東京女子医科大学　数学

2024年 2月1日実施

※聞き取りによる再現問題です。一部誤りを含む可能性があります。

1

次の各問いに答えよ。

① 直線 $\ell : x+2y-2=0$ とのなす角が 45° である直線のうち，$\mathrm{P}(3,\ 2)$ を通る直線をすべて求めよ。

② $z^2-4i=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

解答

① $\ell : y=-\dfrac{x}{2}+1$ より，直線 ℓ と x 軸の正方向のなす角 θ とすると

$$\tan\theta=-\frac{1}{2}$$

求める直線の傾きは $\tan(\theta\pm45^\circ)$ であるから，加法定理を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\tan(\theta+45^\circ)&=\frac{\tan\theta+\tan45^\circ}{1-\tan\theta\tan45^\circ}\\&=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1}\\&=\frac{1}{3}\\\tan(\theta-45^\circ)&=\frac{\tan\theta-\tan45^\circ}{1+\tan\theta\tan45^\circ}\\&=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1}\\&=-3\end{aligned}$$

よって，求める直線は $\mathrm{P}(3,\ 2)$ を通ることより，その方程式は

$$y=\frac{1}{3}(x-3)+2,\ y=-3(x-3)+2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+1,\ y=-3x+11}$$

② $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}&z^2-4i=0\\\iff&\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^2=4i\\\iff&r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\quad(\because\ \text{ド・モアブルの定理})\end{aligned}$$

絶対値と偏角を比較して

$$r^2 = 4,\ \text{かつ}\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k\ \text{は整数})$$

$$\therefore\ r = 2,\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $k = 0,\ 1$ であるので，$(r,\ \theta) = \left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right),\ \left(2,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$

よって，求める複素数 z は

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\therefore\ z = \boldsymbol{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}\quad \textbf{(複号同順)}$$

2

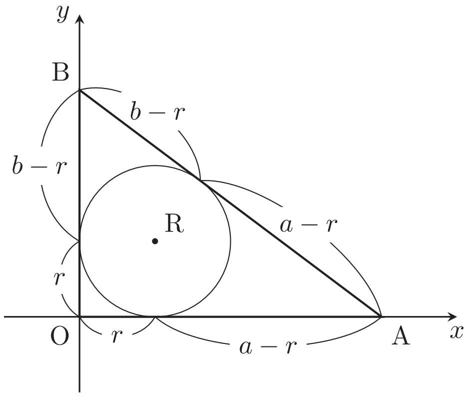
原点を O とする座標平面上に A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$($a,\ b$ は $a > b$ を満たす自然数) の三角形 OAB に内接する円がある。この円の中心を R，半径を $r\ (>0)$ とするとき，次の各問いに答えよ。

① 点 R の座標を $a,\ b$ を用いて表せ。

② R$(4,\ 4)$ となる $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ。

解答

① 下図より $(a-r)+(b-r)=\sqrt{a^2+b^2}$．整理して $r=\boldsymbol{\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$.



別解

三角形の面積 $=\dfrac{1}{2}\times 3$ 辺の和 $\times$ 内接円の半径 であるため，

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2})r.$$

整理すると

$$\begin{aligned} r &= \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} \\ &= \boldsymbol{\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \end{aligned}$$

② $\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=4$ を変形すると $a+b-8=\sqrt{a^2+b^2}$ となる．辺々を 2 乗して整理すると

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+2ab-16a-16b+64=a^2+b^2 \\ \Longleftrightarrow\ & ab-8a-8b+32=0 \\ \Longleftrightarrow\ & (a-8)(b-8)=32 \end{aligned}$$

いま，$a,\ b\ (a>b)$ は自然数であるため，$a-8,\ b-8$ は $a-8>b-8\geqq -7$ を満たす自然数となるので

$$(a-8,\ b-8)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$$

となる．よって

$$(a,\ b)=\boldsymbol{(40,\ 9),\ (24,\ 10),\ (16,\ 12)}.$$

3

3 つのサイコロを同時に投げる試行について，次の各問いに答えよ。ただし，サイコロの目の出方は同様に確からしいものとする。

① 2 つのサイコロは同じ目が出て，残り 1 つのサイコロは異なる目が出る確率を求めよ。

② 3 つのサイコロの目が連続する 3 つの数字となる確率を求めよ。ただし，連続する 3 つの数字とは $(1,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 4,\ 5)$ のような数字の組み合わせを指す。

③ この試行を繰り返す操作を行い，①または②の事象が起こらなかったとき操作を終了することとする。この操作が r 回以内に終了する確率を r を用いて表せ。

解答

① a の目が 2 回と a 以外の目が 1 回出る確率を求める。$(a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$

例えば，$a=1$ のときの目の組み合わせは

$$(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 1,\ 6)$$

この事象が起きる確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{6^3} \times 5 = \frac{5}{72}$$

$a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のときも同様であるので，求める確率は

$$\frac{5}{72} \times 6 = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

② 出る目の組み合わせは

$$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 6)$$

のいずれかである。よって，求める確率は

$$\frac{3!}{6^3} \times 4 = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

③ ①の事象と②の事象は排反であるから，①または②の事象が起きる確率は

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{9} = \frac{19}{36}$$

よって，r 回以内にこの操作が終了する確率は,

$$1 - (r \text{ 回以内にこの操作が終了しない確率})$$

$$= 1 - (r \text{ 回連続で①または②の事象が起きる確率})$$

$$= \boldsymbol{1 - \left(\frac{19}{36}\right)^r}$$

4

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とする。次の各問いに答えよ。

① 極値を求めよ。

② $n^m=m^n$ を満たす自然数 $(m,\ n)$ $(m<n)$ の組を求めよ。

③ 23^{24} と 24^{23} の大小関係を調べよ。

解答

①

$$f(x)=\frac{\log x}{x}\quad(x>0)$$
$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

であり，$f'(x)=0$ となる x は $x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって，極値は $\boldsymbol{f(e)=\dfrac{1}{e}}$

②

$$\begin{aligned}&m^n=n^m\\ \iff&\log m^n=\log n^m\\ \iff&n\log m=m\log n\\ \iff&\frac{\log m}{m}=\frac{\log n}{n}\\ \iff&f(m)=f(n)\end{aligned}$$

となるので，「$m<n$ かつ $f(m)=f(n)$ を満たす自然数 $m,\ n$」を求めることになる。
①の増減から，「$m<n\leqq e$」,「$e\leqq m<n$」のときは $f(m)=f(n)$ は成り立たないから，
$f(m)=f(n)$ が成り立つのは「$m<e<n$」の場合に限る。さらに，$2<e<3$ より $m=1,\ 2$ でなければならない。

(i) $m=1$ のとき
$f(m)=f(1)=\log 1=0$ となるが，$e<x$ において $f(x)>0$ であるから，
$f(n)=0$ を満たす自然数 n $(>e)$ は存在しない。

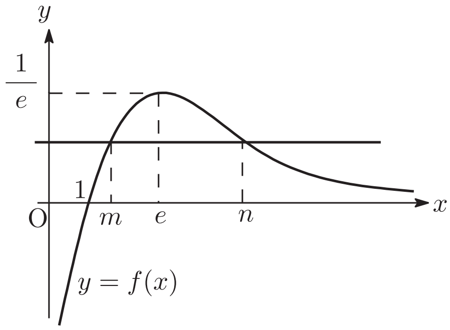
(ii) $m=2$ のとき

$$f(2)=\frac{\log 2}{2},$$
$$f(4)=\frac{\log 4}{4}=\frac{2\log 2}{4}=\frac{\log 2}{2}$$

であるから，$f(2)=f(4)$ が成り立ち，$x>e$ において $f(x)$ は単調減少関数であることより，$f(m)=f(n)$ を満たす $(m,\ n)$ は $(m,\ n)=(2,\ 4)$ のみである。

(i)(ii) より，$m<n$ かつ $f(m)=f(n)$ を満たす自然数 $(m,\ n)$ $(m<n)$ の組は $\boldsymbol{(m,\ n)=(2,\ 4)}$ である。

補足　イメージは次の図のようになる。



③　①の増減により，$x>e$ において $f(x)$ は単調減少関数であるから，

$$
\begin{aligned}
& f(23)>f(24) \\
\iff & \frac{\log 23}{23}>\frac{\log 24}{24} \\
\iff & 24\log 23>23\log 24 \\
\iff & \log 23^{24}>\log 24^{23} \\
\iff & 23^{24}>24^{23}
\end{aligned}
$$

講評

1［小問集合］(易)：①図形と方程式，②複素数平面からの出題であった。①は tan を用いて解ける基本的な典型問題である。②も複素方程式の基本的な計算問題であるので，この大問での失点は避けたい。

2［整数の性質，図形と計量］（標準）：①は三角形 OAB が直角三角形であることから容易に半径が求まるので時間をかけずに得点したい。②はやや複雑な式を整理しないといけないが，整理できると典型的な不定方程式の問題に帰着される。

3［確率］（やや易）：①②はよくある基本的な問題である。③は①②の事象が排反であることを考えれば計算もほとんどない。①②を確実に得点し，③も正解まで辿り着きたい問題である。

4［Ⅲ微分法］（標準）：関数の増減を活用する典型問題である。類題を経験したことがある受験生も多いだろう。経験の差が如実に現れる問題であった。

例年に比べると全体的に易しくなった。どの大問もとっかかりやすい問題が多く，例年より高得点を要求させる内容ではないだろうか。1 次突破ボーダーは 65% 程度であろう。