# 杏林大学医学部　数学

2025年 1月 23日実施

I

$i$ を虚数単位とする。整式 $f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+1$ について，以下の問いに答えよ。

(a)　定数 $k$ に対し，4 次方程式 $f(x)=k$ が異なる 4 つの実数解をもつのは，$k_1<k<k_2$ のときである。

ただし，$k_1=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$，$k_2=\boxed{オ}$ である。

4 次方程式 $f(x)=k_1$ は異なる 3 つの実数解をもち，このうち重解以外の 2 つの解の和は $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$ である。

(b)　$x=\sqrt{2}i-1$ は 2 次方程式 $g(x)=x^2+\boxed{ケ}x+\boxed{コ}=0$ の解であり，$f(x)$ を 2 次式 $g(x)$ で割った余りは $\boxed{サシ}x+\boxed{スセ}$ である。したがって，

$$f(\sqrt{2}i-1)=-\boxed{ソ}+\boxed{サシ}\sqrt{2}i$$

となる。

(c)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+b$ が異なる 2 点で接するとき，接点の $x$ 座標を $\alpha$，$\beta$ として

$$f(x)-(ax+b)=3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

と表すことができる。両辺の $x$ の各次数の係数を比較することで

$$\alpha+\beta=-\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}},\quad \alpha\beta=-\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$$

であることがわかり，$a=\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$，$b=\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネノ}}$ となる。

解答

(a)

$$f(x)=k \text{ が異なる 4 つの実数解をもつ}$$
$$\Longleftrightarrow \text{曲線 } y=f(x) \text{ と直線 } y=k \text{ の共有点が 4 つある}$$

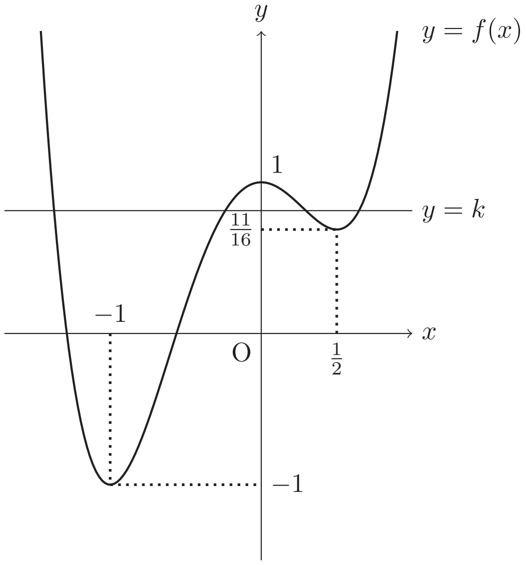
であるから，曲線 $y=f(x)$ を描く。

$$f(x)=3x^4+2x^3-3x^2+1$$
$$\begin{aligned}f'(x)&=12x^3+6x^2-6x\\&=6x(2x-1)(x+1)\end{aligned}$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{11}{16}$ | $\nearrow$ |

したがって，次の図のようになる。




図より，求める $k$ の値の範囲は $\dfrac{11}{16}<k<1$ であり，$\boldsymbol{k_1=\dfrac{11}{16}}$**，**$\boldsymbol{k_2=1}$

$f(x)=k_1 \iff 3x^4+2x^3-3x^2+\dfrac{5}{16}=0 \iff 48x^4+32x^3-48x^2+5=0$ は,

図から $x=\dfrac{1}{2}$ を重解にもつことがわかるから,

$$48x^4+32x^3-48x^2+5=(2x-1)^2(12x^2+20x+5)$$

したがって，$12x^2+20x+5=0$ の 2 解の和を考えて，解と係数の関係より

$$-\frac{20}{12}=\boldsymbol{\frac{-5}{3}}$$

注釈

本質的には同じことだが，4 次方程式の解と係数の関係を用いる，などでもよい。

(b) $x=\sqrt{2}i-1$ のとき

$$x+1=\sqrt{2}i$$
$$(x+1)^2=-2$$
$$\therefore\ x^2+2x+3=0$$

が成り立つから，$x=\sqrt{2}i-1$ は 2 次方程式 $g(x)=\boldsymbol{x^2+2x+3=0}$ である。
実際に割り算を行うと，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商は $3x^2-4x-4$，余りは $\boldsymbol{20x+13}$ である。
したがって,

$$f(x)=g(x)(3x^2-4x-4)+20x+13 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つから，この両辺に $x=\sqrt{2}i-1$ を代入すると,

$$f(\sqrt{2}i-1)=0+20(\sqrt{2}i-1)+13 \qquad (\because\ \ g(\sqrt{2}i-1)=0)$$
$$=\boldsymbol{-7+20\sqrt{2}i}$$

(c) 条件より,

$$f(x)-(ax+b)=3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$
$$3x^4+2x^3-3x^2-ax+1-b=3(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2)$$
$$\therefore\ \ 3x^4+2x^3-3x^2-ax+1-b$$
$$=3\left\{x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2\right\}$$

この両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} -6(\alpha+\beta)=2 & \cdots\cdots ② \\ 3(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)=-3 & \cdots\cdots ③ \\ -6\alpha\beta(\alpha+\beta)=-a & \cdots\cdots ④ \\ 3\alpha^2\beta^2=1-b & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

②より，$\alpha+\beta=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

③より，

$$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-1$$

$$\frac{1}{9}+2\alpha\beta=-1$$

$$\therefore\ \alpha\beta=-\boldsymbol{\frac{5}{9}}$$

④より，$a=6\alpha\beta(\alpha+\beta)=\boldsymbol{\dfrac{10}{9}}$

⑤より，$b=1-3\alpha^2\beta^2=\boldsymbol{\dfrac{2}{27}}$

II

定数 $a$, $b$ に対し，関数 $f(x)$ を次の式で定義する。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x} & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとして，以下の問いに答えよ。

(a) $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき $\tan x < x < \sin x$ が成り立つことを利用すると，

$$\lim_{x \to -0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \boxed{ア}$$

となることがわかる。

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = \frac{b}{\boxed{イ}}$ であり，$\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x) = \boxed{ウ}$ であるので，関数 $f(x)$ が $x = 0$ で連続であることから，$b = \boxed{エ}$ とわかる。また，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x) = \frac{a}{\boxed{オ}}$ であり，設問 (a) の結果を利用すると，

$\displaystyle\lim_{x \to -0} f'(x) = \frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$ となるので，関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることから，$a = \boxed{ケコ}$ と定まる。

(c) 曲線 $y = f(x)$ の $x = 0$ における接線の式は $y = \dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}x + \boxed{セ}$ である。この接線と曲線 $y = f(x)$ の交点のうち，$x > 0$ を満たす点の $x$ 座標を $u$ とする。$u = \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ であり，

$$\int_0^u f(x)dx = \boxed{チ} - \boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}} + \boxed{ト}\log_e \frac{\boxed{ナ} + \sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$$

が成り立つ。ただし，$e$ は自然対数の底である。

解答

(a) $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \tan x < x < \sin x \\ \iff & \frac{\sin x}{\cos x} < x < \sin x \\ \iff & x < \sin x < x\cos x \quad (\because\ \cos x > 0) \\ \iff & -x\cos x < -\sin x < -x \\ \iff & x - x\cos x < x - \sin x < 0 \\ \iff & \frac{1-\cos x}{x} < \frac{x - \sin x}{x^2} < 0 \quad (\because\ x^2 > 0) \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ なので，はさみうちの原理より

$$\lim_{x \to -0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \mathbf{0}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
& \tan x < x < \sin x \\
\iff & \tan x - \sin x < x - \sin x < 0 \\
\iff & \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x} < x - \sin x < 0 \\
\iff & \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2 \cos x} < \frac{x-\sin x}{x^2} < 0 \quad (\because\ x^2 > 0) \\
\iff & \frac{\sin^3 x}{x^2 \cos x(1+\cos x)} < \frac{x-\sin x}{x^2} < 0 \\
\iff & \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \frac{x}{\cos x(1+\cos x)} < \frac{x-\sin x}{x^2} < 0
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \frac{x}{\cos x(1+\cos x)} = 1^3 \cdot \frac{0}{1\cdot 2} = 0$ なので，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to-0}\frac{x-\sin x}{x^2} = \mathbf{0}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} f(x) &= \lim_{x\to+0}\frac{b}{\sqrt{9}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{3}} \\
\lim_{x\to-0} f(x) &= \lim_{x\to-0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3-2x}{3\cos x} = 1\cdot\frac{3}{3} = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

$x=0$ で連続であるとき

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to-0} f(x) = f(0)$$

$$\iff \frac{b}{3} = 1 = \frac{b}{3} \iff b = \mathbf{3}$$

また，$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}} & (x>0) \\ \dfrac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x} = \dfrac{(3-2x)\sin x}{3x} & (x<0) \end{cases}$ のとき

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x^2+9} - (ax+b)\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} & (x>0) \\ \dfrac{3x\cos x - 2x^2\cos x - 3\sin x}{3x^2} & (x<0) \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} f'(x) &= \lim_{x\to+0} = \frac{3a}{9} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{3}} \\
\lim_{x\to-0} f'(x) &= \lim_{x\to-0}\frac{1}{3}\cdot\frac{3(x-\sin x) - 3x(1-\cos x) - 2x^2\cos x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to-0}\frac{1}{3}\left(3\cdot\frac{x-\sin x}{x^2} - 3x\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} - 2\cos x\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(3\cdot 0 - 3\cdot 0\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1\right) = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}
\end{aligned}$$

$x=0$ で微分可能であるとき（→ 補足 ）

$$\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to-0} f'(x)$$
$$\iff \frac{a}{3} = \frac{-2}{3} \iff a = \mathbf{-2}$$

補足

問題文では，$f'(x)$ が $x=0$ において連続であることが仮定されていないため，即座に $\lim\limits_{x\to-0} f'(x) = \lim\limits_{x\to+0} f'(x)$ として良いか迷った受験生もいたかもしれない。その場合，「$x=0$ において $f(x)$ が微分可能」から $a$ の値を求めるには，素朴には以下のようにすることになる。($b=3$, $f(0)=1$ までは同じ)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{ax+3}{\sqrt{x^2+9}}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to+0}\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{3-\sqrt{x^2+9}}{x\sqrt{x^2+9}}\right)\\ &= \lim_{x\to+0}\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}(3+\sqrt{x^2+9})}\right) = \frac{a}{3}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to-0}\frac{\frac{(3-2x)\sin x}{3x}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to-0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

であり，$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるから，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ が存在するため，

$$\frac{a}{3} = -\frac{2}{3} \qquad \therefore\ a=-2$$

なお，問題文の流れに合わせて丁寧に解答すると，次のようになる。
平均値の定理より，$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

をみたす $c$ が $0$ と $x$ の間に存在する。
$f(x)$ は $x=0$ において微分可能なので，$f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ が存在し，

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

が成り立つが

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \lim_{c\to+0} f'(c) \quad (0<c<x)\\ &= \frac{a}{3}\\ (\text{右辺}) &= \lim_{c\to-0} f'(c) \quad (x<c<0)\\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

と存在するので，$\dfrac{a}{3} = -\dfrac{2}{3}$ が言えるため，上記の答案のように求めた。

注釈

記述ではないので，細かい議論を無視するなら，$\displaystyle\lim_{x\to-0} f'(x)$ はロピタルの定理を用いてもよいだろう。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-0} f'(x) &= \lim_{x\to-0} \frac{3x\cos x - 2x^2\cos x - 3\sin x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to-0} \left( \frac{-\sin x + x\cos x}{x^2} - \frac{2}{3}\cos x \right) \\
&= \lim_{x\to-0} \left( \frac{(-\sin x + x\cos x)'}{(x^2)'} - \frac{2}{3}\cos x \right) \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\
&= \lim_{x\to-0} \left( \frac{-x\sin x}{2x} - \frac{2}{3}\cos x \right) \\
&= \lim_{x\to-0} \left( \frac{-\sin x}{2} - \frac{2}{3}\cos x \right) \\
&= 0 - \frac{2}{3} = \frac{-2}{3}
\end{aligned}$$

(c)　(b) より $f(0) = 1,\ f'(0) = \dfrac{-2}{3}$ であるので，求める接線の方程式は

$$y = \boldsymbol{\frac{-2}{3}x + 1}$$

これと $y = f(x)\ (x > 0)$ を連立して

$$\begin{aligned}
& \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{-2}{3}x + 1 \\
\iff & \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{-2x+3}{3} \\
\iff & \frac{1}{3}(-2x+3)(3-\sqrt{x^2+9}) = 0 \\
\iff & x = \boldsymbol{\frac{3}{2}} (= u) \quad (\because x > 0)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_0^u f(x)dx &= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}} dx \\
&= -2\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx + 3\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx &= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{(x^2+9)'}{2\sqrt{x^2+9}} dx \\
&= \left[ \sqrt{x^2+9} \right]_0^{\frac{3}{2}} \\
&= -3 + \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$ において $x = 3\tan\theta$ とおくと，$dx = 3\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，$x : 0 \to \dfrac{3}{2}$ のとき $\theta : 0 \to \alpha$

（ただし，$\alpha$ は $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす角）であるので

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx &= \int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{9(\tan^2\theta+1)}}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\alpha}\frac{1}{\frac{3}{\cos\theta}}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta
\end{aligned}$$

さらに，$\sin\theta=t$ とおくと，$\cos\theta d\theta=dt$ であり，$\theta:0\to\alpha$ のとき $t:0\to\sin\alpha\left(=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$（$\because$ $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$）であるので

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{1}{1-t^2}dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|1+t|-\log|1-t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\\
&= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\\
&= \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \cdots\cdots ③
\end{aligned}$$

よって，①②③より

$$\begin{aligned}
\int_0^{u}f(x)dx &= -2\left(-3+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)+3\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
&= \mathbf{6-3\sqrt{5}+3\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

注釈

$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$ ($a$ は定数，$C$ は積分定数) を知っていれば

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx &= \Big[\log(x+\sqrt{x^2+9})\Big]_0^{\frac{3}{2}}\\
&= \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

とすぐに計算できる。

$\boxed{\text{注釈}}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$ を $x = 3 \cdot \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx &= \int_0^{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}} 1dt \\ &= \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

とすぐに計算できる。

III

座標空間において，$x$ 軸および $y$ 軸からの距離が共に 1 であるような点全体の集合を $L$ とし，$L$ と $xy$ 平面との交点のうち，第 1 ～ 4 象限にある点を順に点 A, B, C, D とする。また，$L$ と $z$ 軸との交点のうち，$z$ 座標が正である点を E，負である点を F とする。 $x$ 軸および $y$ 軸からの距離が共に 1 以下であるような点全体の集合から，八面体 E − ABCD − F の内部を除いてできる立体を $K$ として，以下の問いに答えよ。

(1) $L$ は原点を中心とする 2 つの楕円からなり，このうち点 A を通る楕円の内部の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\,\pi$ である。$K$ に属する点のうち，$x$ 軸からの距離が 1 であるような領域の展開図は 2 つの正弦曲線で囲まれた図形であり，その面積は $\boxed{\text{イ}}$ である。

立体 $K$ を $z = t$ (ただし，$-1 \leqq t \leqq 1$) で表される平面で切ってできる断面の面積は

$\boxed{\text{ウエ}}\,t^2 + \boxed{\text{オ}}\,|t|$ であり，$K$ の体積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。

立体 $K$ を $x = u$ (ただし $0 < u < 1$) で表される平面で切ってできる断面の面積 $S$ は，

$u = \cos\theta$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす $\theta$ を用いて

$$S = \boxed{\text{ク}}\,\theta + \sin\left(\boxed{\text{ケ}}\,\theta\right) + \cos\left(\boxed{\text{ケ}}\,\theta\right) - \boxed{\text{コ}}$$

と書くことができる。$S$ は $u = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ をとる。

(2) 八面体 E − ABCD − F の辺を通って 1 秒ごとに隣接する頂点に移動する動点 P を考える。点 P が $xy$ 平面上のいずれかの頂点から 1 秒後に点 E に移動する確率は $\dfrac{1}{3}$，点 F に移動する確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとし，八面体のいずれかの頂点から 1 秒後に点 E, F 以外の隣接する頂点の 1 つに移動する確率は $\dfrac{1}{4}$ であるとする。

時刻 $t = 0$ において点 E に存在した動点 P が，$n$ 秒後に点 E に存在する確率を $p_n$，点 F に存在する確率を $q_n$ とすると，自然数 $n$ に対し，

$$p_{n+1} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}(1 - p_n - q_n), \quad q_{n+1} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}(1 - p_n - q_n)$$

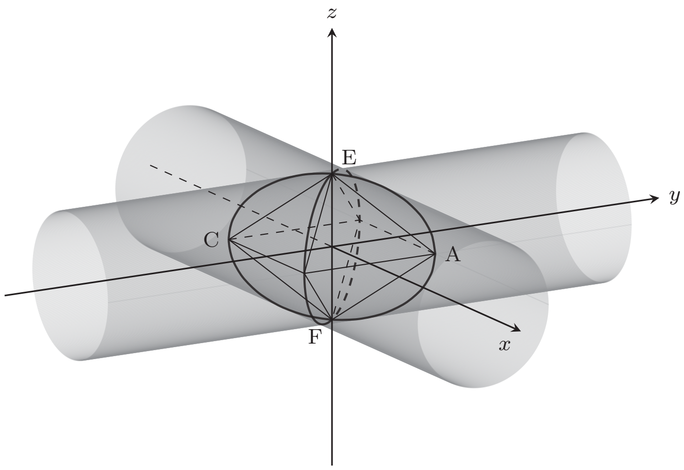
が成り立つ。このとき，動点 P が 4 秒後に点 A に存在する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ であり，点 F に存在する確率が最も高くなるのは $\boxed{\text{ナ}}$ 秒後で，その確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。また，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

が成り立つ。

解答

(1) 図は次のようになる.




各点の座標は A$(1,1,0)$，B$(-1,1,0)$，C$(-1,-1,0)$，D$(1,-1,0)$，E$(0,0,1)$，F$(0,0,-1)$ となる．

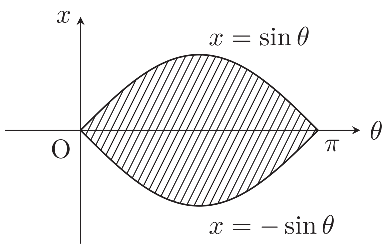
楕円の長軸の長さは $2\sqrt{2}$，短軸の長さは 2 であるため，面積は $\pi\times\sqrt{2}\times 1=\boldsymbol{\sqrt{2}\pi}$ である．

$x$ 軸からの距離が 1 であるような領域は円柱を成す．これを $C$ とおく．求める展開図は $C$ の側面上で $y$ 軸との距離が 1 以下の点の集合である．式で表すと

$$\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x^2+z^2\leqq 1 \end{cases}$$

となる．円柱の側面の点は $(x,\sin\theta,\cos\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができる．上の式に代入すると $x^2\leqq 1-\cos^2\theta$ を得る．これを変形することで $-\sin\theta\leqq x\leqq\sin\theta$ を得る．

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における側面の図は次のようになる．




ゆえに面積は

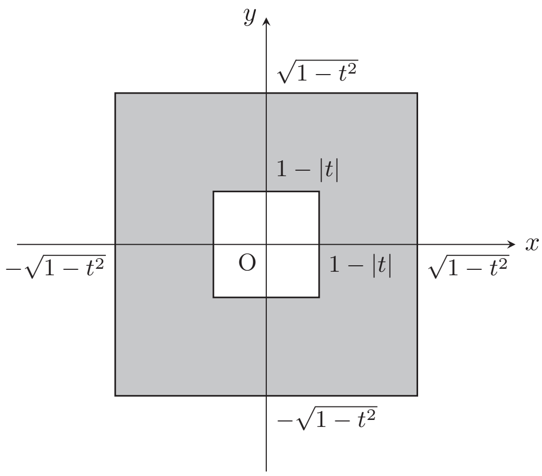
$$4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=4\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{8}$$

である．

平面 $z=t$ 上で，$x$ 軸および $y$ 軸からの距離が共に 1 以下であるような点を表す式は次のようになる．

$$\begin{cases} x^2+t^2\leqq 1 \\ y^2+t^2\leqq 1 \end{cases}$$

また八面体 E-ABCD-F と平面 $z=t$ の共通部分は底面（四角形 ABCD）を $1-|t|$ 倍した四角形である．よって $K$ を平面 $z=t$ で切断した断面は下図のようになる．




ゆえに面積は

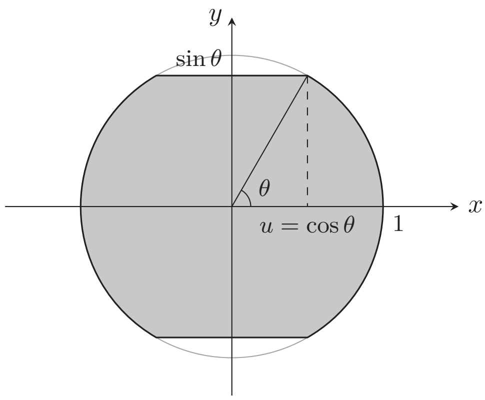
$$\begin{aligned}4\times\{(\sqrt{1-t^2})^2-(1-|t|)^2\}&=4(1-t^2-1+2|t|-t^2)\\&=\boldsymbol{-8t^2+8|t|}\end{aligned}$$

である.

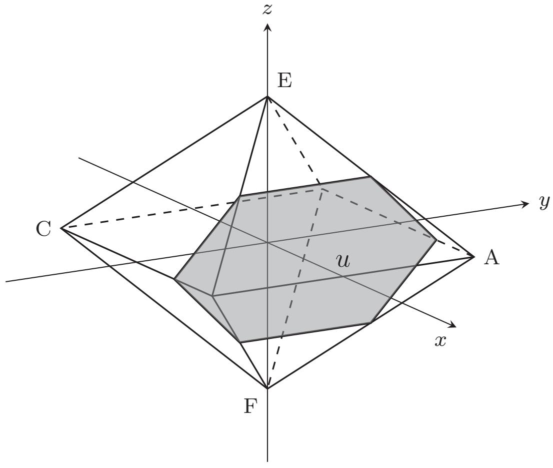
平面 $x=u$ 上で，$x$ 軸および $y$ 軸からの距離が共に 1 以下であるような点を表す式は次のようになる.

$$\begin{cases}u^2+z^2\leqq 1\\ y^2+z^2\leqq 1\end{cases}$$

ゆえに，平面 $x=u$ における $x$ 軸および $y$ 軸からの距離が共に 1 以下であるような点の成す立体（$K$ から八面体をくり抜く前の立体）の断面図は次のようになる.

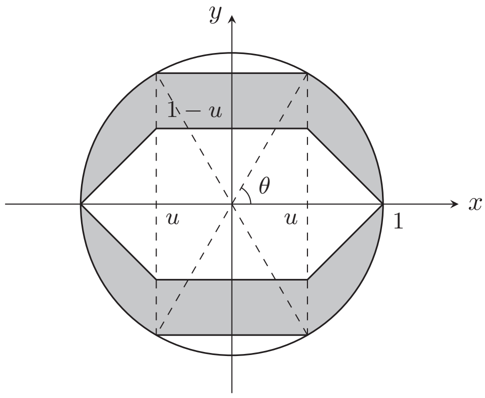



八面体 E-ABCD-F と平面 $x=u$ の共通部分を計算する.



平面 $x=u$ と直線 AE の交点は $u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\begin{pmatrix}u\\u\\1-u\end{pmatrix}$ より $(u,u,1-u)$ である．対称性により，平面 $x=u$ と直線 DE の交点は $(u,-u,1-u)$，直線 AF との交点は $(u,u,-1+u)$，直線 BF との交点は $(u,-u,-1+u)$ となる．

よって $K$ を平面 $x=u$ で切断した断面は下図のようになる．




ゆえに面積は

$$\begin{aligned}S&=\underbrace{4\times\frac{1}{2}\theta}_{\text{中心角 }\theta\text{ の扇形 4 つ分}}+\underbrace{4\times\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}_{\text{三角形}}-\underbrace{2\times\frac{1}{2}\times(2u+2)\times(1-u)}_{\text{取り除く部分}}\\&=2\theta+\sin 2\theta-2(1-u^2)\\&=2\theta+\sin 2\theta-2(1-\cos^2\theta)\\&=2\theta+\sin 2\theta-2\left(1-\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\\&=\boldsymbol{2\theta+\sin 2\theta+\cos 2\theta-1}\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta}&=2+2\cos 2\theta-2\sin\theta\\&=2+2\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{3}{4}\pi\right)\\&=2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\left(2\theta+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}\end{aligned}$$

より増減表を書くと

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dS}{d\theta}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

であるため，$\theta=\frac{\pi}{4}$ つまり $u=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき最大値 $2\times\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}-1=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ をとる．

(2)　$1-p_n-q_n$ は時刻 $t=n$ のときに動点 P が $xy$ 平面上の存在する確率を表す．

$xy$ 平面上の頂点から点 E に移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ であるため $p_{n+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(1-p_n-q_n)}$ である．また，$xy$ 平面上の頂点から点 F に移動する確率は $\dfrac{1}{6}$ であるため $q_{n+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}(1-p_n-q_n)}$ である．

$r_n=1-p_n-q_n$ とおく．対称性から $t=n$ で動点 P が頂点 A に存在する確率は $\dfrac{1}{4}r_n$ である．

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 1-p_{n+1}-q_{n+1} \\ &= 1-\frac{1}{3}(1-p_n-q_n)-\frac{1}{6}(1-p_n-q_n) \\ &= 1-\frac{1}{2}r_n \end{aligned}$$

である．変形すると

$$r_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(r_n-\frac{2}{3}\right)$$

となる．(特性方程式 $\alpha=1-\dfrac{1}{2}\alpha$ を解くことで $\alpha=\dfrac{2}{3}$ を得ている．)

$r_1=1$ となるため $r_n=\dfrac{2}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である．

こうして $r_4=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{24}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$ であるため, 動点 P が 4 秒後に頂点 A に存在する確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{8}=\boldsymbol{\dfrac{5}{32}}$ である．

$n\geqq 2$ で $q_n=\dfrac{1}{6}r_{n-1}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，1 秒後に動点 P は頂点 F にたどり着かないため $q_1=0$, であることから，点 F に存在する確率が最も高くなるのは **2** 秒後で確率は $q_2=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ である．

また $n\geqq 2$ で $p_n=\dfrac{1}{3}r_{n-1}$ であるため

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}p_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}r_{n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}} \end{aligned}$$

である．

## 講評

Ⅰ［式と計算・微分］（やや易）：四次関数にまつわる問題であった．計算ミスなく切り抜けたい．

Ⅱ［極限・微分・積分］（標準）：微分可能になるよう未知数を計算するパートは，基礎的な計算なので得点したい．最後の積分は慣れていないと難しい．

Ⅲ［(1) 体積, (2) 確率］（やや難）：前半が鬼門か．ある程度見切りをつけて後半での得点を狙いたい．

昨年と比べ計算量が増えた．特に大問 3 では大きく差がついたであろう．基礎的な計算問題でいかに点数を獲得できるかがポイントとなったであろう．1 次突破ボーダーは 55〜60 %程度か．