

東北医科薬科大学 数学

2025年 1月 25日実施

[I]

2次方程式 $x^2 + ax + 4b = 0$ の解を α, β とおく。ただし、実数 a, b は $a^2 - 10a + b^2 = 0$ を満たす。このとき、次の間に答えなさい。

- (1) α, β が実数でないとき、 $|\alpha|$ の最大値は $\sqrt{\text{イ}}$ であり、このとき、 $a = \text{ウ}$, $b = \text{エ}$ である。
- (2) $\alpha = \beta$ で $a \neq 0$ のとき、 $a = \text{オ}$, $b = \text{カ}$, $\alpha = \beta = \text{キク}$ である。
- (3) α, β が実数であるとする。このとき、
- (3-1) $\alpha^2 + \beta^2 + 10\alpha + 10\beta$ の最大値は である。
- (3-2) $\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\beta - \alpha - \beta$ の最大値は + $\sqrt{\text{ス}}$ 最小値は である。

解答

$$a^2 - 10a + 4b^2 = 0 \quad \dots\dots ①$$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 4b$$

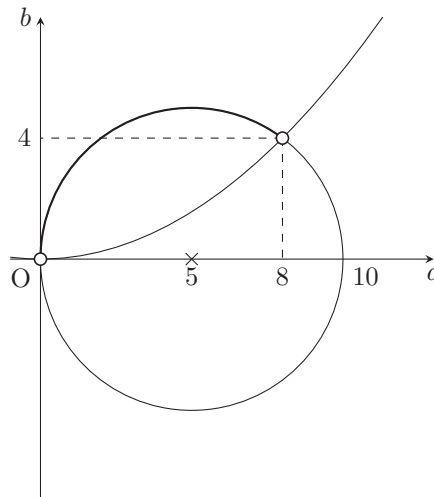
- (1) α, β は実数解ではないので、
 判別式 $D = a^2 - 16b < 0 \quad \dots\dots ②$

であり、

$$|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} = \alpha\beta = 4b$$

である。

①, ② を満たす a, b は次図のようになる。



よって、 $|\alpha|^2 = 4b \leq 20$ より、
 $(a, b) = (5, 5)$ のとき、 $|\alpha|$ の最大値は $2\sqrt{5}$

(2) 与方程式が重解をもつときであるので、

$$\text{判別式 } D = a^2 - 16b = 0 \dots\dots ③$$

①, ③ および $a \neq 0$ より, $(a, b) = (8, 4)$

このとき, 与方程式は $x^2 + 8x + 16 = 0 \iff (x + 4)^2 = 0$ より,
 $\alpha = \beta = -4$

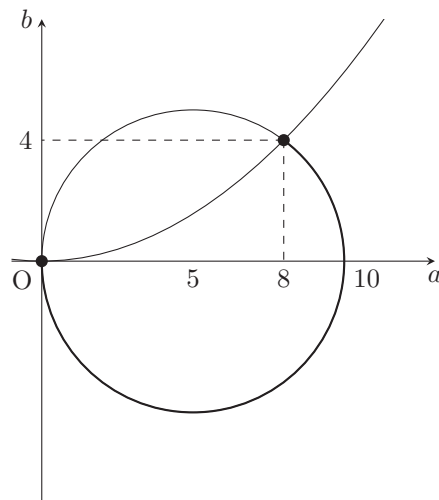
(3) 与方程式が実数解をもつときであるので、

$$\text{判別式 } D = a^2 - 16b \geq 0 \dots\dots ④$$

(3-1) $k = \alpha^2 + \beta^2 + 10\alpha + 10\beta$ とおく。

$$\begin{aligned} k &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 10(\alpha + \beta) \\ &= a^2 - 10a - 8b \quad (\because ①) \\ &= -b^2 - 8b \\ &= -(b + 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

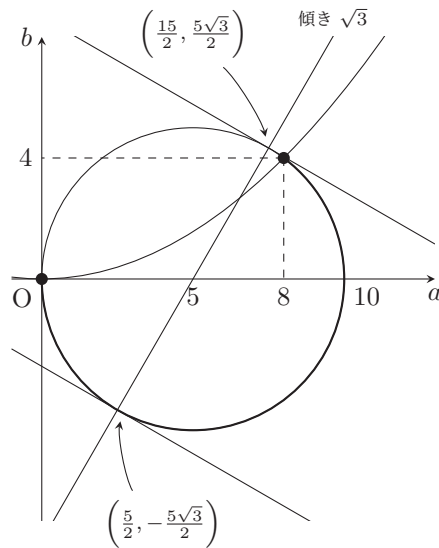
図から $-5 \leq b \leq 4$ より k の最大値は 16



(3-2) $l = \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\beta - (\alpha + \beta)$ とおく。

$$l = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4b - (-a) = a + \sqrt{3}b$$

ab 平面上で ①, ④ と $l = a + \sqrt{3}b$ が共有点をもつ条件を求める。



円①と $l = \sqrt{3}b + a$ の接点は、円①と $b = \sqrt{3}a$ を連立することで、

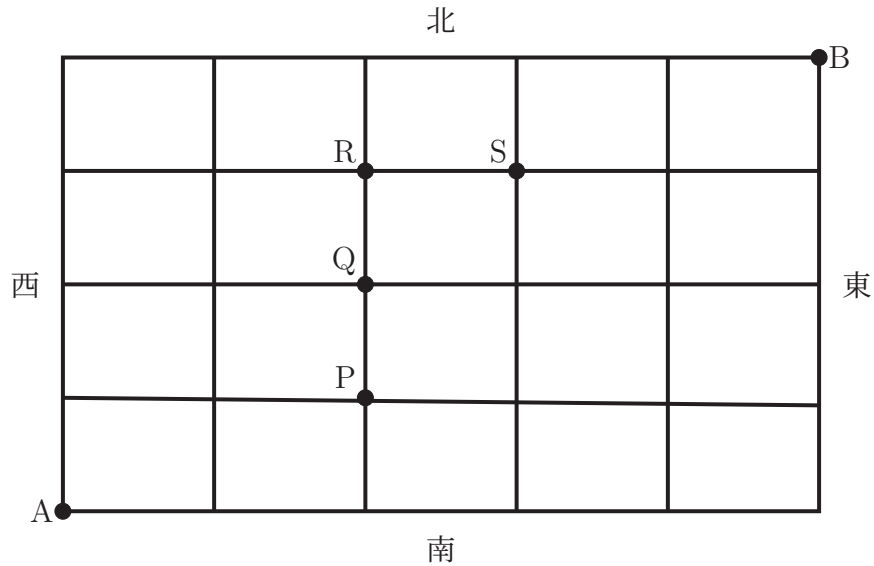
$$(a, b) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{15}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$$

と求まる。

よって、 $(a, b) = (8, 4)$ のとき、 l は最大値 $8 + 4\sqrt{3}$ をとり、

$(a, b) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$ のとき l は最小値 $-\frac{5\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \frac{5}{2} = -5$ をとる。

[II]



上図のように、東西に5本、南北に6本の道がある。AからBまで行く道順を考える。次の問に答えなさい。

- (1) AからBまで最短で行く道順は アイウ 通りである。
- (2) Qを通過して、AからBまで最短で行く道順は エオ 通りである。
- (3) 区画QRおよび区画RSのどちらも通らずに、AからBまで最短で行く道順は カキ 通りである。
- (4) AからBまで行く途中に、1回だけ東から西に1区画戻ることにして行くとする。ただし、この1回以外は、東か北のいずれかにしか移動しない。また、Bには1度だけ到達するものとする。
- (4-1) P, Q, Rのいずれかで1区画西に戻ることにして、AからBまで最短で行く道順は クケコ 通りである。
- (4-2) 途中に1回だけ東から西に1区画戻ることにして、AからBまで最短で行く道順は サシスセ 通りである。

解答

- (1) →5個, ↑4個で作られる順列と1対1に対応するので

$${}^9C_4 = 126(\text{通り})$$

- (2) A→Q→Bと行く場合を数える。(1)と同様にして

$${}^4C_2 \times {}^5C_2 = 60(\text{通り})$$

- (3) 区画QRを通るのはA→Q→R→Bと行く場合なので、 ${}^4C_2 \times 1 \times {}^4C_1 = 24(\text{通り})$

区画RSを通るのはA→R→S→Bと行く場合なので、 ${}^5C_2 \times 1 \times {}^3C_1 = 30(\text{通り})$

区画QR, RSをともに通るのはA→Q→R→S→Bと行く場合なので、 ${}^4C_2 \times 1 \times 1 \times {}^3C_1 = 18(\text{通り})$

したがって、求める場合の数は

$$126 - (24 + 30 - 18) = 90(\text{通り})$$

- (4)

- (4-1) P, Q, Rから1区画だけ西の点をP', Q', R'とする。

(ア) Pで1区画だけ西に戻るとき

$$A \rightarrow P \rightarrow P' \rightarrow B \text{ と行く場合を考えて } {}^3C_1 \times 1 \times {}^7C_3 = 105(\text{通り})$$

(イ) Qで1区画だけ西に戻るとき

$$A \rightarrow Q \rightarrow Q' \rightarrow B \text{ と行く場合を考えて } {}^4C_2 \times 1 \times {}^6C_2 = 90(\text{通り})$$

(ウ) Rで1区画だけ西に戻るとき

$$A \rightarrow R \rightarrow R' \rightarrow B \text{ と行く場合を考えて } {}^5C_2 \times 1 \times {}^5C_1 = 50(\text{通り})$$

以上(ア)~(ウ)より、求める場合の数は

$$105 + 90 + 50 = \mathbf{245}(\text{通り})$$

(4-2) (4-1)と同様にどの点で西に戻るかで場合分して考えると次の図のようになる。

	5	15	35	70	B
	24	50	80	105	112
	63	90	100	90	63
	112	105	80	50	24
A	126	70	35	15	5

よって、求める場合の数はこれらを加えて

$$\mathbf{1524}(\text{通り})$$

別解

↑4個, →6個, ←1個で作られる順列に対応させる。

まず、→と←が入る場所を□として順列を考える。例えば、↑□□↑□□↑↑□□□がある。

この順列に対して□への←, →の入れ方を考えると、←はすべての→より左または右にあってはならないので、この入れ方は5通りある。

よって、

$${}_{11}C_4 \times 5 = 1650(\text{通り})$$

しかし、この中にはBに1度到達してから西に移動したのち再びBに移動する場合が含まれる。

この場合の数は ${}_9C_4 \times 1 = 126(\text{通り})$ であるので、求める場合の数は

$$1650 - 126 = \mathbf{1524}(\text{通り})$$

Ⅲ

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ を定義域とする 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が、次の (i), (ii) を満たすとする。

$$(i) f(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \tan^2 x + (3 - \sqrt{3}) \tan x - 8g(x),$$

$$(ii) g'(x) = \tan x, g(0) = 0.$$

このとき、次の間に答えなさい。以下、対数は自然対数とする。

(1) $f'(0) = \boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $f(x)$ の極小値を求めると、

$$x = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi \text{ のとき, } \frac{\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}} \log 2,$$

$$x = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi \text{ のとき, } \frac{\boxed{\text{ス}} - \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} - \boxed{\text{タ}} \log 2$$

の 2 つである。

(3) $f(x)$ の極大値を求めると、 $x = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}\pi$ のとき、

$$\frac{\boxed{\text{トナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} + \boxed{\text{ノ}} \log \left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ハ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{4} \right) \text{ である。}$$

ただし、 $\boxed{\text{ハ}} > \boxed{\text{ヒ}}$ とする。

解答

$g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \tan x \, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx \\ &= -\log |\cos x| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

と計算される。 $x = 0$ を代入すると

$$g(0) = -\log |\cos 0| + C = C$$

である。 $g(0) = 0$ であったため $C = 0$, つまり $g(x) = -\log |\cos x|$ である。

(1) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ であるため

$$f'(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + (3 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 8 \tan x$$

である。よって

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1 + (3 - \sqrt{3}) \cdot 1 - 8 \cdot 0 \\ &= 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} + (3 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} - 8 \cdot 1 \\ &= 2 + 2\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

(2) $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$ を代入すると

$$f'(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot 2 \tan x \cdot (\tan^2 x + 1) + (3 - \sqrt{3}) \cdot (\tan^2 x + 1) - 8 \tan x$$

となる。ここで $t = \tan x$ とおき展開すると

$$\begin{aligned} &(1 + \sqrt{3})t(t^2 + 1) + (3 - \sqrt{3})(t^2 + 1) - 8t \\ &= (1 + \sqrt{3})t^3 + (3 - \sqrt{3})t^2 + (-7 + \sqrt{3})t + (3 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。(1) の $f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$ より、上の多項式は $t = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ を代入すると 0 になる。よって、因数定理より $t - 1$ で割り切れるため、因数分解すると

$$(t - 1)\{(1 + \sqrt{3})t^2 + 4t + \sqrt{3} - 3\}$$

となる。

$$\begin{aligned} &(1 + \sqrt{3})t^2 + 4t + \sqrt{3} - 3 \\ &= (1 + \sqrt{3})\{t^2 + (2\sqrt{3} - 2)t + 3 - 2\sqrt{3}\} \\ &= (1 + \sqrt{3})(t + \sqrt{3})\{t - (2 - \sqrt{3})\} \end{aligned}$$

であるため、

$$(t - 1)\{(1 + \sqrt{3})t^2 + 4t + \sqrt{3} - 3\} = 0$$

の解は $t = 1, -\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ である。よって $t = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ より $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$ である。ただし、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ で $\tan x$ が単調増加であることと、

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

であることを用いた。

増減表は

x	\cdots	$-\frac{\pi}{3}$	\cdots	$\frac{\pi}{12}$	\cdots	$\frac{\pi}{4}$	\cdots
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow

となる。

したがって極小値をとるのは $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ となる。

以上より $x = -\frac{1}{3}\pi$ のとき、極小値

$$f \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) + 8 \log \left| \frac{1}{2} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3+3\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} + 3 + 8 \cdot (-1) \log 2 \\
 &= \frac{9-3\sqrt{3}}{2} - 8 \log 2
 \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき, 極小値

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot 1^2 + (3-\sqrt{3}) \cdot 1 + 8 \log \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \\
 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 3 - \sqrt{3} + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \log 2 \\
 &= \frac{7-\sqrt{3}}{2} - 4 \log 2
 \end{aligned}$$

をとる。

注釈

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (1+\sqrt{3})t(t^2+1) + (3-\sqrt{3})(t^2+1) - 8t \\
 &= (1+\sqrt{3})t(t^2+1) - (1+\sqrt{3})(t^2+1) + 4(t^2+1) - 8t \\
 &= (1+\sqrt{3})(t^2+1)(t-1) + 4(t-1)^2 \\
 &= (t-1)\{(1+\sqrt{3})(t^2+1) + 4(t-1)\} \\
 &= (t-1)\{(1+\sqrt{3})t^2 + 4t - 3 + \sqrt{3}\}
 \end{aligned}$$

とすることもできる。

(3) (2) より $x = \frac{\pi}{12}$ のとき, 極大値をとる。

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} (2-\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3}) + 8 \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} (7-4\sqrt{3}) + (9-5\sqrt{3}) + 8 \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{-5+3\sqrt{3}}{2} + (9-5\sqrt{3}) + 8 \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{13-7\sqrt{3}}{2} + 8 \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

となる。以上より $x = \frac{1}{12}\pi$ で極大値 $\frac{13-7\sqrt{3}}{2} + 8 \log \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ をとる。

講評

[I] [複素数と方程式] (標準) : 2次方程式の解と係数に関する出題であった。式の処理を落ち着いてやっていきたい。存在条件が絡むのでやりにくく感じる受験生もいただろう。

[II] [場合の数] (やや難) : 最短距離に関する場合の数からの出題であった。(4-2) は中々難しい。それ以外をしっかりと得点したい。

[III] [数Ⅲ微積分] (標準) : 三角関数に関する微積分からの出題であった。(3) で極大値をとる x は \tan の値を暗記しておくとも時間短縮につながる。

全体的な難易度は昨年度に比べると易化した。全体的に差がつきやすい出題であっただろう。[II] (4-2) は捨てて他で点数を確保していくとよい。一次突破ボーダーは 65% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは


医学部専門予備校
YMS
heart of medicine
 ☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
 東京都渋谷区代々木 1-37-14

医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ 福岡校 ☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

