{\text{キ}}, \text{ク}\right)$  と  $(\text{ケ}, \text{コ})$  である。ただし、 $\text{ケ} < \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$  とする。
- (3) 楕円  $f(x, y) = 0$  を  $y$  軸に関して対称な楕円になるように  $x$  軸方向に平行移動する。この  $y$  軸対称の楕円の方程式を  $g(x, y) = 0$  とする。楕円  $g(x, y) = 0$  と直線  $16\sqrt{3}x + 20y - 15\sqrt{3} = 0$  の2つの共有点の座標は

$$\left(\frac{\text{サシ}}{\text{スセ}}, \frac{\text{ソ}\sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}}\right) \text{ および } \left(\frac{\text{ツテ}}{\text{トナ}}, \text{ニ}\right)$$

である。ただし、 $\frac{\text{サシ}}{\text{スセ}} < \frac{\text{ツテ}}{\text{トナ}}$  とする。

解答

- (1) 原点を極とし、 $x$  軸を始線として考えると、 $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$  が成り立つので、以下  $r \geq 0$  として

$$\begin{aligned} r &= \frac{3}{5 - 3\cos\theta} \\ \Leftrightarrow 5r - 3r\cos\theta &= 3 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 + y^2} &= 3x + 3 \\ \Leftrightarrow 5^2(x^2 + y^2) &= (3x + 3)^2, \text{ かつ } 3x + 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 16x^2 - 18x + 25y^2 &= 9, \text{ かつ } x \geq -1 \\ \Leftrightarrow 16\left(x - \frac{9}{16}\right)^2 + 25y^2 &= \frac{225}{16}, \text{ かつ } x \geq -1 \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{9}{16}\right)^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} &= 1 \text{ (} x \geq -1 \text{ を満たす)} \end{aligned}$$

よって、楕円  $f(x, y) = 0$  について

$$\text{長軸の長さ} : 2 \times \frac{15}{16} = \frac{15}{8}, \text{ 短軸の長さ} : 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

- (2) 楕円  $\frac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$  の焦点の  $x$  座標は

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{15}{16} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{15}{16} - \frac{3}{4}\right)} \\ &= \pm\sqrt{\frac{27}{16} \cdot \frac{3}{16}} = \pm\frac{9}{16} \end{aligned}$$

よって、楕円  $f(x, y) = 0$  の焦点は平行移動を考えて

$$\left( \pm \frac{9}{16} + \frac{9}{16}, 0 \right)$$

$$\therefore \left( \frac{9}{8}, 0 \right), (0, 0)$$

(3)  $g(x, y) = 0 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$  である。

以下、 $a = \frac{15}{16}$ ,  $b = \frac{3}{4}$  として、楕円  $g(x, y) = 0$  と直線  $16\sqrt{3}x + 20y - 15\sqrt{3} = 0$  を  $x$  軸方向に  $\frac{1}{a}$  倍、 $y$  軸方向に  $\frac{1}{b}$  倍すると、それぞれの方程式は

$$x^2 + y^2 = 1, 16\sqrt{3}ax + 20by - 15\sqrt{3} = 0$$

となる。 $16\sqrt{3}ax + 20by - 15\sqrt{3} = 0 \iff 15\sqrt{3}x + 15y - 15\sqrt{3} = 0 \iff y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$  と  $x^2 + y^2 = 1$  から  $y$  を消去して

$$x^2 + (-\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2 = 1$$

$$\iff (2x - 1)(x - 1) = 0$$

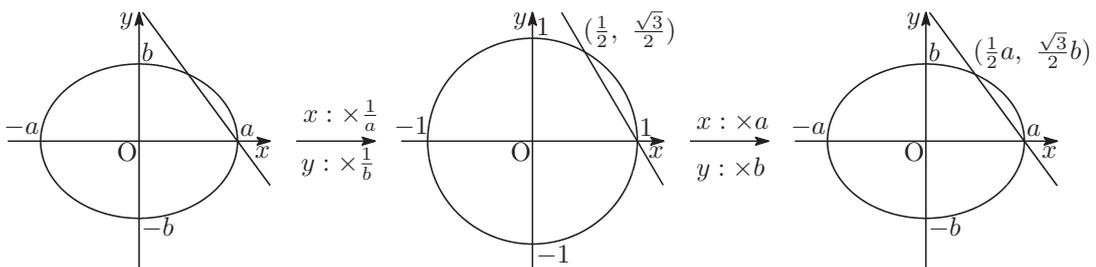
$$\iff x = \frac{1}{2}, 1$$

したがって、円  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $16\sqrt{3}ax + 20by - 15\sqrt{3} = 0$  の共有点の座標は

$$\left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), (1, 0)$$

よって、求める共有点の座標は、これらを  $x$  軸方向に  $a \left( = \frac{15}{16} \right)$  倍、 $y$  軸方向に  $b \left( = \frac{3}{4} \right)$  倍して

$$\left( \frac{15}{32}, \frac{3\sqrt{3}}{8} \right), \left( \frac{15}{16}, 0 \right)$$



**注釈**

$g(x, y) = 0 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$  と直線  $16\sqrt{3}x + 20y - 15\sqrt{3} = 0$  を連立しても計算できる。ただし、 $\left( \frac{15}{16}, 0 \right)$  が共有点となることはわかるので  $x$  を先に消去して考える。

$$16\sqrt{3}x + 20y - 15\sqrt{3} = 0 \iff x = -\frac{5}{4\sqrt{3}}y + \frac{15}{16} \text{ であるので } \frac{x^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1 \text{ に代入して}$$

$$\frac{\left(-\frac{5}{4\sqrt{3}}y + \frac{15}{16}\right)^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

$$\iff \frac{\frac{5^2}{4^2 \cdot 3}y^2 - 2 \cdot \frac{5}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{15}{16}y + \left(\frac{15}{16}\right)^2}{\left(\frac{15}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

$$\iff \frac{4^2}{3^3}y^2 - \frac{8}{3\sqrt{3}}y + \frac{4^2}{3^2}y = 0$$

$$\iff \frac{4^3}{3^3}y^2 - \frac{8}{3\sqrt{3}}y = 0$$

$$\iff y^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}y = 0$$

$$\iff y\left(y - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = 0$$

よって、 $y = 0, \frac{3\sqrt{3}}{8}$  より、求める共有点の座標は

$$\left(\frac{15}{32}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right), \left(\frac{15}{16}, 0\right)$$

講評

[I] [数Ⅱ微積分] (標準) : 3次関数の極値, 変曲点に関する出題であった。文字数が多く解きにくい, 図形的な性質を利用して要領よく処理できるかが問われた。まともに計算するのは試験場では避けたい。

[II] [確率] (標準) : 袋から色球を取り出してその色に応じて座標平面上を移動する動点に関する確率の出題であった。(4)の事象を正確に把握し, 計算するのがやや難しい。また, (3)(4)が反復試行ではないことにも注意が必要である(乗法定理)。落ち着いて問題文を読みたい。(4)は ${}_5C_3 \cdot {}_5C_3$ としてもよいが, 早々に気づくものでもないだろう。

[III] [2次曲線] (標準) : 極方程式からの出題であった。極方程式を直交座標に関する方程式に直せば,あとは計算のみである。やや計算量が多いが, (3)では楕円を単位円に拡大・縮小変換すると計算はかなり楽になる。仮にそのまま連立したとしても $\left(\frac{15}{16}, 0\right)$ で共有点を持つことはわかるので $x$ を消去して $y$ の2次方程式を解くのがよいが, 早々に気づくものでもないだろう。

全体的な難易度は昨年度と同程度かやや易しい程度であった。全体的に取り組みやすい問題も多かったが, 整関数の図形的性質を考えさせたり, やや煩雑な確率の計算であったりと本学らしい出題であった。なお, [III]の楕円の拡大・縮小変換を用いる問題がここまで本学, 愛知医科大学, 杏林大学と立て続けに出題されている。今後のために今一度確認しておくといだろう。一次突破ボーダーは55~60%程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは


**医学部専門予備校**  
**YMS**  
 heart of medicine  
 ☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>  
 東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156  
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校 **英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215  
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録またはLINE友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE登録

