解答速報

埼玉医科大学（後期）　数学

2024年 3月2日実施

$\boxed{1}$

次の問い（問 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

問 1　曲線 $y = f(x) = (x+1)(x-1)(x+3)$ の変曲点は

$$\left(\boxed{1}\,\boxed{2},\ \boxed{3}\right)$$

である。この変曲点における $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$y = \boxed{4}\,\boxed{5}\,x - \boxed{6}$$ である。

問 2　k を正の定数とする。曲線 $y = \dfrac{2x^2 - 3x + k}{x}$ 上の $x > 0$ の範囲にある点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ において，$4x + 5y$ の値の最小値が 20 となるとき，$k = \dfrac{\boxed{7}\,\boxed{8}}{\boxed{9}}$ であり，そのときの P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{10}}{\boxed{11}},\ \boxed{12}\right)$ である。

解答

問 1　$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 1,\quad f''(x) = 6x + 6$$

$f''(x) = 0$ のとき $x = -1$ で，この前後で $f''(x)$ は符号変化するので

$$\text{変曲点}:\ \boldsymbol{(-1,\ 0)}$$

また，$f'(-1) = -4$ より

$$\text{接線}:\ y = \boldsymbol{-4x - 4}$$

問 2　$y = \dfrac{2x^2 - 3x + k}{x}$ $(x > 0)$ のとき

$$\begin{aligned}
4x + 5y &= 4x + 5 \cdot \frac{2x^2 - 3x + k}{x} \\
&= 14x + \frac{5k}{x} - 15 \\
&\geqq 2\sqrt{14x \cdot \frac{5k}{x}} - 15 \\
&\qquad (\because\ x > 0,\ k > 0 \text{ より相加平均・相乗平均の関係を用いた}) \\
&= 2\sqrt{70k} - 15
\end{aligned}$$

等号は $14x = \dfrac{5k}{x} \iff x = \sqrt{\dfrac{5k}{14}}$ のとき成立する。

よって，$4x+5y$ の最小値が $2\sqrt{70k}-15$ であるから，これが 20 となるとき

$$2\sqrt{70k}-15=20$$

$$\iff k=\frac{35}{8}$$

このとき，$x=\sqrt{\dfrac{5k}{14}}=\dfrac{5}{4}$ である。
以上より，求めるものは

$$k=\boldsymbol{\frac{35}{8}},\ \mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{5}{4},\ 3}\right)$$

$\boxed{\text{別解}}$

$y=\dfrac{2x^2-3x+k}{x}$ $(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ において $4x+5y$ が最小値 20 となるのは，$4x+5y=20 \iff$ $y=-\dfrac{4}{5}x+4$ が $y=\dfrac{2x^2-3x+k}{x}$ $(x>0)$ と接するときである。
連立して

$$14x^2-35x+5k=0$$

判別式について

$$(-35)^2-4\cdot14\cdot5k=0 \iff k=\boldsymbol{\frac{35}{8}}$$

このとき，$14x^2-35x+5k=0 \iff 14\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2=0$ である。
よって，求める座標は

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{5}{4},\ 3}\right)$$

$\boxed{2}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

△ABC において，$\mathrm{BC} = 8$，$\mathrm{CA} = 4$，$\mathrm{AB} = 6$ であるとする。

問 1　∠A の大きさを A とすると，$\sin A = \dfrac{\sqrt{\boxed{13}\,\boxed{14}}}{\boxed{15}}$ であり，この三角形の面積 S は

$S = \boxed{16}\sqrt{\boxed{17}\,\boxed{18}}$ である。

問 2　3 辺 BC，CA，AB を $3:2$ に内分する点をそれぞれ L，M，N とし，線分 AL と BM，線分 BM と CN，線分 CN と AL の交点をそれぞれ P，Q，R とするとき，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PR} : \mathrm{RL} = 1 : \frac{\boxed{19}}{\boxed{20}} : \frac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$$

である。

問 3　△PQR と △ABC は，それぞれの三角形の面積を表す。

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{\boxed{23}}{\boxed{24}\,\boxed{25}}\triangle\mathrm{ABC}$$

である。

解答

問 1　$0 < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ である。

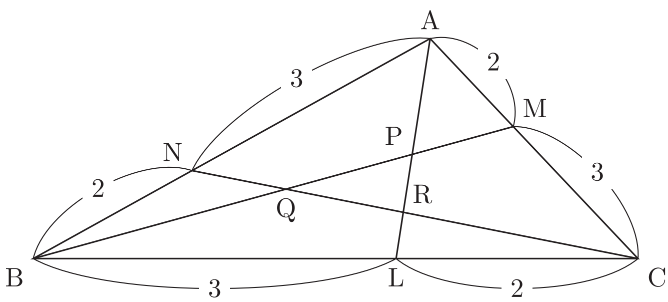
余弦定理から

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CA}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}\\ &= \frac{36+16-64}{2\cdot 6\cdot 4}\\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であるため $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$ である。また，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A\\ &= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\\ &= \boldsymbol{3\sqrt{15}}\end{aligned}$$

問 2



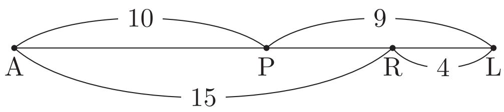
メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{CB}} \times \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RL}} = 1$$
$$\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{BC}} \times \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MA}} \times \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PL}} = 1$$

である。これに辺の比を代入すると

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RL}} = 1$$
$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} \times \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PL}} = 1$$

となるため $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RL}} = \dfrac{15}{4}$, $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PL}} = \dfrac{10}{9}$ である。



よって

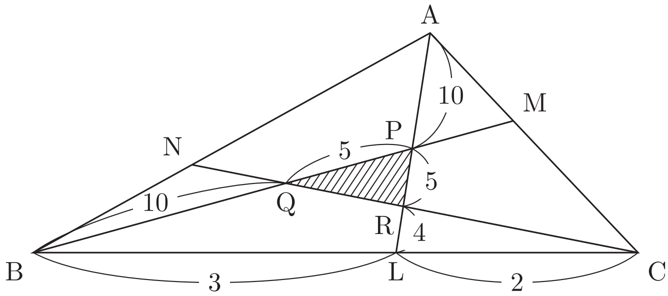
$$\begin{aligned} \mathrm{AP} : \mathrm{PR} : \mathrm{RL} &= 10 : 5 : 4 \\ &= \mathbf{1 : \frac{1}{2} : \frac{2}{5}} \end{aligned}$$

問 3

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{PQR} &= \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}} \triangle\mathrm{PBR} \\ &= \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}} \times \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{AL}} \triangle\mathrm{ABL} \\ &= \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}} \times \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{AL}} \times \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{BC}} \triangle\mathrm{ABC} \end{aligned}$$

問 2 と同様に考えて BQ : QP : PM = 10 : 5 : 4 であることに注意すると

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{19} \times \frac{3}{5} \triangle\mathrm{ABC} = \mathbf{\frac{1}{19}} \triangle\mathrm{ABC}$$



$\boxed{3}$

次の文章を読み，後の問い（問 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$ を次のように定める。

$$f_1(x) = 0$$

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n(n+2)} + \int_1^2 f_{n-1}(t)dt \ (n \geqq 2 \text{ のとき})$$

問 1　自然数 n に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_1^2 f_n(x)dx$$

と定める。このとき，$a_1 = \boxed{26}$ であり，$n \geqq 2$ については漸化式

$$a_n = \frac{\boxed{27}}{\boxed{28}}\left(\frac{\boxed{29}}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \boxed{30}\,a_{n-1}$$

が成り立つ。

問 2　数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{31}}{\boxed{32}}\left(\frac{\boxed{33}}{\boxed{34}} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　$a_1 = \displaystyle\int_1^2 f_1(t)\,dt = \int_1^2 0\,dt = \mathbf{0}$，$a_n = \displaystyle\int_1^2 f_n(t)\,dt$ であるから，

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^2}{n(n+2)} + \int_1^2 f_{n-1}(t)\,dt \\ &= \frac{x^2}{n(n+2)} + a_{n-1} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^2 \left\{\frac{t^2}{n(n+2)} + a_{n-1}\right\} dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3n(n+2)} + ta_{n-1}\right]_1^2 \\ &= \frac{2^3 - 1^3}{3n(n+2)} + (2-1)a_{n-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{6}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + 1 \cdot a_{n-1}} \end{aligned}$$

問 2　$n \geqq 1$ のとき，

$$a_{n+1} = a_n + \frac{7}{6}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3}\right)$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{7}{6}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$$= 0 + \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{7}{6}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}$$

$a_1 = 0$ であるから，これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$\boxed{4}$

次の文章を読み，後の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ。

さいころを 1 つ投げ，以下のルールに従って出た目の数を合計していく。目の数の合計が 7 になったとき，さいころを投げるのをやめる。目の数の合計が 7 を超えた場合は，そのときに出た目の数は合計に加えず，目の数の合計が 7 になるまでさいころを投げ続ける。さいころを，目の数を加えなかった回も含めて n 回投げたたとき，目の数の合計が 7 になる確率を $P(n)$ とする。

問 1　$P(2) = \dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である。

問 2　$P(3) = \dfrac{\boxed{37}}{\boxed{38}\boxed{39}}$ である。

問 3　さいころを 4 回投げたところで，ルールに従って投げるのをやめた。このとき，目の数を加えなかった回が 1 回以上ある確率は $\dfrac{\boxed{40}\boxed{41}}{\boxed{42}\boxed{43}}$ である。

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　サイコロを 2 回投げるとき，目の出方は 6^2 通りある。

そのうち，2 つの目の和が 7 となる目の出方は

$$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$$

の 6 通り。

よって

$$P(2) = \frac{6}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

問 2　1 回目で目の和が 7 となることはない。

2 回目以降は確率 $\dfrac{1}{6}$ で目の和が 7 になるようにすることができることに注意すると

$$P(3) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{5}{36}}$$

問 3　さいころを 4 回投げたところで投げるをやめる確率は

$$1 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{25}{6^3}$$

である。

さいころを 4 回投げて 4 個の目の和が 7 となる組み合わせは

$$(1,\ 1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2,\ 2)$$

であり，出る目の順序を考えることで，4 回投げて投げるのをやめて目の数を加えなかった回数が 0 回である確率は

$$\frac{\frac{4!}{3!} \times 2 + \frac{4!}{2!}}{6^4} = \frac{20}{6^4}$$

である。

したがって，求める確率は

$$\frac{\frac{25}{6^3} - \frac{20}{6^4}}{\frac{25}{6^3}} = \mathbf{\frac{13}{15}}$$

講評

$\boxed{1}$ ［小問集合 (微分法，式と証明)］（やや易）：問 1 は極めて基本的で落とせない。問 2 も文字消去して 1 変数化を行えば相加相乗を用いる典型的なタイプなので得点したい。

$\boxed{2}$ ［平面図形］（標準）：メネラウスの定理を用いる典型的な問題である。これも完答を目指したい。

$\boxed{3}$ ［積分法，数列］（標準）：関数列の問題である。漸化式を立てられれば典型的な数列の問題である。

$\boxed{4}$ ［確率］（やや難）：問 2 までは数え上げてもそこまで時間はかからないが上手い考え方を思いつかないと問 3 で時間がかかってしまうだろう。思いつかなかったとしても問 2 まではしっかり得点したい。

大問 1 から 3 は完答を狙いやすいセットである。全体的に計算量も多くはない。一次突破ボーダーは 65% くらいか。