解答速報

聖マリアンナ医科大学（前期）　数学

2024年 2月8日実施

$\boxed{1}$

以下の (1)～ (3) の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1)　次の表は 6 人の生徒 A～ F の数学，物理の小テストの得点と 6 人の平均点であるが，D の数学の得点のみ表示されていない．

	A	B	C	D	E	F	平均
数学	8	8	6		8	10	7
物理	5	7	4	4	4	6	5

D の数学の得点は $\boxed{\text{ア}}$ であり，この 6 人の数学の得点の分散を既約分数で答えると $\boxed{\text{イ}}$ である．また，この 6 人の数学と物理の得点の相関係数は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{38}$ である．

(2)　3 次方程式 $x^3+\sqrt[3]{4}x+4=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，

$$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{\text{エ}}$$

$$(10\sqrt[3]{2}-\alpha)(10\sqrt[3]{2}-\beta)(10\sqrt[3]{2}-\gamma)=\boxed{\text{オ}}$$

である．

(3)　a を実数とし，$(x-a)^2$ で割り切れる 3 次多項式 $f(x)$ を考える． $f(x)$ の係数がすべて実数で，x^3 の項の係数が 1，$f(3)=3$，$f'(3)=1$ であるとき，a の値を求めると $a=\boxed{\text{カ}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　生徒 D の得点を d とすると，$\dfrac{8\times3+6+d+10}{6}=7$ より，$d=\mathbf{2}$ であり，6 人の数学の得点の分散 ${S_m}^2$ は

$$\begin{aligned}{S_m}^2&=\frac{(8-7)^2\times3+(6-7)^2+(2-7)^2+(10-7)^2}{6}\\&=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

また，6 人の物理の得点の分散 ${S_p}^2$ が

$$\begin{aligned}{S_p}^2&=\frac{(5-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2\times3+(6-5)^2}{6}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

6 人の数学と物理の得点の共分散 S_{mp} が

$$S_{mp} = \frac{(8-7)(5-5)+(8-7)(7-5)+(6-7)(4-5)+(2-7)(4-5)+(8-7)(4-5)+(10-7)(6-5)}{6}$$
$$= \frac{5}{3}$$

であることより，6 人の数学と物理の得点の相関係数 r_{mp} は

$$r_{mp} = \frac{S_{mp}}{S_m S_p}$$
$$= \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{19}{3}}\sqrt{\frac{4}{3}}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{19}}{38}}$$

(2)　解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta+\gamma = \mathbf{0}$$

であり，また $x^3+\sqrt[3]{4}x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ に $x=10\sqrt[3]{2}$ を代入して

$$(10\sqrt[3]{2}-\alpha)(10\sqrt[3]{2}-\beta)(10\sqrt[3]{2}-\gamma) = (10\sqrt[3]{2})^3+\sqrt[3]{4}\cdot 10\sqrt[3]{2}+4$$
$$= 2000+20+4 = \mathbf{2024}$$

(3)　x^3 の項の係数が 1，各項の係数が実数であることより $f(x)=(x-a)^2(x-b)$ (b は実数) とおける．
このとき，$f'(x)=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2$ であるので，$f(3)=3$，$f'(3)=1$ より

$$(3-a)^2(3-b)=3,\ 2(3-a)(3-b)+(3-a)^2=1$$

$3-a=A\ (\fallingdotseq 0)$ とおくと

$$A^2(3-b)=3,\ 2A(3-b)+A^2=1$$

第 1 式より $3-b=\dfrac{3}{A^2}$ なので，これを第 2 式に代入して

$$2A\cdot\frac{3}{A^2}+A^2=1$$
$$\Longleftrightarrow A^3-A+6=0$$
$$\Longleftrightarrow (A+2)(A^2-2A+3)=0$$

A は実数より $A=-2$ であるので $3-a=-2 \iff a=\mathbf{5}$ である．（このとき，$b=3-\dfrac{3}{A^2}$ より b は実数である．）

$\boxed{2}$

3 辺の長さが $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = t$ $(1 < t < 5)$ である $\triangle ABC$ の辺 AC 上に点 D をとる．また，$\angle ABD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$, $\angle ADB = \theta$ とする．
以下の (1)〜(3) の $\boxed{\text{キ}}$ 〜 $\boxed{\text{タ}}$ に当てはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) $\sin\alpha = \sin\beta$ のとき $AD = \boxed{\text{キ}}\,t$ であり，$2\sin\alpha = \sin\beta$ のとき $AD = \boxed{\text{ク}}\,t$ である．

(2) $2\sin\alpha = \sin\beta$ とする．このとき，$\triangle ABD$, $\triangle CBD$ に余弦定理をそれぞれ用いて，$\cos\theta$, $\cos(180° - \theta)$ を BD と t を用いた式で表すと

$$\cos\theta = \frac{16BD^2 + \boxed{\text{ケ}}}{8t\ BD}$$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{16BD^2 + \boxed{\text{コ}}}{24t\ BD}$$

である．

(3) $2\sin\alpha = \sin\beta$ とし，$BD = s$ とおく．s を用いて t^2 を表すと $t^2 = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{3}$ である．また $\cos\alpha$ を s を用いて表すと，

$$\cos\alpha = \frac{16s^2 + \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}\,s}$$

である．$\cos\alpha$ を s の関数と考えて，その最小値を求めると $\boxed{\text{セ}}$ である．また，$\cos\alpha$ が最小値をとるときの s, t の値を求めると $s = \boxed{\text{ソ}}$, $t = \boxed{\text{タ}}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $\sin\alpha = \sin\beta$ のとき
$0° < \alpha + \beta < 180°$ であることに注意すると，$\alpha = \beta$ である．
したがって，AD は $\angle ABC$ の二等分線であるから

$$AD : DC = BA : BC = 2 : 3$$

よって，$AD = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}t}$

$2\sin\alpha = \sin\beta$ のとき
$\triangle BAD$, $\triangle BCD$ において正弦定理より

$$\begin{cases} \dfrac{AD}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\theta} \\ \dfrac{t - AD}{\sin\beta} = \dfrac{3}{\sin(180° - \theta)} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{AD}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\theta} \\ \dfrac{t - AD}{2\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sin\theta} \end{cases}$$

これらから $\sin\theta$ を消去して

$$\frac{AD}{2\sin\alpha} = \frac{t - AD}{6\sin\alpha}$$

$$\therefore\ AD = \boldsymbol{\frac{1}{4}t} \ \cdots\cdots①$$

(2)　①のもとで，△BAD，△BCD において余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BD}^2 + \left(\frac{1}{4}t\right)^2 - 2^2}{2 \cdot \mathrm{BD} \cdot \frac{1}{4}t} = \boldsymbol{\frac{16\mathrm{BD}^2 + t^2 - 64}{8t\mathrm{BD}}}$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{\mathrm{BD}^2 + \left(\frac{3}{4}t\right)^2 - 3^2}{2 \cdot \mathrm{BD} \cdot \frac{3}{4}t} = \boldsymbol{\frac{16\mathrm{BD}^2 + 9t^2 - 144}{24t\mathrm{BD}}}$$

(3)　$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ より

$$\frac{16\mathrm{BD}^2 + 9t^2 - 144}{24t\mathrm{BD}} = -\frac{16\mathrm{BD}^2 + t^2 - 64}{8t\mathrm{BD}}$$

$$\frac{16s^2 + 9t^2 - 144}{3st} = -\frac{16s^2 + t^2 - 64}{st}$$

$$\therefore\ t^2 = \boldsymbol{\frac{-16s^2 + 84}{3}}\ \cdots\cdots②$$

さらに，△DAB において余弦定理より

$$\cos\alpha = \frac{s^2 + 2^2 - \left(\frac{1}{4}t\right)^2}{2 \cdot s \cdot 2}$$

$$= \frac{s^2 + 4 - \frac{1}{16} \cdot \frac{-16s^2+84}{3}}{4s} = \boldsymbol{\frac{16s^2 + 27}{48s}} \qquad (\because\ ②)$$

したがって，

$$\cos\alpha = \frac{1}{48}\left(16s + \frac{27}{s}\right)$$

であり，$s > 0$ であることに注意して，相加平均・相乗平均の関係の不等式より

$$\frac{1}{48}\left(16s + \frac{27}{s}\right) \geqq \frac{1}{48} \cdot 2\sqrt{16s \cdot \frac{27}{s}}$$

$$\therefore\ \cos\alpha \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は，} 16s = \dfrac{27}{s} \text{ のとき} \\ \text{すなわち，} s = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \text{ のときに成立する} \end{array}\right)$$

したがって，$\cos\alpha$ の最小値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，それは $s = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$，$t = \boldsymbol{\sqrt{19}}$ のとき．

$\boxed{3}$

a を正の実数，e を自然対数の底，$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とし，座標平面上の曲線 $y=f(x)\ (0\leqq x\leqq a)$ を C_a で表す．C_a の長さは

$$L(a)=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

である．

また $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とおくとき，

$$f'(x)=g(x),\quad g'(x)=f(x),\quad \{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$$

が成り立つ．以下の (1)，(2)，(4) の $\boxed{\text{チ}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に当てはまる適切な数，および (3)，(4) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) $\dfrac{g(a)}{L(a)}$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ である．

(2) $L(a)=1$ のとき $f(a)$ の値と a の値を求めると $f(a)=\boxed{\text{ツ}}$，$a=\boxed{\text{テ}}$ である．

(3) $L(a)=1$ のとき C_a 上に点 $\mathrm{P}_k\left(x_k, f\left(x_k\right)\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ をとり，C_a の長さを n 等分する．ただし n は正の整数であり，$0=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n=a$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)=\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt$$

となることを示せ．

(4) $t=g(u)$ という置換を用いて，定積分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt$ を計算すると，その値は $\boxed{\text{ト}}$ である．また解答用紙の所定の欄に $\boxed{\text{ト}}$ の計算過程を記せ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) まず，

$$\begin{cases} f'(x)=g(x) & \cdots\cdots① \\ g'(x)=f(x) & \cdots\cdots② \\ \{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

に注意しておく.

$$\begin{aligned}L(a) &= \int_0^a \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx \\ &= \int_0^a \sqrt{1+\{g(x)\}^2}dx \qquad (\because \text{①}) \\ &= \int_0^a \sqrt{\{f(x)\}^2}dx \qquad (\because \text{③}) \\ &= \int_0^a |f(x)|\,dx \\ &= \int_0^a f(x)dx \\ &= \Big[g(x)\Big]_0^a \qquad (\because \text{②}) \\ &= g(a)-g(0) \\ &= g(a) \qquad (\because g(0)=0)\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{g(a)}{L(a)}=1$$

である.

(2)　(1) より，$g(a)=L(a)$ あるから $L(a)=1$ のとき

$$g(a)=1$$

$$\frac{e^a-e^{-a}}{2}=1$$

ここで，$e^a=X$ とおくと

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(X-\frac{1}{X}\right)=1 \\ &X^2-2X-1=0 \\ &X=1+\sqrt{2} \qquad (\because X=e^a>0) \\ &e^a=1+\sqrt{2} \\ \therefore\ & a=\mathbf{\log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}f(a) &= \frac{e^a+e^{-a}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(3)　$L(a)=1$ と，点 P_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ が C_a の長さを n 等分する条件から

$$L(x_k)=g(x_k)=\int_0^{x_k}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\frac{k}{n}\ \cdots\cdots\text{④}$$

このとき

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{g(x_k)\}^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \qquad (\because \text{ ④}) \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt \qquad (\because \text{ 区分求積法})
\end{aligned}$$

となるから示された.

(4)　$t=g(u)$ とおくと,

$$\frac{dt}{du}=g'(u)=f(u)$$
$$\therefore\ dt=f(u)du$$

であり

t	$0 \longrightarrow 1$
u	$0 \longrightarrow \log(1+\sqrt{2})$

であるから,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt &= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\sqrt{1+\{g(u)\}^2}\cdot f(u)du \\
&= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} f(u)\cdot f(u)du \\
&= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}(e^{2u}+2+e^{-2u})du \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2u}}{2}+2u-\frac{e^{-2u}}{2}\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{8}\left\{(3+2\sqrt{2})-4\log(1+\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}}
\end{aligned}$$

注釈

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\right\}+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

という公式があるが，置換の指定があるので，検算に用いたい。

$\boxed{4}$

以下の (1)〜 (3) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1)　次の $\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまる数を答えよ．

$4n+1$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots)$ で表される自然数を考える．この形の数のうち，小さい方から 5 番目の素数は $\boxed{\text{ナ}}$ で，小さい方から 5 番目の合成数は $\boxed{\text{ニ}}$ である．

(2)　a を自然数とする．a を用いて，次の文中にある b を表せ．

$p_n = an+1$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots)$ とする．どのような自然数 m に対しても，$k = bm+1$ とおくと $p_k = b(am+1)$ となる．
ここで $b,\ am+1$ はともに 1 より大きい自然数なので，p_k は合成数である．

(3)　$c,\ d,\ e$ を自然数として $q_n = cn^2 + dn + e$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots)$ とする．$c,\ d,\ e$ がどのような自然数であっても，q_n で表される数の中には合成数となるものがあることを示せ．

解答

(1)　$4n+1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で表される自然数は小さい順に

$$5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 45,\ 49,\ 53,\ 57,\ \cdots\cdots$$

よって，小さい方から 5 番目の素数は **37** で，小さい方から 5 番目の合成数は **45** である．

(2)

$$\begin{aligned} p_k &= p_{bm+1} \\ &= a(bm+1)+1 \\ &= abm+a+1 \\ &= b(am+1)-b+a+1 \end{aligned}$$

となるので，$b = \boldsymbol{a+1}$ と定めると，$p_k = b(am+1)$ (合成数，$b = a+1 \geqq 2,\ am+1 \geqq 2$) となる．

(3)　任意の自然数 m' に対して $l = fm'+1$ を満たす l について

$$\begin{aligned} q_l &= q_{fm'+1} \\ &= c(fm'+1)^2 + d(fm'+1) + e \\ &= cf^2{m'}^2 + 2cfm' + c + dfm' + d + e \\ &= f(cf{m'}^2 + 2cm' + dm' + 1) - f + c + d + e \end{aligned}$$

となるので，$f = c+d+e$ と定めると，

$$q_l = f(cf{m'}^2 + 2cm' + dm' + 1) \ (\text{合成数，} f = c+d+e \geqq 3,\ cf{m'}^2 + 2cm' + dm' + 1 \geqq 5)$$

となる．よって，$l = fm'+1 = (c+d+e)m'+1$ を満たす自然数 l に対して q_l は合成数となるので，題意は示された．

講評

$\boxed{1}$ ［小問集合 (データの分析，複素数と方程式)］（やや易）：(1) は本学で頻出なっているデータの分析が出題されたが，かなり基礎的な内容でもありしっかりと得点したい。(2) は見掛け倒しであるので冷静に処理したい。(3) はやや計算がしにくいが時間が十分にあるので，$3-a$ という塊に注意して思い切って計算していきたい。

$\boxed{2}$ ［図形と計量］（やや易）：図形と計量から図形問題であった。(1) の後半が処理できれば (2) 以降は誘導にしたがって計算していけばいいだけである。最後の相加平均・相乗平均の利用も気付きやすい。

$\boxed{3}$ ［数 III 積分法］（標準〜やや難）：カテナリーの計算に関する出題であった。(3) の証明以外はしっかりと得点したい。なお，証明は区分求積法を思い浮かべればよい。

$\boxed{4}$ ［整数の性質］（やや易〜やや難）：合成数に関する出題であった。(1) は絶対に落とせない。(2) も問題の意味をしっかりと理解すればほとんど計算はない。(3) は (2) を参考に証明すればよい。

昨年度と比べて同程度の難易度であったが，今年度より $\boxed{3}$ に記述および証明問題が追加されたのは目新しい。全体的には $\boxed{2}$ の出来が合否に大きく影響するのではないか。一次突破ラインは 60〜65% 程度か。