医学部専門予備校
YMS
医学部進学予備校
メビオ
医学部専門予備校
英進館メビオ
福岡校

解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2025年 2月 11日実施

1.

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，k 回目に出る目を X_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ とする。このとき，

積 $X_1X_2X_3$ が 10 の倍数になる確率は $\boxed{(ア)}$，

和 $X_1+X_2,\ X_2+X_3,\ X_3+X_1$ が，いずれも 6 の倍数にならない確率は $\boxed{(イ)}$

である。

解答

(ア)　積 $X_1X_2X_3$ が 2 の倍数になる事象を A，積 $X_1X_2X_3$ が 5 の倍数になる事象を B とするとき，

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1-P(\overline{A}) \\
&= 1-(3\text{ 回とも奇数が出る確率}) \\
&= 1-\left(\frac{3}{6}\right)^3 \\
&= \frac{7}{8} \\
P(B) &= 1-P(\overline{B}) \\
&= 1-(3\text{ 回とも 5 以外が出る確率}) \\
&= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 \\
&= \frac{91}{216} \\
P(\overline{A}\cap\overline{B}) &= \left(\frac{2}{6}\right)^3 \\
&= \frac{1}{27} \\
\therefore\ \ P(A\cup B) &= 1-P(\overline{A}\cap\overline{B}) \\
&= 1-\frac{1}{27} \\
&= \frac{26}{27}
\end{aligned}$$

ここで，積 $X_1X_2X_3$ が 10 の倍数になる確率は $P(A\cap B)$ であるから

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(イ)　$X_1=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ それぞれについて調べる。

(i)　$X_1=1$ のとき

$1+X_2,\ X_2+X_3,\ X_3+1$ について，$1+X_2,\ X_3+1$ がどちらも 6 の倍数にならない $X_2,\ X_3$ は

$$X_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$$

$$X_3=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$$

このうち，X_2+X_3 が 6 の倍数になる $(X_2,\ X_3)$ の組は

$$(X_2,\ X_3)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (6,\ 6)$$

であるから，題意をみたす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組数は

$$5\times5-4=21\ (\text{通り})$$

(ii)　$X_1=2$ のとき

$2+X_2,\ X_2+X_3,\ X_3+2$ について，$2+X_2,\ X_3+2$ がどちらも 6 の倍数にならない $X_2,\ X_3$ は

$$X_2=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6$$

$$X_3=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6$$

このうち，X_2+X_3 が 6 の倍数になる $(X_2,\ X_3)$ の組は

$$(X_2,\ X_3)=(1,\ 5),\ (3,\ 3),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$$

であるから，題意をみたす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組数は

$$5\times5-4=21\ (\text{通り})$$

(iii)　$X_1=3$ のとき

$3+X_2,\ X_2+X_3,\ X_3+3$ について，$3+X_2,\ X_3+3$ がどちらも 6 の倍数にならない $X_2,\ X_3$ は

$$X_2=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6$$

$$X_3=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6$$

このうち，X_2+X_3 が 6 の倍数になる $(X_2,\ X_3)$ の組は

$$(X_2,\ X_3)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$$

であるから，題意をみたす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組数は

$$5\times5-5=20\ (\text{通り})$$

(iv)　$X_1=4$ のとき

$4+X_2,\ X_2+X_3,\ X_3+4$ について，$4+X_2,\ X_3+4$ がどちらも 6 の倍数にならない $X_2,\ X_3$ は

$$X_2=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

$$X_3=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

このうち，X_2+X_3 が 6 の倍数になる $(X_2,\ X_3)$ の組は

$$(X_2,\ X_3)=(1,\ 5),\ (3,\ 3),\ (5,\ 1),\ (6,\ 6)$$

であるから，題意をみたす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組数は

$$5\times 5-4=21\ (\text{通り})$$

(v)　$X_1=5$ のとき

$5+X_2,\ X_2+X_3,\ X_3+5$ について，$5+X_2,\ X_3+5$ がどちらも 6 の倍数にならない $X_2,\ X_3$ は

$$X_2=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$
$$X_3=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

このうち，X_2+X_3 が 6 の倍数になる $(X_2,\ X_3)$ の組は

$$(X_2,\ X_3)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (6,\ 6)$$

であるから，題意をみたす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組数は

$$5\times 5-4=21\ (\text{通り})$$

(vi)　$X_1=6$ のとき

$6+X_2,\ X_2+X_3,\ X_3+6$ について，$6+X_2,\ X_3+6$ がどちらも 6 の倍数にならない $X_2,\ X_3$ は

$$X_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$
$$X_3=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

このうち，X_2+X_3 が 6 の倍数になる $(X_2,\ X_3)$ の組は

$$(X_2,\ X_3)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$$

であるから，題意をみたす $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ の組数は

$$5\times 5-5=20\ (\text{通り})$$

以上から，求める確率は

$$\frac{20\times 2+21\times 4}{6^3}=\mathbf{\frac{31}{54}}$$

2.

次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1)　3 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2\log(n+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)} \leqq \frac{1}{2\log n}$$

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3)　$m \geqq n$ を満たす 3 以上の自然数 m，n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m} \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

解答

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$(0 <) \log n \leqq \log(x+n) \leqq \log(1+n)$ であるから ($\because$ n は 3 以上の自然数),

$$\frac{1}{\log(n+1)} \leqq \frac{1}{\log(x+n)} \leqq \frac{1}{\log n}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{\log(n+1)} \leqq \frac{x}{\log(x+n)} \leqq \frac{x}{\log n}$$

が成り立つ。したがって

$$\int_0^1 \frac{x}{\log(n+1)}dx \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}dx \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log n}dx$$

が成り立つので

$$\frac{1}{\log(n+1)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}dx \leqq \frac{1}{\log n}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\log(n+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}dx \leqq \frac{1}{2\log n} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

(2)

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \int \frac{1}{(\log x)^2}\cdot(\log x)'dx$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{\log x} + C} \qquad (C \text{ は積分定数})$$

(3)　$a_{n,\ m} = \displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx$ とする。

$k \geqq 3$ より，①を用いて

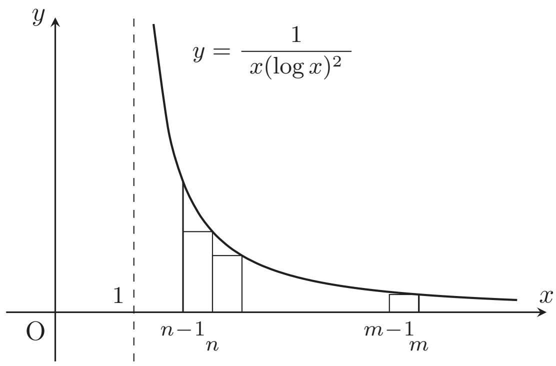
$$\frac{1}{2\log(k+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{2\log k}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{k\log k\log(k+1)} \leqq \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{k(\log k)^2}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k\log k\log(k+1)} \leqq a_{n,\ m} \leqq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k(\log k)^2} \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。



ここで，図の面積を比較することにより，

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2}\leqq\int_{n-1}^{m}\frac{1}{x(\log x)^2}dx$$

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2}\leqq\left[-\frac{1}{\log x}\right]_{n-1}^{m}\qquad(\because\ (2))$$

$$\therefore\ \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2}\leqq\frac{1}{\log(n-1)}-\frac{1}{\log m}$$

が成り立つことがわかる。

よって，②より

$$a_{n,\ m}\leqq\frac{1}{\log(n-1)}-\frac{1}{\log m}\ \cdots\cdots③$$

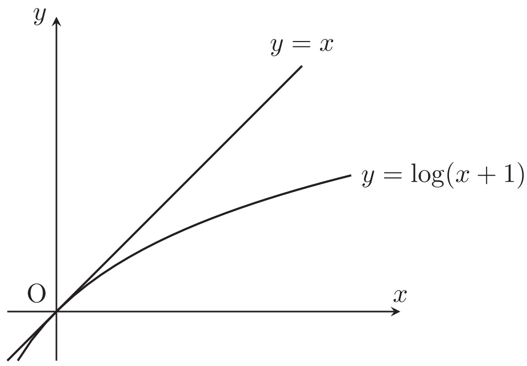
が成り立つ。

また，$x\geqq 0$ において $x\geqq\log(1+x)$ が成り立つから (下図を参照)，

$$\frac{1}{k}\geqq\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{k}\geqq\log(k+1)-\log k$$

が成り立つ。



したがって，

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\log(k+1)}\geqq\sum_{k=n}^{m}\frac{\log(k+1)-\log k}{\log k\log(k+1)}$$

$$=\sum_{k=n}^{m}\left\{\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(m+1)}$$

が成り立つから，②より

$$\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(m+1)}\leqq a_{n,\ m}\ \cdots\cdots④$$

が成り立つ。

③，④より

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leqq a_{n,\ m} \leqq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

が成り立つ。

3.

自然数 p は 2 以上の定数とする。xy 平面上で不等式 $x^2 - py^2 \geqq -1$ の表す領域を D とする。自然数 r は，円 $(x-p)^2 + y^2 = r$ が領域 D に含まれるような最大のものとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　r を p を用いて表せ。

(2)　(1) のもとで，関係式 $(x-p)^2 + y^2 = r$ をみたす互いに異なる素数 $(x,\ y,\ p)$ のうち，p の値が最小となるものを求めよ。

解答

(1)　まず，$x^2 - py^2 = -1$ と $(x-p)^2 + y^2 = r$ が接するときの r を p を用いて表す。このとき，

$$\begin{cases} x^2 - py^2 = -1 & \cdots\cdots ① \\ (x-p)^2 + y^2 = r & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 x が 1 つ存在する。

① $+ p \times$ ② より $x^2 + p(x-p)^2 = rp - 1$ である。展開して整理すると

$$(p+1)x^2 - 2p^2x + p^3 - rp + 1 = 0$$

となる。x について重解を持つため，判別式を D とすると $D = 0$ である。

$$\begin{aligned} & D/4 = p^4 - (p+1)(p^3 - rp + 1) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & rp(p+1) - p^3 - p - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & r = \frac{p^3 + p + 1}{p(p+1)} = p - 1 + \frac{2p+1}{p(p+1)} \end{aligned}$$

$\dfrac{2p+1}{p(p+1)} \geqq 1$ を解くと

$$\begin{aligned} & \frac{2p+1}{p(p+1)} \geqq 1 \\ \Longleftrightarrow\ & p^2 + p \leqq 2p + 1 \\ \Longleftrightarrow\ & p^2 - p - 1 \leqq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq p \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

である。$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ である。したがって，$\dfrac{2p+1}{p(p+1)} \geqq 1$ をみたす p は存在しないので，$0 < \dfrac{2p+1}{p(p+1)} < 1$ である。

よって $(x-p)^2 + y^2 = r$ が，領域 D に含まれる最大の自然数 r は $\boldsymbol{p-1}$ である。

(2)　(1) より

$$(x-p)^2 + y^2 = p - 1 \cdots ③$$

をみたす互いに異なる素数の組 $(x,\ y,\ p)$ を計算する。

互いに異なることから $x - p \neq 0$ であるため $p - 1 > y^2$ である。y は素数であるため $y \geqq 2$ であることから，$p - 1 > 4$ を得る。よって $p > 5$ となる。p は 2 より大きい素数であるため，奇数である。ゆえに $p - 1$ は偶数である。したがって，③より $(x-p)^2$，y^2 の偶奇は一致する，すなわち $x - p$，y の偶奇は一致する。

ここで，$x-p,\ y$ がともに奇数であると仮定すると，$x-p$ が奇数かつ p が奇数であることから，素数 x は 2 である。③に $x=2$ を代入し展開すると

$$p^2-5p+5+y^2=0$$

これを満たす素数の組 $(y,\ p)$ の組が存在する場合，$p^2-5p+5<0$ である必要がある。不等式を解くと $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<p<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ を得る。$\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{5+4}{2}<5$ であるため，この場合では $p<5$ である。しかし，$p>5$ より，矛盾する。よって $x-p,\ y$ がどちらも奇数であることはない。
また，$x-p,\ y$ がともに偶数である場合，y は素数であるため $y=2$ である。これを与式に代入すると

$$(x-p)^2+4=p-1$$

移項して

$$(x-p)^2=p-5$$

を得る。$p-5$ が平方数となる p で最小のものを求める。
$p-5=n^2$（n は正の整数）の解は

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$p-5$	1	4	9	16	25	36	$\cdots$
p	6	9	14	21	30	41	$\cdots$

と続く。このうち，p が素数，かつ最小となるのは $p=41$ である。このとき，x は $(x-41)^2=36$ を満たすため $x=47,\ 35$ である。よって，x は素数より，$x=47$ であり，これは条件をみたす。
以上より求める解は $(x,\ y,\ p)=\mathbf{(47,\ 2,\ 41)}$ である。

4.

z は実数ではない複素数で，$z+\dfrac{1}{z-1}$ が正の実数となるものとする。このとき，$\left|\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{z-\overline{z}}{2}+1\right|$ がとり得る値の範囲を求めよ。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数とする。

$\boxed{\text{解答}}$

$z+\dfrac{1}{z-1}$ が正の実数であることより

$$z+\frac{1}{z-1}=\overline{\left(z+\frac{1}{z-1}\right)} \quad \cdots\cdots①,$$

$$\text{かつ}\frac{z+\dfrac{1}{z-1}+\overline{\left(z+\dfrac{1}{z-1}\right)}}{2}>0 \quad \cdots\cdots②$$

①について

$$\begin{aligned} & z+\frac{1}{z-1}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}-1} \\ \Longleftrightarrow\ & z-\overline{z}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{\overline{z}-1}=0 \\ \Longleftrightarrow\ & z-\overline{z}+\frac{-(z-\overline{z})}{(z-1)(\overline{z}-1)}=0 \\ \Longleftrightarrow\ & (z-\overline{z})\left\{1-\frac{1}{(z-1)(\overline{z}-1)}\right\}=0 \\ \Longleftrightarrow\ & z=\overline{z},\ \text{または}\ |z-1|=1 \end{aligned}$$

z は実数ではないので $|z-1|=1$ であり，z が実数ではないことにも注意して

$$z=1+\cos\theta+i\sin\theta \ \ (0<\theta<\pi,\ \pi<\theta<2\pi) \quad \cdots\cdots③$$

とおける。
続いて，②について③を代入すると

$$1+2\cos\theta>0 \iff \cos\theta>-\frac{1}{2}$$

したがって，以下

$$z=1+\cos\theta+i\sin\theta \quad \left(-\frac{1}{2}<\cos\theta<1\right)$$

のもとで考えていく。このとき，

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z-1}-\frac{z-\overline{z}}{2}+1\right| &= |(1+\cos\theta)+i(-2\sin\theta)| \\ &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-2\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{-3\cos^2\theta+2\cos\theta+5} \\ &= \sqrt{-3\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

よって，$-\dfrac{1}{2} < \cos\theta < 1$ より

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{2}} < \left|\frac{1}{z-1} - \frac{z-\overline{z}}{2} + 1\right| \leqq \boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{3}}}$$

別解

$z = x + yi$（x，y は実数）とおく。

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z-1} &= x + yi + \frac{1}{x-1+yi} \\ &= x + yi + \frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2} \\ &= x + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \left(y - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right)i \end{aligned}$$

条件より $z + \dfrac{1}{z-1}$ は実数であるため，虚部は 0 である。つまり

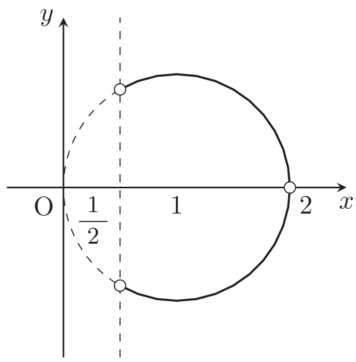
$$y - \frac{y}{(x-1)^2+y^2} = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

である。z は実数ではないため，$y \fallingdotseq 0$ である。よって ④ は $(x-1)^2 + y^2 = 1$ と変形される。

さらに，$z + \dfrac{1}{z-1}$ は正の実数であるため，$(x-1)^2 + y^2 = 1$ の下で

$$x + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} = x + (x-1) > 0$$

である。よって $x > \dfrac{1}{2}$ である。以上より条件を満たす $z = x + yi$ を xy 平面に描くと次のようになる。



$(x-1)^2 + y^2 = 1$ の下で，

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} - \frac{z-\overline{z}}{2} + 1 &= \frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2} - yi + 1 \\ &= x - 1 - yi - yi + 1 \\ &= x - 2yi \end{aligned}$$

である。

ここで，$\left|\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{z-\overline{z}}{2} + 1\right| = k$ とおくと，$(x-1)^2 + y^2 = 1$ の下で $|x - 2yi| = k \iff x^2 + 4y^2 = k^2\ (k \geqq 0)$

を満たす。よって，

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \quad \left(\dfrac{1}{2}<x<2\right) \\ x^2+4y^2=k^2 \end{cases}$$

を満たす実数 k の範囲を求めればよい。

まず，x の範囲を無視して，$(x-1)^2+y^2=1$ と $x^2+4y^2=k^2$ が共有点を持つ k の最大値を求める。これは $(x-1)^2+y^2=1$ と $x^2+4y^2=k^2$ が接するときである。2 式から y を消去すると，

$$4(x-1)^2-x^2=4-k^2$$

である。これを整理すると

$$3x^2-8x+k^2=0$$

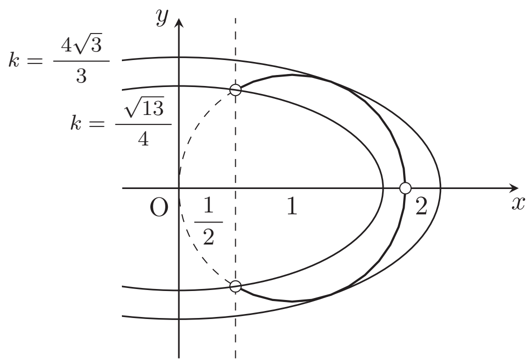
である。2 曲線が接するとき，x について重解を持つ。判別式を D とすると $D=0$ のときである。$D/4=16-3k^2$ であるため，これを解くと $k=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ を得る。特に $k \geqq 0$ より $k=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ である。

次に $x^2+4y^2=k^2$ が $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通るとき，

$$k=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

となる。

よって，図より $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}}{2}<k\leqq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$ である。



講評

1.［確率］（標準）
例年通り確率からの出題であった。後半は丁寧に数え上げていけばよい。

2.［数III微積分］（やや難）
定積分と不等式からの出題であった。長方形の面積と定積分の値を比較するのが基本方針であるが，左側の不等号を示すのはやや難儀する。

3.［整数の性質］（難）
例年通り整数問題であった。(1) もそれなりの計算量を求められ，(2) の整数方程式は式の偶奇に注目して x または y の値を決定していきたい。そうすればあとはしらみつぶしに調べればよい。

4.［複素数平面］（標準）
複素数平面からの出題であった。誘導なしの出題であったが，複素数 z のまま考えても $z = x + yi$ (x，y は実数) とおいても解くことができるのでアプローチに困ることはないだろう。

昨年度に比べ同程度の難易度であったが，例年より点数の確保はしやすいのではないだろうか。一次突破ラインは 55〜60% 程度か。

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木 1-37-14
医学部進学予備校 メビオ
0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校
0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録