医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本医科大学(前期)　数学

2024年2月1日実施

[I]

角 α を $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。三角形 OAB は $\mathrm{OA}=2$, $\mathrm{OB}=3$, $\alpha<\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとし，三角形 OAB の垂心を H とする。$x=\cos\angle\mathrm{AOB}$ とおくとき，以下の各問い $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に入る適切な数を求めよ。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ は 1 以上の整数で答えよ。また $\boxed{\text{ス}}$ に関しては下の指示に従うこと。

問 1　x の動く範囲は $\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ である。

問 2　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は次のようになる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{x(\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}x)}{\boxed{\text{オ}}(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{x(\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}x)}{\boxed{\text{ク}}(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

問 3　三角形 HAB の面積 $S(x)$ は次のように表せる。

$$S(x)=\frac{\boxed{\text{ケ}}x^2-\boxed{\text{コ}}x+\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}\sqrt{1-x^2}}$$

問 4　x が問 1 で求めた範囲を $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{イ}}$ まで動くとき（ただし，端点は除く），問 3 の $S(x)$ は，$\boxed{\text{ス}}$。

上記の文中のに当てはまるものを，次の（あ）～（え）の中から 1 つ選べ。なお，以下の選択肢において，c は $\boxed{\text{ア}}<c<\boxed{\text{イ}}$ を満たす定数とする。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には問 1 で求めた数が入る。

(あ) 単調に増加する
(い) 単調に減少する
(う) $\boxed{\text{ア}}<x<c$ で増加し，$c<x<\boxed{\text{イ}}$ で減少する。
(え) $\boxed{\text{ア}}<x<c$ で減少し，$c<x<\boxed{\text{イ}}$ で増加する。

解答

問 1　$\alpha<\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ より，

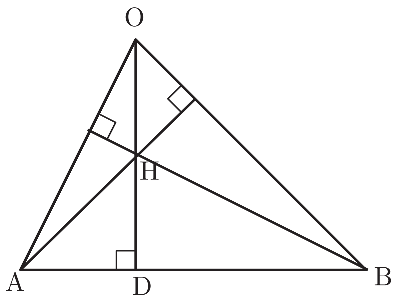
$$\cos\frac{\pi}{2}<\cos\angle\mathrm{AOB}<\cos\alpha$$

$$\therefore\ \boldsymbol{0<x<\frac{2}{3}}$$

問 2　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot3\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}=6x$$

である。また p，q を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。



H は △OAB の垂心であるから

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}\iff\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ (\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}\qquad(\to\text{注釈})$$

$$\iff\begin{cases}(p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ (p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}4p+6xq=6x\\ 6xp+9q=6x\end{cases}$$

$$\therefore\ p=\frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)},\ q=\frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boldsymbol{\frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

注釈

内積の図形的な意味を考えれば自明な式なので，すぐにこの立式が可能である。

問 3　問 2 より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{x(13-12x)}{6(1-x^2)}\left\{\frac{3x(3-2x)}{x(13-12x)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2x(2-3x)}{x(13-12x)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}$$

と変形でき，{} 内のベクトルの終点は AB 上の点（D とする）であるから，

$$\mathrm{AD}:\mathrm{HD}=1:1-\frac{x(13-12x)}{6(1-x^2)}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \left\{1-\frac{x(13-12x)}{6(1-x^2)}\right\}\cdot\triangle\mathrm{OAB} \\
&= \frac{6x^2-13x+6}{6(1-x^2)}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin\angle\mathrm{AOB} \\
&= \frac{6x^2-13x+6}{6(1-x^2)}\cdot 3\sqrt{1-x^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{6x^2-13x+6}{2\sqrt{1-x^2}}}
\end{aligned}$$

問 4　$0<x<\dfrac{2}{3}$ における $S(x)$ の増減を調べる。

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(12x-13)\sqrt{1-x^2}-(6x^2-13x+6)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
&= \frac{-6x^3+18x-13}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

ここで $g(x)=-6x^3+18x-13$ とおくと，$0<x<\dfrac{2}{3}$ において

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -18x^2+18 \\
&= -18(x^2-1)>0
\end{aligned}$$

であるから,

$g(x)$ は $0<x<\dfrac{2}{3}$ において単調に増加する。

さらに $g\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{16}{9}-1<0$ も踏まえれば

$0<x<\dfrac{2}{3}$ において常に $g(x)<0$ とわかる。したがって,

$$S'(x)=\frac{g(x)}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}<0$$

であるから，$0<x<\dfrac{2}{3}$ において $S(x)$ は **単調に減少する。(い)**

[Ⅱ]

以下では，$m=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ \ n=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ \ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ m$ とする。中が見えない袋の中に，互いに区別のつかない白玉が m 個，互いに区別のつかない赤玉が n 個入つている。この袋の中から無作為に 1 個の玉を取り出し，その玉の色を確認したあとに取り出した玉を袋の中に戻すという操作を m 回繰り返す。この試行において赤玉が k 回取り出される確率を $p_{m,n}(k)$ とし，$q_{m,n}$，R_n，$S_n(k)$ を次式で定めるとき，以下の各問いに答えよ。

$$q_{m,n}=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot p_{m,n}(k),\quad R_n=\lim_{m\to\infty}q_{m,n},\quad S_n(k)=\lim_{m\to\infty}p_{m,n}(k)$$

問 1　$q_{m,n}$ は

$$q_{m,n}=\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^{\boxed{\text{ウ}}}$$

と表せる。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な m，n の整式を求めよ。答えのみでよい。

問 2　極限 R_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　極限 $S_n(k)$ を n，k を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}R_n\cdot S_n(3)\right\}$$

解答

問 1　白玉 m 個，赤玉 n 個の計 $(m+n)$ 個の玉の入った袋から 1 個の玉を取り出すとき，

赤玉を取り出す確率は $\dfrac{n}{m+n}$ である。

袋から玉を 1 個取り出して玉を戻す試行を m 回おこなうとき，

赤玉を k 回取り出す確率 $p_{m,n}(k)$ は

$$p_{m,n}(k)={}_m\mathrm{C}_k\left(\frac{n}{m+n}\right)^k\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}q_{m,n}&=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot p_{m,n}(k)\\&=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot{}_m\mathrm{C}_k\left(\frac{n}{m+n}\right)^k\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}\\&=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k\left(\frac{2n}{m+n}\right)^k\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}\\&=\left(\frac{2n}{m+n}+\frac{m}{m+n}\right)^m\qquad(\because\ \text{二項定理})\\&=\boldsymbol{\left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^{m}}\end{aligned}$$

問 2

$$
\begin{aligned}
R_n &= \lim_{m\to\infty} q_{m,n} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m+2n}{m+n}\right)^m \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{n}{m+n}\right)^m \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{\frac{m+n}{n}}\right)^{\frac{m+n}{n}}\right\}^{\frac{mn}{m+n}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{\frac{m+n}{n}}\right)^{\frac{m+n}{n}}\right\}^{\frac{n}{1+\frac{n}{m}}} \\
&= \boldsymbol{e^n}
\end{aligned}
$$

問 3

$$
\begin{aligned}
S_n(k) &= \lim_{m\to\infty} p_{m,\ n}(k) \\
&= \lim_{m\to\infty} {}_m\mathrm{C}_k \left(\frac{n}{m+n}\right)^k \left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k} \\
&= \lim_{m\to\infty} {}_m\mathrm{C}_k \left(\frac{n}{m+n}\right)^k \left(\frac{m+n}{m}\right)^k \left(\frac{m+n}{m}\right)^{-m} \\
&= \lim_{m\to\infty} {}_m\mathrm{C}_k \left(\frac{n}{m}\right)^k \left(\frac{m+n}{m}\right)^{-m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \left(\frac{n}{m}\right)^k \left(\frac{m+n}{m}\right)^{-m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{k!}\cdot n^k \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}^{-n} \\
&= \frac{1}{k!}\cdot n^k \cdot e^{-n} \\
&= \boldsymbol{\frac{n^k}{k!\cdot e^n}}
\end{aligned}
$$

問 4

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N} R_n\cdot S_n(3)\right\} &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N} e^n\cdot\frac{n^3}{3!\cdot e^n} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{6N^4}\sum_{n=1}^{N} n^3 \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{6N^4}\cdot\frac{1}{4}N^2(N+1)^2 \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{24}\left(1+\frac{1}{N}\right)^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24}}
\end{aligned}
$$

[III]

1 以上の整数 n に対して，I_n，J_n を次式で定める (ただし，e は自然対数の底である)。

$$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin(nx)|dx,\quad J_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|}dx$$

問 1　正の定数 a に対して，次の定積分の値を a を用いて表せ。答えのみでよい。

$$K(a)=\int_0^{\pi}e^{-ax}\sin xdx$$

問 2　正の定数 b に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)$ の値を b を用いて表せ。

問 3　I_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{n\pi}J_n$ の値を求めよ。

解答

問 1　部分積分を繰り返す。

$$\begin{aligned}K(a)&=\int_0^{\pi}e^{-ax}\sin xdx\\&=\Big[-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin x\Big]_0^{\pi}+\frac{1}{a}\int_0^{\pi}e^{-ax}\cos xdx\\&=0+\frac{1}{a}\left\{\Big[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos x\Big]_0^{\pi}+\frac{1}{a}\int_0^{\pi}e^{-ax}\sin xdx\right\}\\&=\frac{e^{-a\pi}+1}{a^2}+\frac{1}{a^2}K(a)\end{aligned}$$

整理すると $K(a)=\boldsymbol{\dfrac{e^{-a\pi}+1}{a^2+1}}$ となる。

注釈

方法はさまざまあるが，私立医学部受験生であれば

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$
$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$$

を公式としても覚えておきたい。

問 2　$n=-\dfrac{b}{m}$ と置き換えると

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)=\lim_{m\to-0}\frac{b(e^m-1)}{m}=\boldsymbol{b}$$

問 3　まず，x を $s+n\pi$ に置換する。このとき $dx=ds$ であり，

$$I_n=\int_0^{\pi}e^{-s-n\pi}|\sin ns|ds$$

次に s を $\dfrac{t}{n}$ に置換する。このとき $ds=\dfrac{dt}{n}$ であり，

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{e^{-n\pi}}{n}\int_0^{n\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|dt \\ &= \frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|dt\end{aligned}$$

となる。$A_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|dt$ とおき，詳しく計算する。$t=u+k\pi$ と置換し計算すると

$$\begin{aligned}&\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{-\frac{u}{n}-\frac{k\pi}{n}}\sin u du \\ &= e^{-\frac{k\pi}{n}}\int_0^{\pi} e^{-\frac{u}{n}}\sin u du\end{aligned}$$

ここで問 1 より

$$\begin{aligned}A_k &= e^{-\frac{k\pi}{n}}\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}+1}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+1} \\ &= \frac{n^2(e^{-\frac{\pi}{n}}+1)}{n^2+1}e^{-\frac{k\pi}{n}}\end{aligned}$$

となる。こうして

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{e^{-n\pi}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2(e^{-\frac{\pi}{n}}+1)}{n^2+1}e^{-\frac{k\pi}{n}} \\ &= \frac{ne^{-n\pi}(e^{-\frac{\pi}{n}}+1)}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^k \\ &= \frac{ne^{-n\pi}(e^{-\frac{\pi}{n}}+1)}{n^2+1}\frac{1-(e^{-\frac{\pi}{n}})^n}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}} \\ &= \boldsymbol{\frac{ne^{-n\pi}}{n^2+1}\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}(1-e^{-\pi})}\end{aligned}$$

問 4　$0 \leqq |\cos(nx)| \leqq 1$ より

$$\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1} \leqq \frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|} \leqq \frac{|\sin(nx)|}{e^x}$$

となる。各辺を $n\pi$ から $(n+1)\pi$ で積分し $e^{n\pi}$ を掛けると

$$e^{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1}dx \leqq e^{n\pi}J_n \leqq e^{n\pi}I_n \qquad \cdots(1)$$

となる。

問 3 より

$$e^{n\pi}I_n = \frac{n}{n^2+1}\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}(1-e^{-\pi})$$

$$= \frac{n^2}{n^2+1}\frac{1+e^{-\frac{\pi}{n}}}{n(1-e^{-\frac{\pi}{n}})}(1-e^{-\pi})$$

問 2 より $\lim_{n\to\infty} n(1-e^{-\frac{\pi}{n}}) = \pi$ であるため,

$$\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}I_n = 1\cdot\frac{1+1}{\pi}(1-e^{-\pi}) = \frac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$$

となる。
一方

$$\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1}e^{-x}|\sin(nx)|$$

となり, $\frac{e^x}{e^x+1}$ は x について単調増加であることから, $n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ で $\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1} \leqq \frac{e^x}{e^x+1}$ となる。
よって

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}I_n \leqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1}dx$$

となる。特に (1) とあわせると

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}e^{n\pi}I_n \leqq e^{n\pi}J_n$$

となる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1} = 1$$

であるため

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}e^{n\pi}I_n = \frac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$$

となる。こうして, はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}J_n = \boldsymbol{\frac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}}$ となる。

別解

$\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}I_n$ は区分求積法を用いて計算することもできる。

$$\begin{aligned} e^{n\pi}I_n &= \frac{n(e^{-\frac{\pi}{n}}+1)}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{k\pi}{n}} \\ &= \frac{n^2}{n^2+1}(1+e^{-\frac{\pi}{n}})\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-\frac{k}{n}}\right)^{\pi} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{k\pi}{n}} &= \int_0^1 e^{-\pi x}dx \\ &= \Big[-\frac{e^{-\pi x}}{\pi}\Big]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} \end{aligned}$$

となるため

$$\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}I_n = 1\cdot(1+1)\cdot\frac{1-e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$$

と計算できる。

[Ⅳ]

k を正の定数とする。O を原点とする座標空間において，zx 平面内の曲線 $C_1 : z^2 - x^2 = 1\ (z > 0)$，および xy 平面内の楕円 $C_2 : k^2x^2 + \dfrac{k^2}{k+1}y^2 = 1$ を考える。 zx 平面内の C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2}\right)$ (ただし，$t \geqq 0$) における C_1 の接線を L_1 とし，L_1 と直線 $x = z$ の交点を Q，L_1 と直線 $x = -z$ の交点を R とする。また，楕円 C_2 の焦点のうち y 座標が正の点を F とし，座標空間において直線 L_1 と点 F を通る平面を π とする。平面 π と xy 平面の交線を L_2 とし，直線 L_2 と楕円 C_2 の相異なる 2 つの交点を S，T とする。このとき，以下の各問いに答えよ。ただし，空間内の相異なる 2 点 X，Y に対して，XY は線分 XY の長さを表す。

問 1　次の方程式が zx 平面内の直線 L_1 を表すように，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を t を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

問 2　次の方程式が平面 π を表すように $\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な式を k を用いて表せ。答えのみでよい。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には問 1 で求めた式が入る。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{ウ}}\,y + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

問 3　QR を t を用いて表せ。また，ST を t，k を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　0 以上の実数 t に対して $f_k(t) = \dfrac{\mathrm{ST}}{\mathrm{QR}}$ と定める。 $f_k(t)$ を t の関数と考えたとき，$f_k(t)$ が極値をとるための k に対する必要十分条件を求めよ。

解答

問 1　zx 平面上において，双曲線の接線の公式を用いて

$$L_1 : \sqrt{1+t^2}z - tx = 1$$

$$\therefore\ L_1 : \boldsymbol{-tx + \sqrt{1+t^2}z = 1}$$

問 2　直線 L_1 と x 軸，z 軸との交点はそれぞれ $\left(-\dfrac{1}{t},\ 0,\ 0\right)$，$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

また，焦点 F は $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{k+1}{k^2}$ に注意して $\left(0,\ \sqrt{\dfrac{k+1}{k^2} - \dfrac{1}{k^2}},\ 0\right)$，すなわち $\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{k}},\ 0\right)$

よって，平面 π の方程式は

$$\frac{1}{-\frac{1}{t}}x + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}}y + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}z = 1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{-tx + \sqrt{k}y + \sqrt{1+t^2}z = 1}$$

注釈

解法はさまざまある。問 1 を利用する方法が一番早いだろう。平面 π の方程式を $-tx + by + \sqrt{1+t^2}z = 1$ とおいて，これが $\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{k}},\ 0\right)$ を通ることから，$b = \sqrt{k}$ と決定できる。

問 3　2 点 Q，R の座標を求めると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\right),\ \mathrm{R}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}\right)$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\right)^2\\ &= 4(1+2t^2)\end{aligned}$$

すなわち

$$\mathrm{QR} = \boldsymbol{2\sqrt{1+2t^2}}$$

問 2 より，直線 $L_2 : -tx+\sqrt{k}y=1 \iff y=\dfrac{1}{\sqrt{k}}(tx+1)$ である。楕円 $C_2 : k^2x^2+\dfrac{k^2}{k+1}y^2=1$ と連立して (y を消去して)

$$\begin{aligned}&k^2x^2+\frac{k^2}{k+1}\cdot\frac{1}{k}(tx+1)^2=1\\ \iff &k(k^2+k+t^2)x^2+2ktx-1=0 \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$k(k^2+k+t^2)\fallingdotseq 0$ より，判別式を D とすると

$$D/4=k^2t^2+k(k^2+k+t^2)>0 \quad (\because k>0,\ t\geqq 0)$$

となるので，① は異なる 2 実数解をもつ。(直線 L_2 は楕円 C_2 の焦点 F を通るので，この 2 曲線が異なる 2 つの交点をもつのは明らかである。)

この 2 実数解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とすると，直線 L_2 の傾きに注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{ST}^2 &= \left(\frac{\sqrt{k+t^2}}{\sqrt{k}}|\beta-\alpha|\right)^2\\ &= \frac{k+t^2}{k}\cdot\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\\ &= \frac{k+t^2}{k}\cdot\left\{\frac{4t^2}{(k^2+k+t^2)^2}-4\left(\frac{-1}{k(k^2+k+t^2)}\right)\right\}\\ &\qquad (\because \text{解と係数の関係})\\ &= \frac{4(k+t^2)}{k}\cdot\frac{kt^2+k^2+k+t^2}{k(k^2+k+t^2)^2}\\ &= \frac{4(k+t^2)}{k}\cdot\frac{(k+t^2)(k+1)}{k(k^2+k+t^2)^2}\\ &= \frac{4(k+1)(k+t^2)^2}{k^2(k^2+k+t^2)^2}\end{aligned}$$

すなわち，$k>0,\ t\geqq 0$ に注意して

$$\mathrm{ST} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{k+1}(k+t^2)}{k(k^2+k+t^2)}}$$

問 4　これまでの結果より

$$f_k(t)=\frac{\sqrt{k+1}}{k}\cdot\frac{k+t^2}{(k^2+k+t^2)\sqrt{2t^2+1}}$$

$f_k(t)\ (t\geqq 0)$ が極値をとることは $f_k'(t)$ が $t>0$ において符号変化することと同値であるので，

以下，$\dfrac{k+t^2}{(k^2+k+t^2)\sqrt{2t^2+1}}$ $(=g_k(t)\ (t>0)$ とする$)$ の導関数 $g_k'(t)$ が $t>0$ において符号変化する条件を考

える。$g_k'(t)$ の分母 >0 であるので，分子 $h_k(t)$ を考えると，$k+t^2$ などの塊に注意して適宜計算して

$$\begin{aligned} h_k(t) &= 2t(k^2+k+t^2)\sqrt{2t^2+1}-(k+t^2)\left\{2t\sqrt{2t^2+1}+(k^2+k+t^2)\cdot\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\right\} \\ &= \frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}[(k^2+k+t^2)(2t^2+1)-(k+t^2)\{(2t^2+1)+(k^2+k+t^2)\}] \\ &= -\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\{t^4-(k^2-2k)t^2+k^3\} \end{aligned}$$

$t>0$ において $-\dfrac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}<0$ であるので，$t^4-(k^2-2k)t^2+k^3$ が符号変化する条件を考えると，$k^3>0$ であることと複 2 次式であることに注意して

$$\frac{k^2-2k}{2}>0,\ \text{かつ}\ (k^2-2k)^2-4k^3>0$$

$k>0$ に注意してこれらを解くことで，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{4+2\sqrt{3}<k}$$

講評

［Ⅰ］［ベクトル］（標準）：垂心が絡んだ典型的なベクトルの問題であった。ここは丁寧に計算して完答を狙いたい。

［Ⅱ］［確率，極限］（標準）：見た目は複雑だが，計算してみると比較的単純に計算できる。問 1 では二項定理に気付きたい。問 2 では e の定義に気付きたい。

［Ⅲ］［積分，極限］（やや難）：I_n の形自体はよくある典型的なものであるが，煩雑な計算をすることになる。問 2 までは確実に得点したい。問 4 は I_n を用いることを考えれば少々見通しが良くなるだろう。

［Ⅳ］［空間図形，二次曲線］（やや難）：何を計算するべきか自体は簡単に分かるが，実際に計算するとなるとかなり大変であっただろう。問 1，2 と問 3 の QR までは比較的簡単に計算できるため，得点しておきたいところだ。

昨年度と比べて計算量が増した。テクニカルな発想はそこまで必要ではないが，高い計算力が求められるセットであった。一次突破ラインは 55% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録