解答速報

埼玉医科大学（前期）　数学

2024年 2月2日実施

$\boxed{1}$

次の問い（問 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　関数 $f(x) = (1-x)e^{1-x}$ は $x = \boxed{1}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{2}\,\boxed{3}}{e^{\boxed{4}}}$ をとり，$y = f(x)$ の変曲点は

$\left(\boxed{5},\ \dfrac{\boxed{6}\,\boxed{7}}{e^{\boxed{8}}}\right)$ である。

問 2　座標平面上の 3 つの曲線

$$
\begin{aligned}
&C_1 : x^2 - x + y^2 = 2 \quad (y \geqq 0)\\
&C_2 : x = \cos\theta, y = \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)\\
&C_3 : y = \sqrt{-x^2 + 2x}
\end{aligned}
$$

で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{9}\,\boxed{10}\,\pi - \boxed{11}\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{13}\,\boxed{14}}$ である。

解答

問 1

$$f(x) = (1-x)e^{1-x}$$

$$f'(x) = (x-2)e^{1-x}$$

$$f'(x) = (3-x)e^{1-x}$$

である。したがって，$f(x)$ の増減，凹凸は次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		極小		変曲点	

したがって，

$$x = 2 \text{ のとき最小値 } f(2) = \boldsymbol{\frac{-1}{e}}$$

$$\text{変曲点の座標は} \left(\boldsymbol{3,\ \frac{-2}{e^2}}\right)$$

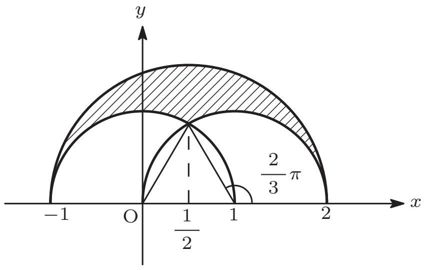
問 2

$$C_1 \ : \ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4} \quad (y \geqq 0)$$

$$C_2 \ : \ x^2+y^2=1 \quad (y \geqq 0)$$

$$C_2 \ : \ (x-1)^2+y^2=1 \quad (y \geqq 0)$$

であるから，求めるのは下図の斜線部分の面積である。



したがって，求める面積は，

半径 $\dfrac{3}{2}$ の半円の面積から，半径 1 で中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇型を 2 つと 1 辺の長さが 1 の正三角形の面積を除いて，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right\}\times 2-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{\pi}{3} \\
=\ &\frac{9}{8}\pi-\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4} \\
=\ &\boldsymbol{\frac{11\pi-6\sqrt{3}}{24}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注釈}}$

面積の求め方は対称性に注目するなどしてもよい。

$\boxed{2}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

$$f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x$$

とする。

問 1　曲線 $y = f(x)$ と y 軸の交点 A におけるこの曲線の法線の傾きは $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$ である。

問 2　$t \neq 0$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における $y = f(x)$ の接線 l がこの曲線と交わる点を $\mathrm{Q}(q, f(q))$ とする。ただし，Q は P と異なる。このとき，$q = \boxed{17}\,\boxed{18}\,t$ である。

問 2　Q における $y = f(x)$ の接線 l' が l と直交するとき，$t = \pm\dfrac{\sqrt{\boxed{19}\,\boxed{20}}}{\boxed{21}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1

$$f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}$$

曲線 $y = f(x)$ と y 軸との交点は $\mathrm{A}(0,\ 0)$ である。

$y = f(x)$ の $(0,\ 0)$ における法線の傾きは $\dfrac{-1}{f'(0)} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

問 2　接線 l の方程式を $y = l(x)$ とする。曲線 $y = f(x)$ と $y = l(x)$ の共有点の x 座標は

$$f(x) = l(x)$$

$$x^3 - \frac{4}{3}x - l(x) = 0$$

の解であるが，それが $x = t$ (重解) と $x = q$ である。

$l(x)$ が x の 1 次式であることに注意して，3 次方程式の解と係数の関係より

$$t + t + q = 0$$

$$\therefore\ \ q = \boldsymbol{-2t}$$

$\boxed{\text{別解}}$

曲線 $y = f(x)$ の $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)(x - t) + t^3 - \frac{4}{3}t$$

$$y = \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)x - 2t^3$$

これと $y = f(x)$ を連立して

$$x^3 - \frac{4}{3}x = \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)x - 2t^3$$

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$

$$(x - t)^2(x + 2t) = 0$$

$$\therefore\ \ x = t,\ -2t$$

よって，$q = \boldsymbol{-2t}$ である。

問 3　l' の傾きは $f'(-2t)$ である。

よって，$l \perp l'$ となるとき

$$
\begin{aligned}
& f'(t) \times f'(-2t) = -1 \\
& \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)\left(12t^2 - \frac{4}{3}\right) = -1 \\
& 36t^4 - 20t^2 + \frac{25}{9} = 0 \\
& \left(6t^2 - \frac{5}{3}\right)^2 = 0 \\
& t^2 = \frac{5}{18} \\
\therefore\ & t = \pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{6}}
\end{aligned}
$$

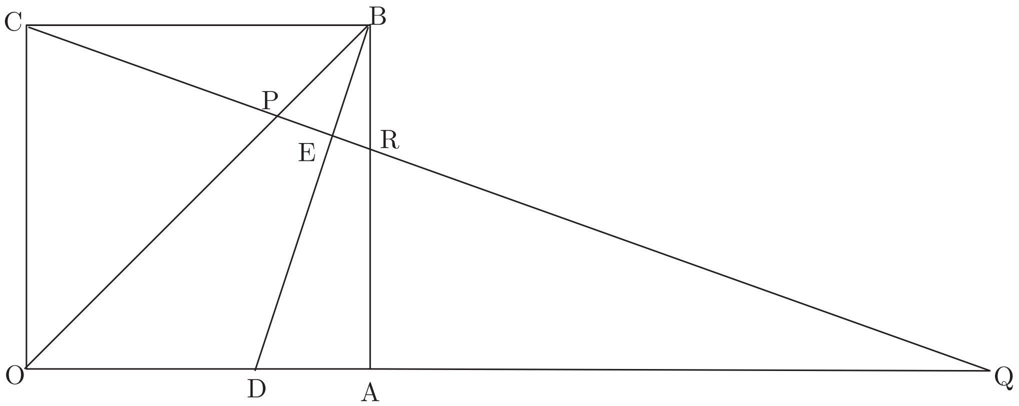
注釈

正確には $f'(t) \fallingdotseq 0$，$f'(t) =$ のときで場合分けが必要である。ただし，l' が x 軸に垂直になることはないので，上記では省略した。

$\boxed{3}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

図のような $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OC}=2\sqrt{2}$ である長方形 OABC がある。線分 OA を 2:1 に内分する点を D，線分 DB を 2 : 1 に内分する点を E とする。OB と CE の交点を P とする。



問 1　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{\boxed{22}}\left(\boxed{23}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boxed{24}\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}\,\boxed{27}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

問 2　CP の延長と OA の延長が交わる点を Q とすると，Q は OA を $\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$: 1 に外分する。

問 3　PQ と AB の交点を R とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\boxed{30}$ なので，

$$\angle\mathrm{BER}=\frac{\boxed{31}}{\boxed{32}}\pi$$

である。

問 4　△AQR と △ABD の面積比は

$$\frac{\triangle\mathrm{AQR}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\frac{\boxed{33}\,\boxed{34}}{\boxed{35}}$$

である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　E は BD を 1 : 2 に内分しているため，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(\mathbf{2\overrightarrow{OB}}+\mathbf{\overrightarrow{OD}}\right)$。

O，P，B は同一直線上にあるため，実数 t によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad\cdots①$$

と表される。一方, C, P, E もまた同一直線上にあるため, 実数 s $(0 \leqq s \leqq 1)$ によって $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と表される。変形すると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OE}} \\
&= (1-s)(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\
&= (1-s)(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}s \times \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \left(\frac{11}{9}s - 1\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \frac{1}{3}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots②
\end{aligned}$$

である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は一次独立であるため，① , ② の係数を比較すると

$$\begin{cases} \dfrac{11}{9}s - 1 = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{3}s = t \end{cases}$$

これを解くと $s = \dfrac{9}{11}$，$t = \dfrac{8}{11}$ となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\dfrac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$ である。

問 2　O，A，Q は同一直線上にあるため，実数 p によって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA}} \qquad \cdots③$$

と表される。C，P，Q は同一直線上にあるため，実数 q によって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-q)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表される。変形すると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= q\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-q)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
&= \frac{8}{11}q\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-q)(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&= -(1-q)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \frac{3}{11}q\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots④
\end{aligned}$$

である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は一次独立であるため，③ , ④ の係数を比較すると

$$\begin{cases} q - 1 = p \\ 1 - \dfrac{3}{11}q = 0 \end{cases}$$

これを解くと $q = \dfrac{11}{3}$，$p = \dfrac{8}{3}$ となる。よって $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{8}{3}$ であるため，Q は OA を $\boldsymbol{\dfrac{8}{5}}$: 1 に外分する。

問 3　OABC は長方形であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ である。$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
&= \frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
&= \frac{8}{11}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
&= \frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{3}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
\overrightarrow{\mathrm{DB}} &= \overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるため,

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} \\
&= \left(\frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{3}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \\
&= \frac{8}{11} \cdot \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{3}{11} \cdot 1|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \\
&= \frac{24}{11} - \frac{24}{11} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

である。内積が 0 であるとき，ベクトルは直交するため $\angle\mathrm{BER} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$。

問 4　$\triangle\mathrm{AQR}$ と $\triangle\mathrm{ABD}$ は共に直角三角形であるため，$\dfrac{\triangle\mathrm{AQR}}{\triangle\mathrm{ABD}} = \dfrac{\mathrm{AQ} \cdot \mathrm{AR}}{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD}}$ である。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{AQ} \cdot \mathrm{AR}}{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD}} &= \frac{\frac{5}{3}\mathrm{OA} \cdot \frac{5}{8}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB} \cdot \frac{1}{3}\mathrm{OA}} \\
&= \boldsymbol{\frac{25}{8}}
\end{aligned}$$

別解

メネラウスの定理を用いて計算する。

問 1, 2　OABC が長方形であることから BC//OA である。よって $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{DQ}} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DQ}} = \dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{ED}} = \dfrac{1}{2}$ である。

$\mathrm{DQ} = \mathrm{AD} + \mathrm{AQ} = \dfrac{1}{3}\mathrm{OA} + \mathrm{AQ}$ であることと合わせると $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{3}{5}$ であることが分かる。

よって Q は OA を $\boldsymbol{\frac{8}{5}} : 1$ に外分する。

メネラウスの定理より

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PO}} \times \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EB}} \times \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{DQ}} = 1 \\
\iff &\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PO}} \times \frac{2}{1} \times \frac{8}{6} = 1 \\
\iff &\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PO}} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$ である。

問 3　$\mathrm{AD} = \dfrac{1}{3}\mathrm{OA} = 1$ である。よって三平方の定理から

$$\mathrm{BD} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

である。$\mathrm{BA} = \mathrm{OC} = 3$ と合わせて

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BE}} = \frac{\frac{3}{8}\mathrm{BA}}{\frac{1}{3}\mathrm{BD}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

となる。一方 $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BA}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{EBR}$（共通の角）であるため $\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{EBR}$ は二辺の比と挟角が等しいため相似である。よって $\angle\mathrm{BER}=\angle\mathrm{BAD}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ である。

注釈

相似のみを用いて幾何的に解くことも可能である。

$\boxed{4}$

次の文章を読み，後の問い (問 1〜4) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

赤色と黄色と無色透明なセロハンがこの順に 5 : 3 : 2 の割合で袋の中に詰められている。A, B, C, D の 4 人がこの中から無作為にセロハンを 2 枚ずつ取り出す。袋の中のセロハンはよく混ぜられており，取り出すときに何色のセロハンか判別てきない。また，袋の中のセロハンは十分に多いので，セロハンを取り出した後も，3 種類のセロハンの割合は変化しないと考えてよい。
取り出した 2 枚のセロハンを重ねて色を観察すると，赤色同士のセロハンが重なる場合と，赤色と無色のセロハンが重なる場合はともに赤色に見える。同様に、黄色のセロハン同士が重なる場合と，黄色と無色のセロハンが重なる場合はともに黄色に見える。赤色と黄色のセロハンが重なる場合はだいだい色に見える。

問 1　A が取り出した 2 枚のセロハンを重ねると赤色に見える確率は $\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}\ \boxed{38}}$ である。

問 2　A が取り出した 2 枚のセロハンを重ねると赤色に見えた。このとき，取り出したセロハンが両方とも赤色である確率は $\dfrac{\boxed{39}}{\boxed{40}}$ である。

問 3　B が取り出した 2 枚のセロハンを重ねると赤色に見えた。この 2 枚のセロハンから 1 枚を無作為に選んだとき，無色のセロハンが選ばれる確率は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}$ である。

問 4　C が取り出した 2 枚のセロハンを重ねると赤色に見え，D が取り出した 2 枚のセロハンを重ねると黄色に見えた。この後，C が取り出したセロハンから 1 枚を無作為に選び， D が取り出したセロハンからも 1 枚を無作為に選んで，この 2 枚を重ねた。このとき，だいだい色に見える確率は $\dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}}$ である。

解答

問題文に「袋の中のセロハンは十分に多いので，セロハンを取り出した後も，3 種類のセロハンの割合は変化しないと考えてよい」とあるので，試行ごとに状態を元に戻して試行を繰り返すと考えていく。また，1 回の試行で「セロハンを 2 枚ずつ取り出す」とあるが，マーク欄を鑑みて，「セロハンを 1 枚ずつ 2 回続けて取り出す」と解して，以下，解答することとする。

問 1　A が赤色を 2 枚，または赤色と無色を 1 枚ずつ取り出すときなので

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}$$

問 2　問 1 より

$$\frac{\left(\frac{5}{10}\right)^2}{\left(\frac{5}{10}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

問 3　2 枚のセロハンを重ねて赤色に見えるのは

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right) \quad (\text{問 1 と同じ})$$

2 枚のセロハンを重ねて赤色に見えて，かつこの 2 枚のセロハンから 1 枚を無作為に選んで無色のセロハンが選ばれるのは

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right) \times \frac{1}{2}$$

よって，求める確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{5}{10}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

問 4　C が取り出した 2 枚のセロハンを重ねて赤色に見えて，かつ D が取り出した 2 枚のセロハンを重ねて黄色に見えるのは

$$\left\{\left(\frac{5}{10}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\right\}\times\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{45\times21}{10^4}$$

このとき，C，D がそれぞれ取り出した 2 枚のセロハンから 1 枚ずつ無作為に選んだ 2 枚のセロハンがだいだい色に見えるのは，セロハンの組み合わせが赤色 (C) と黄色 (D) になるときである。

C が取り出したセロハンから赤色のセロハンを選ぶ確率は

$$\left(\frac{5}{10}\right)^2\cdot1+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{10^2}$$

D が取り出したセロハンから黄色のセロハンを選ぶ確率は

$$\left(\frac{3}{10}\right)^2\cdot1+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{10^2}$$

よって，求める確率は

$$\frac{\frac{35}{10^2}\times\frac{15}{10^2}}{\frac{45\times21}{10^4}}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合 (微分，図形と方程式)］（やや易）：基礎的な問題であった。問 2 は一見難しそうだが，キチンと式を整理すると円が囲む面積を求めるだけの簡単な問題だと気付けるだろう。

$\boxed{2}$［微分法］（易）：3 次関数の接線と法線に関する基礎的な計算問題であった。問 2 は 3 次関数の対称性を用いると簡単に解ける。3 次関数の対称性は今年度の東北医科薬科でも出題されている。これを機に復習をしたいところだ。

$\boxed{3}$［ベクトル］（易）：ベクトルの基礎的な問題であった。図形の性質を用いて解くのが早い。

$\boxed{4}$［確率］（標準）：条件付き確率に関する出題であった。やや考えにくい問題であったかもしれない。条件「セロハンを取り出した後も，3 種類のセロハンの割合は変化しない」という部分を見落とさないようにしたい。

基礎的な計算が多い。最後の確率は少々考えにくいものの，それ以外では完答が狙えるセットであろう。一次突破ラインは 65% 程度か。