解答速報

慶應義塾大学医学部　数学

2024年 2月19日実施

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1)　座標平面の 3 点 O$(0,\ 0)$, A$(3,\ 0)$, B$(1,\ \sqrt{3})$ を頂点とする三角形 OAB の外心の座標は $\left(\boxed{（あ）},\ \boxed{（い）}\right)$ であり，内心の座標は $\left(\boxed{（う）},\ \boxed{（え）}\right)$ である。

(2)　座標平面の第 1 象限の点 $(X,\ Y)$ において楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ と接する直線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $\boxed{（お）}$ である。また，原点を O，ℓ と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とすると，三角形 OPQ の面積は $(X,\ Y)=\left(\boxed{（か）},\ \boxed{（き）}\right)$ のときに最小値 $\boxed{（く）}$ をとる。

(3)　関数 $y=\cos x\sin 2x$ $\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値は $\boxed{（け）}$ である。また，この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積は $\boxed{（こ）}$ である。

解答

(1)　外心は各辺の垂直二等分線の交点である。

線分 OA の垂直二等分線は $x=\dfrac{3}{2}$ である。線分 OB の中点は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，垂直二等分線の傾きは $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるため，式は $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ である。

よって外心の y 座標は $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ となり，座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}\right)$ となる。

内心は各角の二等分線の交点である。三角形 OAB は x 軸上に辺があるため，内接円の半径が内心の y 座標である。

内接円の半径を計算する。三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である。また 3 辺の長さは

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2,\ \mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{7}$$

であるため，内接円の半径は $2\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{5+\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$ である。

$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であるため，$\angle\mathrm{AOB}$ の角の二等分線の式は $y=\tan 30^\circ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ である。この直線上に内心があるため，内心の半径は $\sqrt{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}=\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$ である。こうして内心の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}}\right)$ となる。

(2)　三角形 OPQ の面積を S とおく。

$(X,\ Y)$ で楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ と接する直線の式は $\dfrac{X}{3}x+\dfrac{Y}{2}y=1$ であるため，その傾きは $\boldsymbol{-\dfrac{2X}{3Y}}$ である。

また $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{X},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{2}{Y}\right)$ より $S=\dfrac{3}{XY}$ である。$(X,\ Y)$ は第 1 象限にある楕円上 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の点であるため，$Y=\sqrt{2-\dfrac{2}{3}X^2}$ となる。XY が最大値をとるとき，S は最小値をとる。

$$(XY)^2=-\frac{2}{3}X^4+2X^2=-\frac{2}{3}\left(X^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

より $X^2=\dfrac{3}{2}$，つまり $X=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき XY は最大値 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ を取る。このとき $Y=1$ である。

以上より，$(X,\ Y)=\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},1\right)}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{3}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$ をとる。

別解

$$\begin{aligned}S&=\frac{3}{XY}\cdot 1\\&=\frac{3}{XY}\left(\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{2}\right)\\&=\frac{X}{Y}+\frac{3Y}{2X}\\&\geqq 2\sqrt{\frac{X}{Y}\cdot\frac{3Y}{2X}}\\&=\sqrt{6}\end{aligned}$$

等号が成立するのは $\dfrac{X}{Y}=\dfrac{3Y}{2X}$ かつ $\dfrac{X^2}{3}+\dfrac{Y^2}{2}=1$ のときで，これを解くと $(X,\ Y)=\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ 1\right)}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ をとることが分かる。

(3)　$y=\cos x\sin 2x=2\sin x\cos^2 x=2\sin x(1-\sin^2 x)$ となる。ここで $t=\sin x$ とおくと $0\leqq t\leqq 1$ で $y=2t(1-t^2)$ となる。$\{2t(1-t^2)\}'=2-6t^2$ であるため，増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

となる。よって $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $2\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$ である。

囲まれた面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos^2 x\,dx&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 x(\cos x)'dx\\&=-\left[\frac{2}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

[II]

以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させなさい。
袋が 2 つ（袋 1 と袋 2）および赤玉 2 個，白玉 4 個が用意されている。それぞれの袋に玉が 3 個ずつ入った状態として，次の 3 つがあり得る。

状態 A： 袋 1 に入っている赤玉が 0 個である状態

状態 B： 袋 1 に入っている赤玉が 1 個である状態

状態 C： 袋 1 に入っている赤玉が 2 個である状態

上記の各状態に対して，次の 2 段階からなる操作 T を考える。

> 操作 T
> 袋 1 から玉を 1 個無作為に取り出し，それを袋 2 に入れる。次に，袋 2 から玉を 1 個無作為に取り出し，それを袋 1 に入れる。

(1) X, Y をそれぞれ A, B, C のいずれかとする。状態 X に対し操作 T を 1 回施した結果，状態 Y になる確率を $P(X \to Y)$ で表す。このとき

$$P(A \to A) = \boxed{（あ）},\quad P(A \to B) = \boxed{（い）},\quad P(B \to A) = \boxed{（う）},$$
$$P(B \to B) = \boxed{（え）},\quad P(C \to A) = \boxed{（お）},\quad P(C \to B) = \boxed{（か）}$$

(2) 以下，n を自然数とし，状態 B から始めて操作 T を繰り返し施す。操作 T を n 回施し終えたとき，状態 A である確率を a_n，状態 B である確率を b_n，状態 C である確率を c_n とする。 $n \geqq 2$ とするとき，a_n，b_n と a_{n-1}，b_{n-1}，c_{n-1} の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} a_n = \boxed{（あ）}a_{n-1} + \boxed{（う）}b_{n-1} + \boxed{（お）}c_{n-1} \\ b_n = \boxed{（い）}a_{n-1} + \boxed{（え）}b_{n-1} + \boxed{（か）}c_{n-1} \end{cases}$$

したがって，b_n と b_{n-1} の間には次の関係式が成り立つことが分かる。

$$b_n = \boxed{（き）}b_{n-1} + \boxed{（く）}$$

これより $n \geqq 1$ に対して b_n を n の式で表すと

$$b_n = \boxed{（け）} + \boxed{（こ）}\left(\boxed{（さ）}\right)^n$$

となる。さらに $d_n = \dfrac{a_n}{\left(\boxed{（あ）}\right)^n}$ とおくとき，d_n を n の式で表すと

$$d_n = \boxed{（し）}\left\{\left(\boxed{（す）}\right)^n - \left(\boxed{（せ）}\right)^n\right\}$$

となる。

解答

(1)

$$P(A \to A) = \frac{3}{3}\cdot\frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}},\quad P(A \to B) = \frac{3}{3}\cdot\frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}},\quad P(B \to A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$
$$P(B \to B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{2}{3}},\quad P(C \to A) = 0,\quad P(C \to B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2)　(1) より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1} + 0 \cdot c_n & \cdots\cdots ① \\ b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = 1 \iff a_{n-1} + c_{n-1} = 1 - b_{n-1}$ を②に代入して

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - b_{n-1}) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

この漸化式は $n = 1$ でも成立するので，これを解いて

$$\begin{aligned} b_n - \frac{3}{5} &= \frac{1}{6}\left(b_{n-1} - \frac{3}{5}\right) \\ \therefore\ b_n - \frac{3}{5} &= \left(b_0 - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \therefore\ b_n &= \boldsymbol{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad (\because b_0 = 1) \end{aligned}$$

ここで，$d_n = 2^n a_n$ であるので，①に $b_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ を代入して，両辺に 2^n をかけると，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} 2^n a_n &= 2^{n-1}a_{n-1} + \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore\ d_n &= d_{n-1} + \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立する。$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} d_n &= d_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{5} \cdot 2^k + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} \\ &= 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{5}\left\{2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}} \end{aligned}$$

（これは $n = 0$ のときも成立する。）

[III]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（2）に答えなさい。
$-1,\ 0,\ 1$ 以外のすべての実数 x に対して定義された関数

$$f(x)=\frac{1}{3x\left(x^2-1\right)}$$

を考える。

(1) $f(x)$ は $x=$ $\boxed{（あ）}$ において極小値 $\boxed{（い）}$ をとり，$x=$ $\boxed{（う）}$ において極大値を $\boxed{（え）}$ をとる。

(2) 曲線 $y=f(x)$ の概形を描きなさい。

(3) 直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ とちょうど 4 点で交わるとき，定数 m の値の範囲は $\boxed{（お）}$ である。

(4) $a=$ $\boxed{（か）}$，$b=$ $\boxed{（き）}$，$c=$ $\boxed{（く）}$ とすると，次の恒等式が成り立つ。

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$$

(5) 直線 $y=mx$(ただし $m>0$) が曲線 $y=f(x)$ と第 1 象限において交わる点 P の x 座標を $x(m)$ とし，

$$A(m)=\lim_{T\to\infty}\int_{x(m)}^{T}f(x)dx$$

とおいて，$A(m)$ を m の式で表すと，$A(m)=$ $\boxed{（け）}$ となる。また，原点を $\mathrm{O}(x(m),\ 0)$ を座標とする点を Q とし，三角形 OPQ の面積を $B(m)$ とおくと，$\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)}=$ $\boxed{（こ）}$ となる。

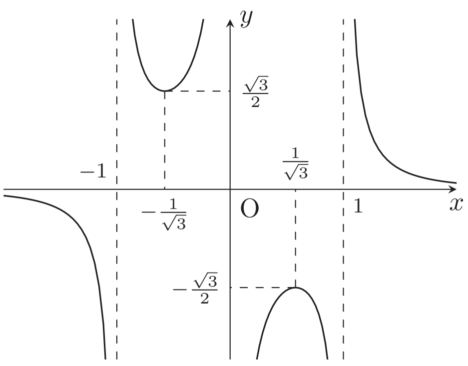
$\boxed{\text{解答}}$

(1) $f'(x)=-\dfrac{3x^2-1}{3x^2(x^2-1)^2}$ であるため増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	/	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$
$f(x)$	↘	/	↘	小	↗	/	↗	大	↘	/	↘

よって $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大値 $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ をとる。

(2) 下図のようになる。



(3)　$m=0$ のとき (2) のグラフから 4 点で交わることはないので $m \fallingdotseq 0$ としてよい。

原点を通る接線の傾きを求める。$(t,\ f(t))$ $(t \fallingdotseq 0,\ \pm 1)$ を通る接線の式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3t^2-1}{t^2(t^2-1)^2}(x-t)+\frac{1}{3t(t^2-1)} \\ &= \frac{-(3t^2-1)(x-t)+t(t^2-1)}{3t^2(t^2-1)} \end{aligned}$$

よりこれが原点を通るのは

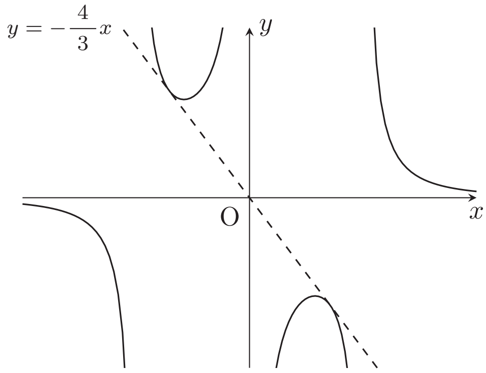
$$3t^3-t+t^3-t=0$$

であるとき。これを解くと $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

グラフの対称性より $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を考えれば十分である。

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

このとき $m=-\dfrac{4}{3}$ であるため，グラフより $m<-\dfrac{4}{3}$ である。



$\boxed{\text{別解}}$

$mx=\dfrac{1}{3x(x^2-1)}$ を整理すると $x^4-x^2=\dfrac{1}{3m}$ となる。これが 4 つの異なる実数解を持つ条件を求めればよい。

これを解くと $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}\right)}$（複号任意）となる。これらが異なる実数解となるのは

$$\begin{cases} 1+\dfrac{4}{3m}>0 & \cdots ① \\ 1-\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}>0 & \cdots ② \end{cases}$$

となるときである。① より $m<-\dfrac{4}{3}$，$m>0$ を得る。② となるのは $1+\dfrac{4}{3m}<1$ のときで，$m<0$ のときである。よって $\boldsymbol{m<-\dfrac{4}{3}}$ となる。

(4)　式を計算すると

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}=\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)}$$

となるため，係数を比較すると

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

となる。これを解くと $a=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}},\ b=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}},\ c=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ である。

(5)　(4) を用いると

$$\begin{aligned}
\int_{x(m)}^{T} f(x)dx &= \frac{1}{6}\int_{x(m)}^{T}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{6}\Big[\log|x-1|-2\log|x|+\log|x+1|\Big]_{x(m)}^{T} \\
&= \frac{1}{6}\left(\log\left|\frac{T^2-1}{T^2}\right|-\log\left|\frac{x(m)^2-1}{x(m)^2}\right|\right)
\end{aligned}$$

となる。

$$\lim_{T\to\infty}\log\left|\frac{T^2-1}{T^2}\right| = \log 1 = 0$$

より

$$A(m)=\frac{1}{6}\log\left|\frac{x(m)^2}{x(m)^2-1}\right|$$

となる。(3) の別解より $x(m)=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}\right)}$ であるため

$$\begin{aligned}
\frac{x(m)^2}{x(m)^2-1} &= \frac{\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}\right)}{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}-1\right)} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}\right)^2}{\left(1+\dfrac{4}{3m}\right)-1} \\
&= \frac{3m}{4}\left(2+\frac{4}{3m}+2\sqrt{1+\frac{4}{3m}}\right) \\
&= \frac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}
\end{aligned}$$

となる。$m>0$ より上の式は正である。よって

$$A(m)=\boldsymbol{\frac{1}{6}\log\left(\frac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)}.$$

$\mathrm{P}(x(m),\ m\cdot x(m))$ より

$$B(m)=\frac{1}{2}m\left\{x(m)\right\}^2$$

$$= \frac{m}{4}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{3m}}\right)$$

$$= \frac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{12}$$

である。よって

$$\frac{A(m)}{B(m)} = \frac{\dfrac{1}{6}\log\left(\dfrac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)}{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{12}}$$

$$= \frac{\log\left(1+\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)}{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}}$$

を得る。ここで $t = \dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}$ とおくと $m \to +0$ で $t \to +0$ である。ゆえに

$$\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)} = \lim_{t\to+0}\frac{\log(1+t)}{t} = \mathbf{1}.$$

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数，式，または記号を入れて文章を完成させなさい。ただし 空欄 (さ)，(し)，(す) には選択肢より適切な記号を選んで記入すること。

座標空間の 4 点 O(0, 0, 0)，A(−3, −1, 1)，B(2, −2, 2)，C(3, 3, 3) を頂点とする 四面体 OABC の，平面 $z=t$ による切り口を S_t とする。

(1) S_t は $1<t<2$ のとき四角形となり，$t=1$ および $t=2$ のとき三角形となる。 $1<t<2$ に対して，以下の条件を満たすように S_t の 4 つの頂点を W，X，Y，Z と定める。

条件： t を 1 に限りなく近づけるとき W と X が限りなく近づき，t を 2 に限りなく近づけるとき W と Y が限りなく近づく。

このとき W，X，Y，Z の座標は

$$\mathrm{W}\left(\boxed{（あ）},\ \boxed{（い）},\ t\right),\quad \mathrm{X}\left(\boxed{（う）},\ \boxed{（え）},\ t\right),$$
$$\mathrm{Y}\left(\boxed{（お）},\ \boxed{（か）},\ t\right),\quad \mathrm{Z}\left(\boxed{（き）},\ \boxed{（く）},\ t\right)$$

となる。

(2) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき，S_t の面積を $A(t)$ とすると，$A(t)=$ $\boxed{（け）}$ である。これより四面体 OABC の体積 V を求めると $V=$ $\boxed{（こ）}$ となる。

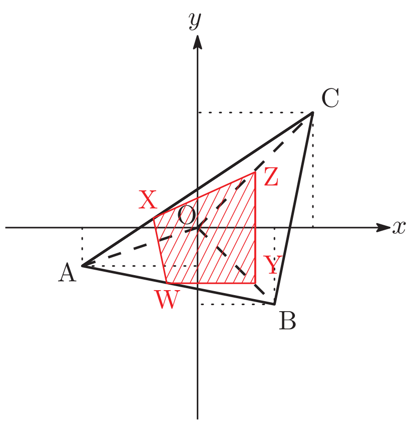
(3) 点 D(6, 2, 4) を追加すると，5 点 O, A, B, C, D は 6 つの三角形 OAB, OBC, OAC, $\boxed{（さ）}$, $\boxed{（し）}$, $\boxed{（す）}$ を面とする六面体の頂点である。3 点 A，B，C を通る平面 α と線分 OD との交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つように u, v を定めると $u=$ $\boxed{（せ）}$, $v=$ $\boxed{（そ）}$ である。したがって $u+v>1$ となるので，点 E はこの六面体の外にある。

選択肢： ABC, ABD, ACD, BCD, OAD, OBD, OCD

(4) $1<t<2$ に対して，(3) の六面体を平面 $z=t$ で切った切り口の面積を $U(t)$ とすると，$U(t)$ は $t=$ $\boxed{（た）}$ (ただし $1<$ $\boxed{（た）}$ <2) において最大値 $\boxed{（ち）}$ をとる。

解答

(1) 四面体 OABC を平面 $z=t$（$1<t<2$）で切った切り口を z 軸方向の上側から見ると，次の図のようになる。



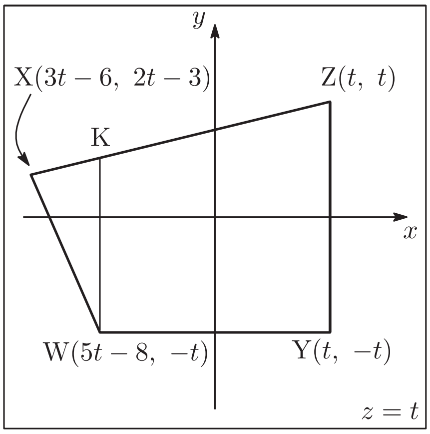
条件より，W，X，Y，Z の位置は上の図のようになる。
W は AB を $t-1:2-t$，X は AC を $t-1:3-t$，Y は OB を $t:2-t$，Z は OC を $t:3-t$ にそれぞれ内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OW}} = (2-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (5t-8,\ -t,\ t)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{3-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3t-6,\ 2t-3,\ t)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (t,\ -t,\ t)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (t,\ t,\ t)$$

であるから，

$$\mathbf{W}(\mathbf{5}\boldsymbol{t}-\mathbf{8},\ -\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}),\ \mathbf{X}(\mathbf{3}\boldsymbol{t}-\mathbf{6},\ \mathbf{2}\boldsymbol{t}-\mathbf{3},\ \boldsymbol{t}),\ \mathbf{Y}(\boldsymbol{t},\ -\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}),\ \mathbf{Z}(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t})$$

(2)　$1 < t < 2$ とする。

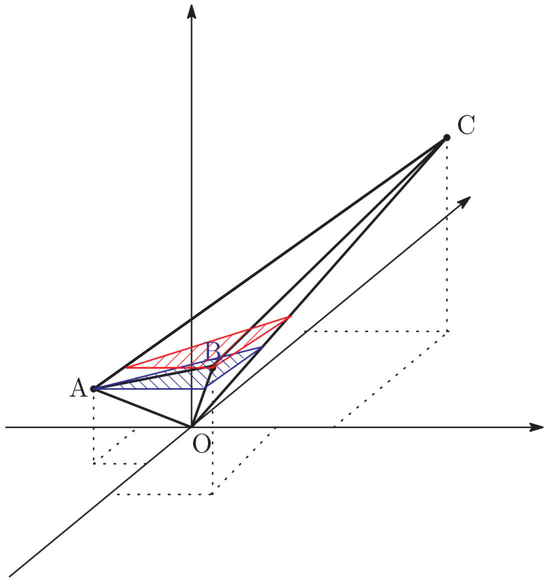


平面 $z=t$ 上において，点 W を通り y 軸に平行は直線と直線 XZ の交点を K とする。
$z=t$ 上において，直線 XZ は $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}t$ であるから，

$$\mathrm{K}(5t-8,\ 3t-4)$$

である。よって，

$$\begin{aligned}
A(t) &= (\triangle\mathrm{WXZ}\text{ の面積}) + (\triangle\mathrm{WYZ}\text{ の面積}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{KW}\cdot(6-2t) + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{WY}\cdot\mathrm{ZY} \\
&= (4t-4)(3-t) + (8-4t)t \\
&= \boldsymbol{-8t^2+24t-12}\ \ (t=1,\ 2\text{ のときも成立する})
\end{aligned}$$



四面体 OABC の平面 $z=1$，平面 $z=2$ による切り口との面積はそれぞれ

$$A(1)=4,\ A(2)=4$$

であり，四面体 OABC を 2 平面 $z=1$，$z=2$ で分割することにより，四面体 OABC の体積 V を求めると

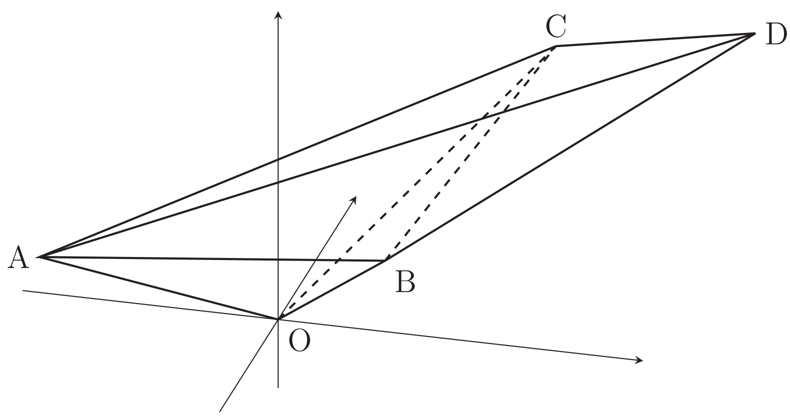
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot A(1)\cdot 1+\int_1^2 A(t)dx+\frac{1}{3}\cdot A(2)\cdot 1 \\ &= \frac{8}{3}+\left[-\frac{8}{3}t^3+12t^2-12t\right]_1^2=\mathbf{8} \end{aligned}$$

注釈

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

として求めた方が早いかもしれない。

(3)



図より，点 D を追加すると，

$$\triangle\mathrm{OAB},\ \triangle\mathrm{OBC},\ \triangle\mathrm{OAC},\ \boldsymbol{\triangle\mathrm{ABD},\ \triangle\mathrm{ACD},\ \triangle\mathrm{BCD}}$$

を面とする六面体である。

点 E は平面 ABC 上にあるので，実数 u，v を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{AB}} + v\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。また，点 E は線分 OD 上にあるので，$0 \leqq s \leqq 1$ の範囲の実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \cdots\cdots ②$$

とも表せる。①，②より，

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

これを解いて，

$$\boldsymbol{u = \frac{3}{5},\ v = \frac{4}{5}},\ s = \frac{4}{5}$$

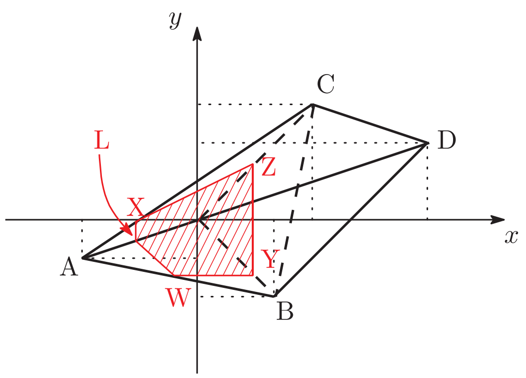
(4)　$1 < t < 2$ とする。

直線 OD と平面 $z = t$ の交点を L とすると，L は AD を $t-1 : 2-t$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{2-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t-1}{2} = (3t-6,\ t-2,\ t)$$

である。

六面体を平面 $z = t$（$1 \leqq t \leqq 2$）で切った切り口は下の図のようになる。



よって，

$$\begin{aligned} U(t) &= (\triangle \mathrm{LXW}) + (\text{四角形 XWYZ の面積 } A(t)) \\ &= \frac{1}{2}\left|(2t-2)(t-1) - (-2t+2)\cdot 0\right| + A(t) \\ &= (t-1)^2 + (-t^2 + 24t - 12) \\ &= -7t^2 + 22t - 11 \\ &= 7\left(t - \frac{11}{7}\right)^2 + \frac{44}{7} \end{aligned}$$

であるから，$t = \boldsymbol{\frac{11}{7}}$ において最大値 $\boldsymbol{\frac{44}{7}}$ をとる。

講評

［I］［小問集合］（易）
図形と方程式・楕円・微積分からの出題であった。どれも難しくないため確実に得点しておきたい。

［II］［確率漸化式］（易）
オードソックスな確率漸化式の問題であった。誘導も丁寧であるため完答を狙いたい。

［III］［極限，微分，積分］（標準）
これも基本的な問題である。誘導が丁寧であるため解きやすいため，要所要所で計算ミスを避けたいところ。最後は自然対数の底の定義を思い出せば簡単に計算できる。

［IV］［空間図形］（標準）
全体図をイメージするのは難しい。機械的に断面の図形を計算すればよいだろう。

全体的に易しいセットであった。前半は完答したい。後半も誘導にうまく乗れば簡単であるが，丁寧に計算しないとケアレスミスに泣くことになる。時間を考えると一次突破ラインは 70～75 % 程度か。