解答速報

昭和大学医学部（Ⅰ期） 数学

2024年2月2日実施

1

n は正の整数とする。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 解を $\alpha, \beta (\alpha<\beta)$ とし，$a_n=\alpha^n+\beta^n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える。次の各問いに答えよ。

(1-1) a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ。

(1-2) $n \geqq 3$ とする。一般項 a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ。

(1-3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。

(2) n を 3 以上の整数，$1 \leqq j \leqq n$，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 j，k の組 $(j,\ k)$ 全体の集合を I とする。次の各問いに答えよ。ただし，結果はできる限り因数分解した n の式で答えよ。

(2-1) 組 $(j,\ k)$ が I 全体を動くとき，積 jk の総和 S_1 を求めよ。

(2-2) 組 $(j,\ k)$ が $j<k$ を満たして I の中を動くとき，積 jk の総和 S_2 を求めよ。

(2-3) 組 $(j,\ k)$ が $j<k-1$ を満たして I の中を動くとき，積 jk の総和 S_3 を求めよ。

解答

(1) α，β は $x^2-x-1=0$ の 2 解であるから，

$$\alpha^2-\alpha-1=0,\ \beta^2-\beta-1=0$$

が成り立つ．$n \geqq 3$ のとき，それぞれに α^{n-2}，β^{n-2} をかけると

$$\alpha^n-\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2}=0, \quad \beta^n-\beta^{n-1}-\beta^{n-2}=0$$

両辺の和をとると，

$$(\alpha^n+\beta^n)-(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=0$$

$$\therefore \quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\cdots\cdots①$$

(1-1) 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$$

よって，

$$a_1=\alpha+\beta=\mathbf{1}$$

$$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2(-1)=\mathbf{3}$$

以降，① を用いると，

$$a_3=a_2+a_1=3+1=\mathbf{4}$$

$$a_4=a_3+a_2=4+3=\mathbf{7}$$

(1-2) $n \geqq 3$ のとき ① より $\quad \boldsymbol{a_n=a_{n-1}+a_{n-2}}$

(1-3)　$x^2 - x - 1 = 0$ より　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\alpha < \beta$ より $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるから,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{-4} = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$$

よって, $-1 < \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n + \beta}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1} = \beta = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2)

(2-1)

$$\begin{aligned} S_1 &= (1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n) \\ &= (1+2+3+\cdots+n)^2 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

(2-2)　組 $(j,\ k)$ は $j<k$, $j>k$, $j=k$ を満たすものがあり, $j<k$, $j>k$ を満たすものの和は等しいから,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\{S_1 - (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)} \end{aligned}$$

(2-3)　組 $(j,\ k)$ のうち, $j = k-1$ となるものの和を S_4 とすると,

$$\begin{aligned} S_4 &= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n\{(2n-1)+3\} = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

よって, 求める和 S_3 は S_2 から S_4 を除いたものであるから,

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2 - S_4 \\ &= \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする立方体 OABC − DEFG を を考える。点 O を通る平面で立方体を切断し，右図のように 3 点 P, Q, R をとる。ただし，点 Q は辺 BF 上にあるものとする。切断面の面積を S, $\alpha = \angle\mathrm{AOP}$, $\beta = \angle\mathrm{COR}$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

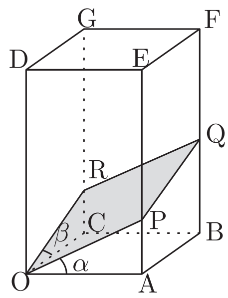
(1)　$\gamma = \angle\mathrm{POR}$ とする。$\cos\gamma$ を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　面積 S を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を用いて表せ。

(3)　$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$, $S = \dfrac{7}{6}$ とする。次の各問いに答えよ。

(3-1)　$\tan\alpha + \tan\beta$ の値を求めよ。

(3-2)　$\tan\alpha\tan\beta$ の値を求めよ。



解答

(1)　O を原点とし，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，D(0, 0, 1) となるように座標軸を定めると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\alpha \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan\beta \end{pmatrix}$$

と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角が γ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\cos\gamma$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}\cos\gamma$$

$$\therefore\quad \cos\gamma = \boldsymbol{\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}}$$

(2)　四角形 OPQR は平行四辺形である。

面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\cdot\sin\gamma \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\cdot\sqrt{1-\cos^2\gamma} \\ &= \sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2} \\ &= \sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta) - \tan^2\alpha\tan^2\beta} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1}} \end{aligned}$$

注釈

ベクトルの外積を知っている場合には

$$S = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\times\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ -\tan\beta \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1}$$

とできる。

(3) $X=\tan\alpha+\tan\beta$, $Y=\tan\alpha\tan\beta$ とすると，

$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $X>0$, $Y>0$ であることに注意する。

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$
$$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$$
$$\therefore\ X+Y=1\ \cdots\cdots①$$

また，$S=\dfrac{7}{6}$ より

$$S=\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1}=\frac{7}{6}$$
$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1=\frac{49}{36}$$
$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}$$
$$\therefore\ X^2-2Y=\frac{13}{36}\ \cdots\cdots②$$

であるから，①と②より

$$X^2-2(1-X)=\frac{13}{36}$$
$$36X^2+72X-85=0$$
$$(6X+17)(6X-5)=0$$
$$\therefore\ X=\frac{5}{6}\qquad(\because\ X>0)$$

よって，$Y=\dfrac{1}{6}$

以上により

$$X=\tan\alpha+\tan\beta=\mathbf{\frac{5}{6}}$$
$$Y=\tan\alpha\tan\beta=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{3}$

xyz 空間に 3 辺が AB $= 6$, BC $= 7$, CA $= 5$ の三角形 ABC がある。点 P が三角形 ABC の辺上を一周する。次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 三角形 ABC の面積 S_1 を求めよ。

(2) 三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(3) 三角形 ABC と同一平面上にあり，点 P を中心とする半径 t $(0 < t \leqq 1)$ の円を E とする。

(3-1) 三角形 ABC の内部で円 E が通過しない部分の面積 S_2 を t を用いて表せ。

(3-2) 円 E が通過する部分の面積 S_3 を t を用いて表せ。

(4) 点 P を中心とする半径 1 の球を F とする。球 F が通過する部分の体積 V を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

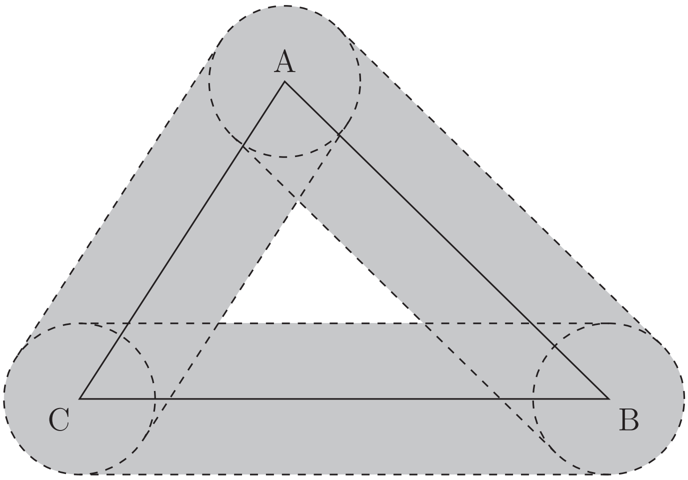
(1) $\dfrac{6+7+5}{2} = 9$ よりヘロンの公式から

$$S = \sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)} = \mathbf{6\sqrt{6}}$$

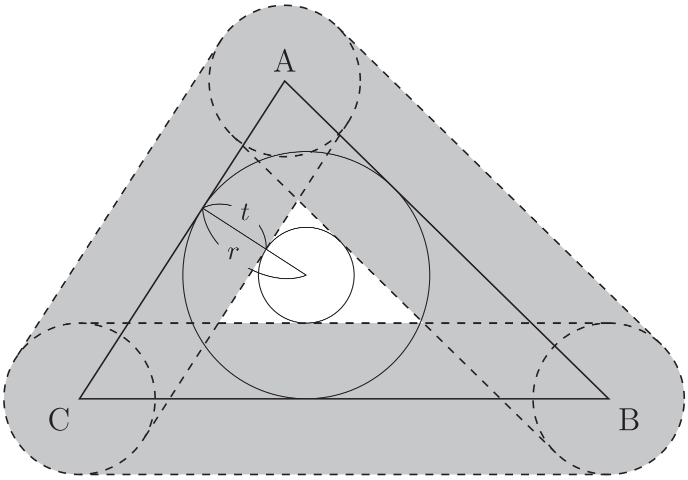
(2) 三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\times$辺の長さの和$\times r$ で与えられるため，$6\sqrt{6} = \dfrac{1}{2}(6+7+5)r$ となる．よって $r = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$ である。

(3)

(3-1) 通過しない部分は三角形となる。



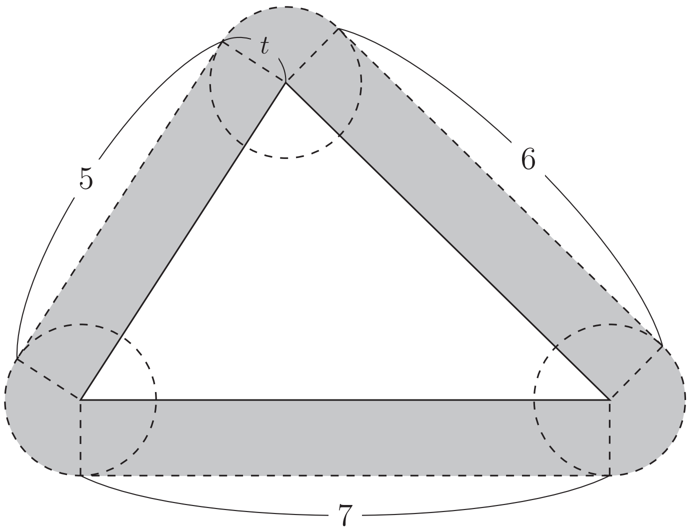
これを T とおく。T は三角形 ABC と相似であるため，相似比を求める．2 つの三角形の相似比とそれらの内接円の相似比は等しい。下図より T の内接円の半径は $\dfrac{2\sqrt{6}}{3} - t$ となる。



よって面積は

$$S_2 = \frac{\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3} - t\right)^2}{\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} \cdot 6\sqrt{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}(3t - 2\sqrt{6})^2}$$

(3-2)　下図より円 E が通過する部分のうち三角形 ABC の外側にある部分の面積は $\pi t^2 + (6+7+5)t = \pi t^2 + 18t$ である。



円 E が通過する部分のうち三角形 ABC の内側にある部分の面積は $S_1 - S_2$ である。以上をまとめると

$$\begin{aligned} S_3 &= \pi t^2 + 18t + 6\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{4}(3t - 2\sqrt{6})^2 \\ &= \pi t^2 + 18t + 6\sqrt{6} - \left(\frac{9\sqrt{6}}{4}t^2 - 18t + 6\sqrt{6}\right) \\ &= \boldsymbol{\left(\pi - \frac{9\sqrt{6}}{4}\right)t^2 + 36t} \end{aligned}$$

となる。

(4)　球 F が通過した部分を D とおく。また，3 点 A，B，C が xy 平面上にあるものとしてよい。
D を平面 $z = t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ で切断した切り口は，(3) において半径 $\sqrt{1-t^2}$ の円が通過した部分と一致する。よって

$$V = \int_{-1}^{1} \left(\pi - \frac{9\sqrt{6}}{4}\right)(1-t^2) + 36\sqrt{1-t^2}dt$$

である。第 1 項は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(\pi - \frac{9\sqrt{6}}{4}\right)(1-t^2)dt &= 2\int_{0}^{1} \left(\pi - \frac{9\sqrt{6}}{4}\right)(1-t^2)dt \\ &= 2\left(\pi - \frac{9\sqrt{6}}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi - \frac{4}{3} \cdot \frac{9\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{4}{3}\pi - 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。第 2 項は $y=\sqrt{1-t^2}$ が半径 1 の（半）円の式であることに注意すれば

$$\int_{-1}^{1} 36\sqrt{1-t^2}dt = 36 \times \frac{\pi}{2} = 18\pi$$

となる。こうして $V=\frac{4}{3}\pi-3\sqrt{6}+18\pi=\boldsymbol{\frac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}}$ である。

$\boxed{4}$

スペード，ハート，ダイヤ，クラブの各種類について，J，Q，K の 3 枚のカードがある。すなわちカードは全部で 12 枚ある。この中から無作為に 4 枚のカードを選ぶ。選ばれた 4 枚のカードについて，次の各問いに答えよ。ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 4 枚のカードがスペード，ハート，ダイヤ，クラブのうちの 2 種類のみからなる確率を求めよ。
(2) 4 枚のカードがスペード，ハート，ダイヤ，クラブのうちの 3 種類のみからなる確率を求めよ。
(3) スペード，ハート，ダイヤ，クラブの 4 種類がそろう確率を求めよ。
(4) J，Q，K がすべて選ばれる確率を求めよ。
(5) スペード，ハート，ダイヤ，クラブの 4 種類がそろい，かつ，J，Q，K がすべて選ばれる確率を求めよ。

解答

(1) 4 種類から 2 種類の絵柄を選ぶ方法は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り。
ここで，例えばスペードとハートの 2 種類，計 4 枚のカードの組み合わせは

$$(\text{スペードの枚数，ハートの枚数}) = (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

であるので，その選び方は ${}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 \times 2 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2$ 通り。
よって，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times ({}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 \times 2 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2)}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\frac{2}{11}}$$

注釈

スペードとハートの 2 種類，計 4 枚のカードの組み合わせの総数は，スペードとハートがそれぞれ 3 枚しかないことに注目すると ${}_6\mathrm{C}_4$ でも計算できる。

(2) 4 種類から 3 種類の絵柄を選ぶ方法は ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り。
ここで，例えばスペードとハートとダイヤの 3 種類，計 4 枚のカードの組み合わせは

$$(\text{スペードの枚数，ハートの枚数，ダイヤの枚数}) = (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$$

であるので，その選び方は ${}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times 3$ 通り。
よって，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3 \times ({}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times 3)}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\frac{36}{55}}$$

別解

1 種類になることはないので，余事象を考えると，(1)(3) を用いて

$$1 - (2\text{ 種類になる確率} + 4\text{ 種類になる確率})$$

$$=1 - \left(\frac{2}{11} + \frac{9}{55}\right) = \boldsymbol{\frac{36}{55}}$$

(3) 4 種類の絵柄からそれぞれ 1 枚ずつ選ぶので，その選び方は $({}_3\mathrm{C}_1)^4 = 3^4$ 通り。
よって，求める確率は

$$\frac{3^4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\frac{9}{55}}$$

(4) J，Q，K をすべて選ぶとき，その組み合わせは

$$(\text{J の枚数，Q の枚数，K の枚数}) = (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$$

であるので，その選び方は ${}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \times 3$ 通り。
よって，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \times 3}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\frac{32}{55}}$$

(5)　J，Q，K をすべて選ぶとき，その組み合わせは

$$(\text{J の枚数, Q の枚数, K の枚数}) = (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$$

さらに，絵柄が 4 種類となるのは，例えば (J の枚数，Q の枚数，K の枚数) $= (1,\ 1,\ 2)$ のとき，J，Q，K の順で絵柄を選んでいくと ${}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_2$ 通りある。これは他の場合も同様である。
よって，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \times 3}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\frac{4}{55}}$$

講評

$\boxed{1}$［数列］（標準）：(1) は 2 次方程式の解にまつわる数列の問題であった。基本的な変形であるのでしっかりと得点したい。(2) は 2 変数の Σ 計算の問題だった。丁寧に計算すれば難しくはない。

$\boxed{2}$［三角関数，空間図形］（標準）：立方体の断面が絡んだ図形の問題であった。文字の計算にやや難儀するかもしれない。ここはしっかり得点したい。解答・解説では座標を設定したが，設定せずに計算していくことも可能である。

$\boxed{3}$［図形，面積，体積］（やや難）：前半は基本問題なので必ず得点したい。後半は丁寧に図形を把握しないと間違える可能性が高い。内接円に着目すると解きやすいだろう。

$\boxed{4}$［確率］（やや易）：基礎的な確率の問題であった。丁寧に計算したい。

全体的に基礎的な式変形ができるかどうかが問われる出題であった。一見難しそうに思えても丁寧に考察すれば何をするべきか分かるだろう。問題の取捨選択もかなり重要であったであろう。一次突破ボーダーは 60% 程度か。