

東京医科大学 数学

2024年 2月7日実施

第1問

(1) 5進法で表された循環小数 $x = 4.\dot{3}2_{(5)}$ を10進法の分数で表すと、 $x = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) $\sum_{n=3}^{15} \frac{1}{n C_3} = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(3) i を虚数単位とし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考える。 $\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$, $\beta = 5 + 5i$ のとき、 $\alpha\beta$ の偏角は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}\pi$ であり、 $(\alpha\beta)^{2024}$ の偏角は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ である。

(4) $f(x) = xe^x (x > 0)$ の逆関数を $g(x)$ とする。 $a = \frac{\sqrt{e}}{2}$ とすれば、
 $g(a) = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$, $g'(a) = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}$ である。

解答

(1)

$$x = 4 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \dots$$

$$5^2x = 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \dots$$

第2式から第1式を引くと

$$24x = 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 - 4 = 113$$

$$\therefore x = \frac{113}{24}$$

注釈

無限級数として計算してもよい。

$$4.\dot{3}2_{(5)} = 4 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \dots$$

$$= 4 + \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5^3} + \dots \right) + \left(\frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^4} + \dots \right)$$

$$= 4 + \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} + \frac{\frac{2}{5^2}}{1 - \frac{1}{5^2}}$$

$$= \frac{113}{24}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{15} \frac{1}{n C_3} &= \sum_{n=3}^{15} \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \\ &= 3 \sum_{n=3}^{15} \left\{ \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n} \right\} \\ &= 3 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{14 \cdot 15} \right) = \frac{52}{35} \end{aligned}$$

(3) $\alpha = \sqrt{2}(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\},$

$$\beta = 5(1 + i) = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

よって, $\arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{12}\pi$

また, $\arg(\alpha\beta)^{2024} = 2024 \arg \alpha\beta = 2024 \cdot \frac{\pi}{12} = 168\pi + \frac{2}{3}\pi$

よって, $(\alpha\beta)^{2024}$ の偏角は $\frac{2}{3}\pi$ である。

(4) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$ であるから, $g(a) = g\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

また, $y = g(x)$ について $x = f(y)$ が成り立つから, 両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = 1 \cdot e^y + y \cdot e^y = e^y(y+1)$$

よって, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y(y+1)}$

したがって, $g'(a) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}$ である。

第2問

半径1の円に内接する正三十六角形 K の頂点を P_0, P_1, \dots, P_{35} とする。この36個の頂点から4つの頂点を選び、それらを結んで四角形を作る。

- (1) 正方形は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個できる。また、その正方形の面積は $\boxed{\text{イ}}$ である。
 (2) 長方形は全部で $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。
 (3) 正三十六角形 K とちょうど2辺を共有する四角形は、全部で $\boxed{\text{カキクケ}}$ 個できる。

解答

(1) 正方形は4点 $P_k, P_{k+9}, P_{k+18}, P_{k+27}$ ($k = 0, 1, \dots, 8$) を選んで、それらを結ぶとできる。よって、正方形の個数は9個である。

また、これらの正方形の対角線の長さは2であるので、1辺の長さが $\sqrt{2}$ となることから、求める正方形の面積は $(\sqrt{2})^2 = 2$ である。

(2) 直角三角形となるような3つの頂点を選ぶと、長方形の残り1つの頂点が一意的に定まることに注目して計算する。外接円の直径となるような対角線の本数は18本であるので、重複に注意すると

$$18 \times (36 \div 2) \div 2 = 153(\text{個})$$

別解

まず、線分 $P_k P_{k+18}$ ($k = 0, 1, \dots, 17$) に平行な辺を持つ(正方形ではない)長方形の個数を数える。1辺が決まると長方形は一意的に定まるので、 $P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_{k+17}$ から2点を選んで長方形の1辺を決める。このような2点の選び方は

$$P_{k+1} \text{ と } P_{k+17}, P_{k+2} \text{ と } P_{k+16}, \dots, P_{k+8} \text{ と } P_{k+10}$$

の8通りあるので、線分 $P_k P_{k+18}$ に平行な辺を持つ(正方形ではない)長方形の個数は8個である。

したがって、(正方形ではない)長方形の個数は全部で $8 \times 18 = 144(\text{個})$ である。

また、(1)より正方形の個数は9個である。

よって、求める長方形の個数は $144 + 9 = 153(\text{個})$ である。

注釈

P_k などの表記を使わないと次のようになる。と言っても上記とほぼ同じであるが…。

まず、線分 $P_0 P_{18}$ に平行な辺を持つ(正方形ではない)長方形の個数を数える。1辺が決まると長方形は一意的に定まるので、 P_1, P_2, \dots, P_{17} から2点を選んで長方形の1辺を決める。このような2点の選び方は

$$P_1 \text{ と } P_{17}, P_2 \text{ と } P_{16}, \dots, P_8 \text{ と } P_{10}$$

の8通りあるので、線分 $P_0 P_{18}$ に平行な辺を持つ(正方形ではない)長方形の個数は8個である。

ここで、線分 $P_0 P_{18}$ のような線分の選び方はほか $P_1 P_{19}, P_2 P_{20}, \dots, P_{17} P_{35}$ があるので、計18通りある。

したがって、(正方形ではない)長方形の個数は全部で $8 \times 18 = 144(\text{個})$ である。

また、(1)より正方形の個数は9個である。

よって、求める長方形の個数は $144 + 9 = 153(\text{個})$ である。

(3) 正三十六角形 K とちょうど2辺を共有する四角形を、四角形の隣り合う2辺と共有する場合と1組の対辺と共有する場合で場合分けして数える。

i) 四角形の隣り合う2辺と共有する場合

四角形の3つの頂点が P_k, P_{k+1}, P_{k+2} ($k = 0, 1, \dots, 35$, ただし、 $P_{36} = P_0, P_{37} = P_1, \dots$ とする) であるとき、もう1点の選び方は

$$P_{k+4}, P_{k+5}, \dots, P_{k+34}$$

の 31 通りであるので、正三十六角形 K と隣り合う 2 辺を共有する四角形は 31×36 個である。

ii) 四角形の 1 組の対辺と共有する場合

四角形の 2 つの頂点が P_k, P_{k+1} ($k = 0, 1, \dots, 35$, ただし, $P_{36} = P_0, P_{37} = P_1, \dots$ とする) であるとき、もう 2 点の選び方は

$$P_{k+3} \text{ と } P_{k+4}, P_{k+4} \text{ と } P_{k+5}, \dots, P_{k+33} \text{ と } P_{k+34}$$

の 31 通りであるので、正三十六角形 K と 1 組の対辺を共有する四角形は重複に注意して $31 \times 36 \div 2$ 個である。よって、求める四角形の個数は $31 \times 36 + 31 \times 36 \div 2 = 1674$ (個) である。

注釈

P_k などの表記を使わないと次のようになる。と言っても上記とほぼ同じであるが…。

正三十六角形 K とちょうど 2 辺を共有する四角形を、四角形の隣り合う 2 辺と共有する場合と 1 組の対辺と共有する場合で場合分けして数える。

i) 四角形の隣り合う 2 辺と共有する場合

四角形の 3 つの頂点が仮に P_0, P_1, P_2 であるとき、もう 1 点の選び方は

$$P_4, P_5, \dots, P_{34}$$

の 31 通りである。

ここで、最初の 3 点の選び方は計 36 通りある。

正三十六角形 K と隣り合う 2 辺を共有する四角形は 31×36 個である。

ii) 四角形の 1 組の対辺と共有する場合

四角形の 2 つの頂点が仮に P_0, P_1 であるとき、もう 2 点の選び方は

$$P_3 \text{ と } P_4, P_4 \text{ と } P_5, \dots, P_{33} \text{ と } P_{34}$$

の 31 通りである。

ここで、最初の 2 点の選び方は計 36 通りある。

したがって、正三十六角形 K と 1 組の対辺を共有する四角形は重複に注意して $31 \times 36 \div 2$ 個である。

よって、求める四角形の個数は $31 \times 36 + 31 \times 36 \div 2 = 1674$ (個) である。

第3問

$O(0, 0, 0)$ を原点とする座標空間において、 $A(8, 8, 7)$ を中心とする球面 S_1 と $B(4, 2, 1)$ を中心とする球面 S_2 があり、半径はともに r である。球面 S_1 は平面 $\alpha: 2x + 2y + z = 3$ と点 H で接している。 S_1 と S_2 の共通部分は円であり、中心を Q 、半径を r' とする。

(1) 平面 α の法線ベクトルで z 成分が 1 のものを \vec{n} とすれば、

$$\vec{n} = (\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, 1) \text{ である。}$$

(2) $r = \boxed{\text{ウエ}}$ であり、 H の座標は $(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}})$ である。

(3) $r' = \sqrt{\boxed{\text{クケコ}}}$ であり、 Q の座標は $Q(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}})$ である。

(4) 三角形 OHQ の面積は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \sqrt{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

解答

(1) 一般に、平面の方程式 $ax + by + cz + d = 0$ の法線ベクトルの 1 つは (a, b, c) である。ゆえに、平面 $\alpha: 2x + 2y + z - 3 = 0$ の法線ベクトルの 1 つは $(2, 2, 1)$ であるため、 \vec{n} は

$$\vec{n} = (2, 2, 1)$$

(2) S_1 と平面 α は接していることから、 r は $A(8, 8, 7)$ と平面 $\alpha: 2x + 2y + z - 3 = 0$ との距離である。点と平面の距離の公式より

$$\begin{aligned} r &= \frac{|2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 7 - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{36}{3} \\ &= 12 \end{aligned}$$

また、 $\vec{AH} \perp$ 平面 α であることから

$$\vec{AH} = t(2, 2, 1) \quad (t: \text{実数})$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= \vec{OA} + \vec{AH} \\ &= (8, 8, 7) + t(2, 2, 1) \\ &= (8 + 2t, 8 + 2t, 7 + t) \end{aligned}$$

これを、 $2x + 2y + z - 3 = 0$ に代入して $t = -4$

よって $H(0, 0, 3)$

別解

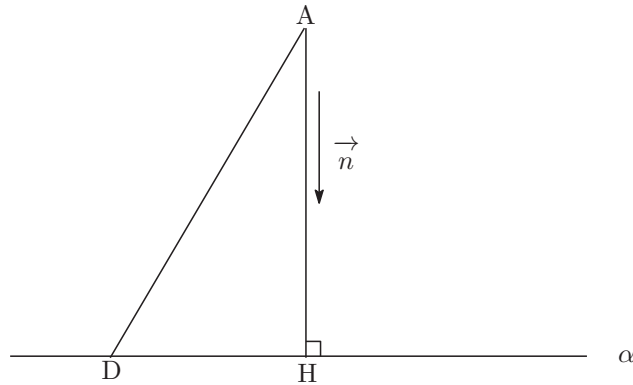
点 A, 平面 α の位置関係および $\vec{n} = (2, 2, 1)$ の向きに注意して

$$\begin{aligned}\vec{OH} &= \vec{OA} + \vec{AH} \\ &= \vec{OA} + \frac{r}{|\vec{n}|}(-\vec{n}) \\ &= (8, 8, 7) - 4(2, 2, 1) \\ &= (0, 0, 3)\end{aligned}$$

よって $\mathbf{H(0, 0, 3)}$

別解

平面 $\alpha : 2x + 2y + z - 3 = 0$ 上に点 $D(1, 1, -1)$ をとる。ここで, \vec{AH} は $\vec{AD} = (-7, -7, -8)$ の $\vec{n} = (2, 2, 1)$ への正射影ベクトルであることから



$$\begin{aligned}\vec{AH} &= \frac{\vec{AD} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{-14 - 14 - 8}{9}(2, 2, 1) \\ &= (-8, -8, -4)\end{aligned}$$

よって, $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = (0, 0, 3)$ より $\mathbf{H(0, 0, 3)}$

注釈

r を点と平面の距離の公式を用いずに求めるのであれば, 点 H の座標を求めたのち $r = AH$ を計算すればよい。

(3) S_1 と S_2 の半径は等しいことから, 点 Q は線分 AB の中点となる。よって

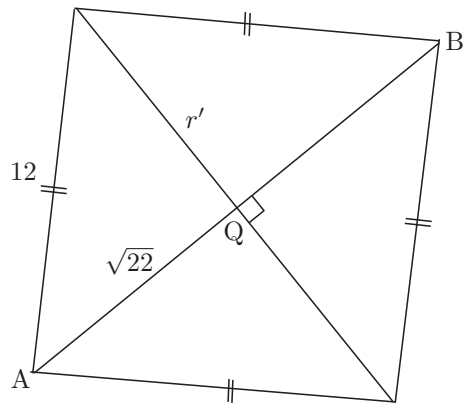
$$\begin{aligned}Q &\left(\frac{8+4}{2}, \frac{8+2}{2}, \frac{7+1}{2} \right) \\ \therefore Q &\mathbf{(6, 5, 4)}\end{aligned}$$

また,

$$AQ = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(8-4)^2 + (8-2)^2 + (7-1)^2}}{2} = \sqrt{22}$$

であるから, 図のように共通部分の円の直径と A, B を含む平面を考えて, 三平方の定理を用いると

$$r' = \sqrt{12^2 - \sqrt{22}^2} = \sqrt{122}$$



(4) $\vec{OH} = (0, 0, 3)$, $\vec{OQ} = (6, 5, 4)$ であることから

$$\begin{cases} |\vec{OH}|^2 = 9 \\ |\vec{OQ}|^2 = 77 \\ \vec{OH} \cdot \vec{OQ} = 12 \end{cases}$$

よって、三角形 OHQ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OH}|^2 |\vec{OQ}|^2 - (\vec{OH} \cdot \vec{OQ})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{9 \cdot 77 - 12^2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{77 - 4^2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{61} \end{aligned}$$

第4問

ス, **セ** の解答は該当する解答群から最も適当なものをそれぞれ1つずつ選べ。

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする。ただし、 a, b, c, d は実数の定数である。 C は、 x 軸と $x = -2, 1$ において接している。 C と x 軸によって囲まれた部分を D とする。

(1) $a =$ **ア**, $b =$ **イウ**, $c =$ **エオ**, $d =$ **カ** である。

(2) $\int_{-2}^1 (x+2)(x-1)^7 dx = \frac{\text{キクケコサ}}{\text{シ}}$ である。

(3) 正の整数 p, q に対し、

$$\int_{-2}^1 (x+2)^{p+1}(x-1)^q dx = \frac{\text{ス}}{\text{セ}} \int_{-2}^1 (x+2)^p(x-1)^{q+1} dx$$

が成り立つ。

(4) D を x 軸の周りに1回転して得られる立体の体積は $\frac{\text{ソタチツ}}{\text{テト}} \pi$ である。

【**ス**】の解答群

- ① $p+1$ ② $p+2$ ③ q ④ $q+1$ ⑤ 1
 ⑥ $-(p+1)$ ⑦ $-(p+2)$ ⑧ $-q$ ⑨ $-(q+1)$ ⑩ -1

【**セ**】の解答群

- ① p ② $p+1$ ③ $p+2$ ④ $2p+1$ ⑤ $2p$
 ⑥ q ⑦ $q+1$ ⑧ $q+2$ ⑨ $2q+1$ ⑩ $2q$

解答

(1) 曲線 $y = f(x)$ が $x = -2, 1$ で x 軸と接することから、 x^4 の係数にも注意して

$$f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

これが恒等式となるので、

$$a = 2, b = -3, c = -4, d = 4$$

(2) $(x-1)^7 = \left\{ \frac{1}{8}(x-1)^8 \right\}'$ と見て、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x+2)(x-1)^7 dx &= \left[(x+2) \cdot \frac{1}{8}(x-1)^8 \right]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 1 \cdot \frac{1}{8}(x-1)^8 dx \\ &= 0 - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{9}(x-1)^9 \right]_{-2}^1 \\ &= 0 + \frac{(-3)^9}{8 \cdot 9} = \frac{-2187}{8} \end{aligned}$$

別解

被積分関数 $(x - 1)$ で展開してもよい.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x + 2)(x - 1)^7 dx &= \int_{-2}^1 \{(x - 1) + 3\}(x - 1)^7 dx \\ &= \int_{-2}^1 \{(x - 1)^8 + 3(x - 1)^7\} dx \\ &= \left[\frac{1}{9}(x - 1)^9 + 3 \cdot \frac{1}{8}(x - 1)^8 \right]_{-2}^1 \\ &= - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{8} \right) (-3)^9 = \frac{-2187}{8} \end{aligned}$$

(3) $(x - 1)^q = \left\{ \frac{1}{q + 1}(x - 1)^{q+1} \right\}'$ と見て、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x + 2)^{p+1}(x - 1)^q dx &= \left[(x + 2)^{p+1} \cdot \frac{1}{q + 1}(x - 1)^{q+1} \right]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 (p + 1)(x + 2)^p \cdot \frac{1}{q + 1}(x - 1)^{q+1} dx \\ &= \frac{-(p + 1)}{q + 1} \int_{-2}^1 (x + 2)^p (x - 1)^{q+1} dx \quad \left(\begin{array}{l} \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{array} \right) \end{aligned}$$

(4) 求める体積を V とし、(3) の結果を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^2 (x + 2)^4(x - 1)^4 dx \\ &= -\frac{4}{5} \int_{-2}^1 (x + 2)^3(x - 1)^5 dx \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \int_{-2}^1 (x + 2)^2(x - 1)^6 dx \\ &= \dots\dots \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8} \int_{-2}^1 (x - 1)^8 dx \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8} \left[\frac{1}{9}(x - 1)^9 \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{2187}{70} \end{aligned}$$

よって、 $V = \frac{2187}{70} \pi$ である。

注釈

ベータ関数の積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m(x - \beta)^n dx = (-1)^n \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1} \quad (m, n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

を用いて $\frac{V}{\pi} = \int_{-2}^1 (x + 2)^4(x - 1)^4 dx = (-1)^4 \frac{4!4!}{9!} \cdot 3^5$ と計算してもよい。証明は部分積分により漸化式を導いてその漸化式を繰り返し用いればよい。(4) は具体的な数値でこの証明と同じことをさせているに過ぎない。

講評

第1問 [小問集合] (やや易) : (1) n 進法, (2) 数列の和, (3) 複素数平面の偏角, (4) 逆関数の微分係数からの出題であった。どれも基本的な問題であるので, ここはできれば落としたいくない。

第2問 [場合の数] (標準) : 正 36 角形の頂点から 4 点を選んでできる長方形に関する場合の数からの出題であった。基本的ではあるが, どのようにして数えたかで差が出そうである。

第3問 [空間ベクトル] (やや易) : 空間座標内に存在する 2 つの球に関する問題であった。2 つの球の半径が同じなので取り組みやすい。空間の問題ではあるが全体的に知識があるかないかを問われた形だ。できれば完答したい大問である。

第4問 [整関数の積分法] (標準) : ベータ関数の積分に関する問題であった。医学部受験生であれば経験したことがある問題であろう。できれば完投したい大問である。

昨年度に比べて易化した。入試基礎レベルのことが広範にわたって身につけているかが問われ, 差がつくような出題であったと思われる。一次突破ラインは 65% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは



医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校 **英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録 ▶



LINE 登録 ▶

