

東京女子医科大学 数学

2025年 2月 1日実施

※聞き取りによる再現問題です。一部誤りを含む可能性があります。

1

次の各問いに答えよ。

- ① 1, 2, ……., 9の番号が書かれたカードを左から一列に並べるとき, 1, 2, 3の番号が書かれたカードがこの順に連続して現れる確率を求めよ。
- ② $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数の導関数を求めよ。
- ③ 白玉(1点)1個, 赤玉(2点)1個が入った袋から1つの玉を取り出し, 点数を記録し袋の中に戻す操作を繰り返す。合計8点になるような取り出し方は何通りあるか。

解答

- ① カードの並べ方は9!通りで同様に確からしい。
 1, 2, 3がこの順に連続してこの順に現れるのは7!通りである。
 よって, 求める確率は

$$\frac{7!}{9!} = \frac{1}{72}$$

- ② $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数は $x = \tan y$
 両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dy}{dx} \frac{1}{\cos^2 y} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \quad (\because \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y) \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + x^2} \quad (\because x = \tan y) \end{aligned}$$

- ③ 合計8点になるような点数の組み合わせは

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) &: 1 \text{ 通り} \\ (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) &: 7 \text{ 通り} \\ (1, 1, 1, 1, 2, 2) &: {}_6C_2 \text{ 通り} \\ (1, 1, 2, 2, 2) &: {}_5C_3 (= {}_5C_2) \text{ 通り} \\ (2, 2, 2, 2) &: 1 \text{ 通り} \end{aligned}$$

よって, 求める場合の数は

$$1 + 7 + {}_6C_2 + {}_5C_2 + 1 = 34 \text{ (通り)}$$

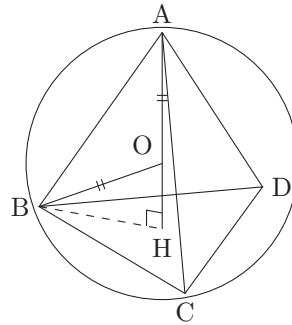
2

次の各問いに答えよ。

- ① 1 辺の長さが 1 の正四面体の外接球の半径を求めよ。
- ② 1 辺の長さが 1 の正八面体の内接球の体積を求めよ。

解答

- ① 図のような 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD を考える。



頂点 A から底面 $\triangle BCD$ に垂線 AH を下ろすと

$$\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$$

よって、 $BH = CH = DH$

ゆえに、点 H は $\triangle BCD$ の外接円の中心で、外接円の半径は BH である。

よって、 $\triangle BCD$ において、正弦定理により

$$BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AB^2 - BH^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

ここで、外接する球の中心を O、半径を R とすると、O は線分 AH 上にあり、

$$OA = OB = R$$

ゆえに

$$OH = AH - OA = \frac{\sqrt{6}}{3} - R$$

$\triangle OBH$ で三平方の定理から

$$BH^2 + OH^2 = OB^2$$

よって

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 = R^2$$

すなわち

$$1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}R = 0$$

ゆえに

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

この球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{3\sqrt{6}}{8}\pi$$

② 一辺の長さが 1 の正三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。正八面体の各面は正三角形であるので、この正八面体の内接球の半径を r として、正八面体の体積に注目する。ここで、1 辺の長さが 1 の正四角錐の高さを h とすると、三平方の定理から

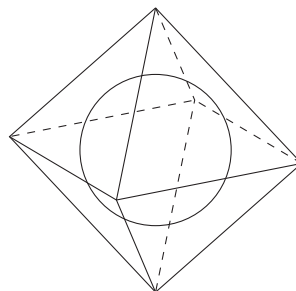
$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることから、

$$\begin{aligned} S \cdot r \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 &= 1 \cdot 1 \cdot h \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

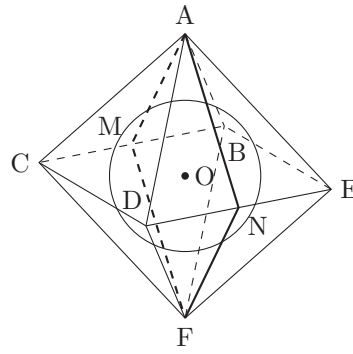
よって、この球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{27}\pi$$

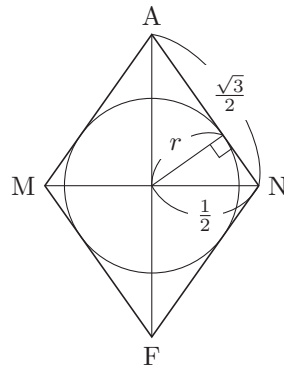


別解

図のように、一辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF を考え、辺 BC の中点を M、辺 DE の中点を N とする。



四角形 AMFN はひし形となることから、ひし形 AMFN に内接する円の半径を r とすると、 r は正八面体 ABCDEF の外接球の半径である。



円の中心を O とし、直角三角形 AON の面積に注目すると、 r は頂点 O から辺 AN に下ろした垂線の長さなので、

$$\begin{aligned} ON \cdot OA &= AN \cdot r \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

よって、この球の体積は

$$\frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6} \right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{27} \pi$$

3

曲線 $y = -x^2 + 2$, $y = -x + k$ (k は正の定数) が異なる 2 点 P, Q で交わっている。次の各問いに答えよ。

- ① k の値の範囲を求めよ。
- ② 原点から $y = -x + k$ の距離 h を k を用いて表せ。
- ③ 三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

解答

① $y = -x^2 + 2$, $y = -x + k$ の交点が 2 点あることは、二次方程式 $x^2 - x + k - 2 = 0$ が異なる 2 実数解を持つことである。二次方程式の判別式を D とすると $D = 1 - 4(k - 2) = 9 - 4k$ である。異なる 2 実数解を持つのは $D > 0$ のときであるため、 $9 - 4k > 0$, つまり $0 < k < \frac{9}{4}$ となる。

② 点と直線の距離の公式から

$$h = \frac{|0 + 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

条件より $k > 0$ であるため、求める値は $\frac{k}{\sqrt{2}}$ である。

③ P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とおく。このとき、

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} PQ \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}|q - p| \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} k|q - p|$$

である。

p, q は二次方程式 $x^2 - x + k - 2 = 0$ の 2 解であるため、それぞれ $\frac{1 \pm \sqrt{9 - 4k}}{2}$ より $|q - p| = \sqrt{9 - 4k}$ である。よって、面積は $\frac{1}{2} k \sqrt{9 - 4k} = \frac{1}{2} \sqrt{9k^2 - 4k^3}$ である。

$f(k) = 9k^2 - 4k^3$ とおく。

$f'(k) = 18k - 12k^2 = 6k(3 - 2k)$ より増減表は

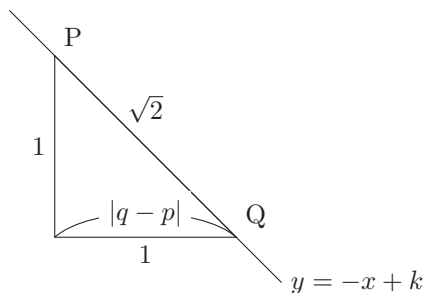
| | | | | | |
|------|-----|-----|---------------|-----|-----------------|
| k | (0) | ... | $\frac{3}{2}$ | ... | $(\frac{9}{4})$ |
| f' | 0 | + | 0 | - | |
| f | | ↗ | | ↘ | |

であるため、 $0 < k < \frac{9}{4}$ の範囲において、 $f(k)$ は $k = \frac{3}{2}$ で最大値をとる。こうして三角形の面積の最大値

は $k = \frac{3}{2}$ のとき、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{9 - 6} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ である。

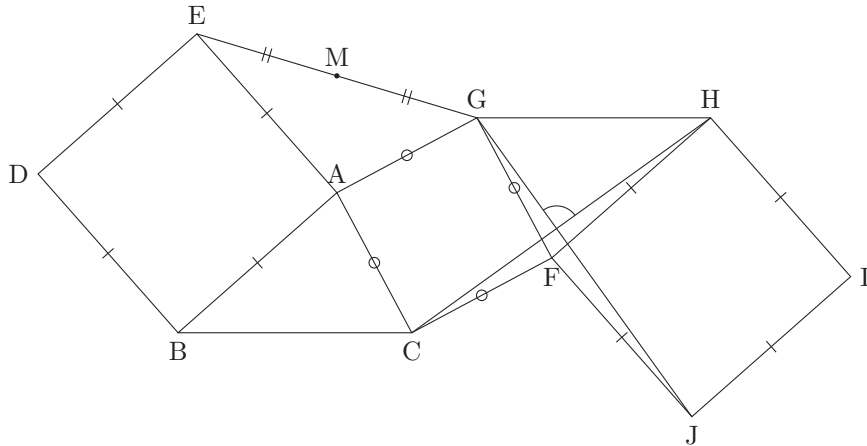
注釈

図より $PQ = \sqrt{2}|q - p|$ であることを用いた。



4

複素数平面上に 3 点 $A(0)$, $B(z_b)$, $C(z_c)$ があり, 次のような図を考える。ただし, 図において, $BC = L$, $\triangle ABC \equiv \triangle FHG$, 四角形はすべて正方形である。このとき, 次の各問いに答えよ。



- ① $E(z_e)$, $F(z_f)$ とする。 z_e , z_f を, z_b , z_c を用いて表せ。
- ② EG の中点を M とする。 AM の長さを L を用いて表せ。また, 直線 AM と BC のなす角を求めよ。
- ③ 直線 CH と GJ のなす角を求めよ。

解答

- ① 点 $E(z_e)$ は点 $B(z_b)$ を原点 A の周りに $-\frac{\pi}{2}$ 回転した点であるから

$$z_e = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} z_b = -iz_b$$

点 $F(z_f)$ は点 $C(z_c)$ を原点 A の周りに $\frac{\pi}{4}$ 回転して $\sqrt{2}$ 倍した点であるから

$$z_f = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right) z_c = (1+i)z_c$$

- ② 点 $G(z_g)$ は点 $C(z_c)$ を原点 A の周りに $\frac{\pi}{2}$ 回転した点であるから

$$z_g = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right) z_c = iz_c$$

さらに, $M(z_m)$ は線分 EG の中点なので

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{z_e + z_g}{2} \\ &= \frac{-iz_b + iz_c}{2} \\ &= \frac{i}{2}(z_c - z_b) \end{aligned}$$

よって, 線分 AM の長さは

$$AM = |z_m| = \left| \frac{i}{2}(z_c - z_b) \right| = \frac{1}{2}|z_c - z_b| = \frac{1}{2}L$$

また,

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{i}{2}(z_c - z_b) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right) (z_c - z_b) \end{aligned}$$

であるから, \overrightarrow{AM} は \overrightarrow{BC} を $\frac{\pi}{2}$ 回転して $\frac{1}{2}$ 倍したものとわかる。

よって, AM と BC のなす角は $\frac{\pi}{2}$

- ③ 図の関係から, 直線 CH と GJ のなす角は, 直線 BG と CE のなす角に等しい。

$$\begin{aligned}z_e - z_c &= -iz_b - z_c \\ &= i(iz_c - z_b) \\ &= i(z_g - z_b) \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)(z_g - z_b)\end{aligned}$$

であるから、 \overrightarrow{CE} は \overrightarrow{BG} を $\frac{\pi}{2}$ 回転したものとわかる。

よって、直線 CE と BG のなす角、すなわち直線 CH と GJ のなす角は $\frac{\pi}{2}$

講評

1 [小問集合] (やや易) : (1) 順列の確率, (2) 逆関数の導関数, (3) 場合の数からの出題であった。いずれも平易な出題であるが、逆関数の導関数を押さえられていたかが完答の鍵であっただろう。

2 [空間図形] (標準) : 空間図形からの出題であった。題材はありふれており、定石通り考えていけばよい。ここでの失点はできれば避けたい。

3 [図形と方程式] (やや易) : 図形と方程式からの出題であった。②までは絶対に落とせない。③は面積の立式を工夫して極力計算を減らしたい。

4 [複素数平面] (標準) : 複素数平面上における点の回転をテーマとした出題であった。図の設定は参考書などでもよく見かけるものであった。ただ苦手な受験生が多い複素数平面というテーマゆえ、完答できた受験生は少なかったのではないだろうか。

昨年度と同程度の難易度であった。三角関数や積分があった昨年度に比べ計算量は大きく減少し、全体的に差がつきやすい内容になった。1次突破ボーダーは55%程度であろう。

本解答速報の内容に関するお問合せは


医学部専門予備校
YMS
 heart of medicine
 ☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>
 東京都渋谷区代々木 1-37-14

医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校 **英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録またはLINE友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE登録

