解答速報

東京女子医科大学　数学

2025年 2月 1日実施

※聞き取りによる再現問題です。一部誤りを含む可能性があります。

1

次の各問いに答えよ。

① 1，2，……，9 の番号が書かれたカードを左から一列に並べるとき，1，2，3 の番号が書かれたカードがこの順に連続して現れる確率を求めよ。

② $y = \tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数の導関数を求めよ。

③ 白玉 (1 点)1 個，赤玉 (2 点)1 個が入った袋から 1 つの玉を取り出し，点数を記録し袋の中に戻す操作を繰り返す。合計 8 点になるような取り出し方は何通りあるか。

解答

① カードの並べ方は 9! 通りで同様に確からしい。

1，2，3 がこの順に連続してこの順に現れるのは 7! 通りである。

よって，求める確率は

$$\frac{7!}{9!} = \mathbf{\frac{1}{72}}$$

② $y = \tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数は $x = \tan y$

両辺を x で微分すると

$$1 = \frac{dy}{dx}\frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \quad \left(\because \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \boldsymbol{\frac{1}{1+x^2}} \quad (\because x = \tan y)$$

③ 合計 8 点になるような点数の組み合わせは

$$\begin{array}{cl} (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) & :1\text{ 通り} \\ (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2) & :7\text{ 通り} \\ (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2) & :{}_6\mathrm{C}_2\text{通り} \\ (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2) & :{}_5\mathrm{C}_3(={}_5\mathrm{C}_2)\text{ 通り} \\ (2,\ 2,\ 2,\ 2) & :1\text{ 通り} \end{array}$$

よって，求める場合の数は

$$1 + 7 + {}_6\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_2 + 1 = \mathbf{34}(\text{通り})$$

2

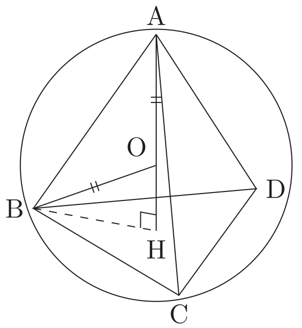
次の各問いに答えよ。

① 1 辺の長さが 1 の正四面体の外接球の半径を求めよ。

② 1 辺の長さが 1 の正八面体の内接球の体積を求めよ。

解答

① 図のような 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD を考える。



頂点 A から底面 △BCD に垂線 AH を下ろすと

$$\triangle\mathrm{ABH} \equiv \triangle\mathrm{ACH} \equiv \triangle\mathrm{ADH}$$

よって，BH = CH = DH

ゆえに，点 H は △BCD の外接円の中心で，外接円の半径は BH である。

よって，△BCD において，正弦定理により

$$\mathrm{BH} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2}\\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

ここで，外接する球の中心を O，半径を R とすると，O は線分 AH 上にあり，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R$$

ゆえに

$$\mathrm{OH} = \mathrm{AH} - \mathrm{OA} = \frac{\sqrt{6}}{3} - R$$

△OBH で三平方の定理から

$$\mathrm{BH}^2 + \mathrm{OH}^2 = \mathrm{OB}^2$$

よって

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2=R^2$$

すなわち

$$1-\frac{2\sqrt{6}}{3}R=0$$

ゆえに

$$R=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

この球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{8}\pi}$$

② 一辺の長さが 1 の正三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。正八面体の各面は正三角形であるので，この正八面体の内接球の半径を r として，正八面体の体積に注目する。ここで，1 辺の長さが 1 の正四角錐の高さを h とすると，三平方の定理から

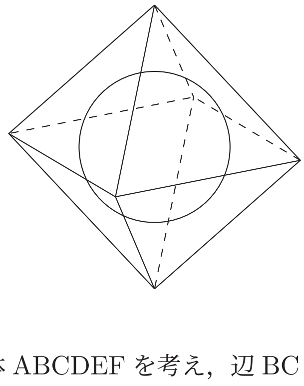
$$h=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることから,

$$S\cdot r\cdot\frac{1}{3}\cdot8=1\cdot1\cdot h\cdot\frac{1}{3}\cdot2$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot r\cdot\frac{1}{3}\cdot8=1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot2$$
$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

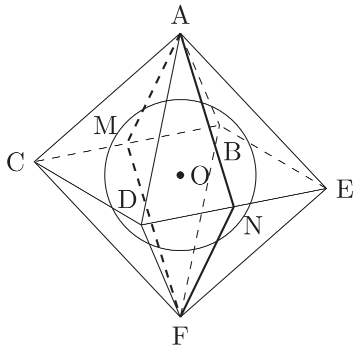
よって, この球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{27}\pi}$$

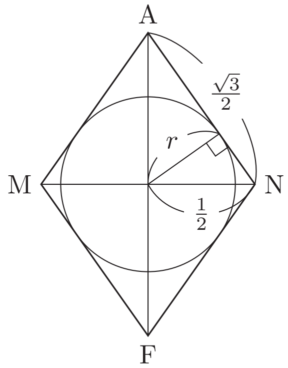


別解

図のように，一辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF を考え，辺 BC の中点を M，辺 DE の中点を N とする。



四角形 AMFN はひし形となることから，ひし形 AMFN に内接する円の半径を r とすると，r は正八面体 ABCDEF の外接球の半径である。



円の中心を O とし，直角三角形 AON の面積に注目すると，r は頂点 O から辺 AN に下ろした垂線の長さなので，

$$\mathrm{ON}\cdot\mathrm{OA}=\mathrm{AN}\cdot r$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r$$

$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

よって，この球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{27}\pi}$$

3

曲線 $y=-x^2+2$，$y=-x+k$ (k は正の定数) が異なる 2 点 P，Q で交わっている。次の各問いに答えよ。

① k の値の範囲を求めよ。

② 原点から $y=-x+k$ の距離 h を k を用いて表せ。

③ 三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

解答

① $y=-x^2+2$，$y=-x+k$ の交点が 2 点あることは，二次方程式 $x^2-x+k-2=0$ が異なる 2 実数解を持つことである。二次方程式の判別式を D とすると $D=1-4(k-2)=9-4k$ である。異なる 2 実数解を持つのは $D>0$ のときであるため，$9-4k>0$，つまり $\boldsymbol{0<k<\frac{9}{4}}$ となる。

② 点と直線の距離の公式から

$$h=\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

条件より $k>0$ であるため，求める値は $\boldsymbol{\frac{k}{\sqrt{2}}}$ である。

③ P，Q の x 座標をそれぞれ p, q とおく。このとき，

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}|q-p|\cdot\frac{k}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}k|q-p|$$

である。

p, q は二次方程式 $x^2-x+k-2=0$ の 2 解であるため，それぞれ $\frac{1\pm\sqrt{9-4k}}{2}$ より $|q-p|=\sqrt{9-4k}$ である。よって，面積は $\frac{1}{2}k\sqrt{9-4k}=\frac{1}{2}\sqrt{9k^2-4k^3}$ である。

$f(k)=9k^2-4k^3$ とおく。

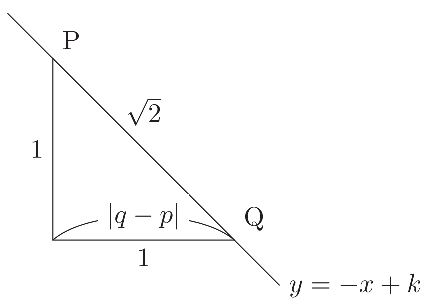
$f'(k)=18k-12k^2=6k(3-2k)$ より増減表は

k	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$(\frac{9}{4})$
f'	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

であるため，$0<k<\frac{9}{4}$ の範囲において，$f(k)$ は $k=\frac{3}{2}$ で最大値をとる。こうして三角形の面積の最大値は $k=\frac{3}{2}$ のとき，$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{9-6}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ である。

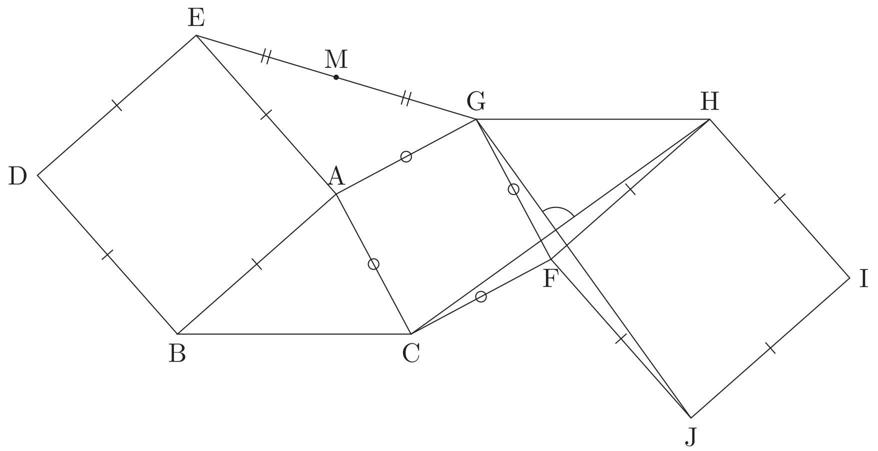
注釈

図より $\mathrm{PQ}=\sqrt{2}|q-p|$ であることを用いた。



4

複素数平面上に 3 点 A(0)，B(z_b)，C(z_c) があり，次のような図を考える。ただし，図において，BC $=$ L，$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$FHG，四角形はすべて正方形である。このとき，次の各問いに答えよ。



① E(z_e)，F(z_f) とする。z_e，z_f を，z_b，z_c を用いて表せ。

② EG の中点を M とする。AM の長さを L を用いて表せ。また，直線 AM と BC のなす角を求めよ。

③ 直線 CH と GJ のなす角を求めよ。

解答

① 点 E(z_e) は点 B(z_b) を原点 A の周りに $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転した点であるから

$$z_e = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} z_b = \boldsymbol{-iz_b}$$

点 F(z_f) は点 C(z_c) を原点 A の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して $\sqrt{2}$ 倍した点であるから

$$z_f = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) z_c = \boldsymbol{(1+i)z_c}$$

② 点 G(z_g) は点 C(z_c) を原点 A の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転した点であるから

$$z_g = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) z_c = iz_c$$

さらに，M(z_m) は線分 EG の中点なので

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{z_e + z_g}{2} \\ &= \frac{-iz_b + iz_c}{2} \\ &= \frac{i}{2}(z_c - z_b) \end{aligned}$$

よって，線分 AM の長さは

$$\mathrm{AM} = |z_m| = \left|\frac{i}{2}(z_c - z_b)\right| = \boldsymbol{\frac{1}{2}|z_c - z_b|} = \frac{1}{2}L$$

また，

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{i}{2}(z_c - z_b) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z_c - z_b) \end{aligned}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して $\dfrac{1}{2}$ 倍したものとわかる。

よって，AM と BC のなす角は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

③ 図の関係から，直線 CH と GJ のなす角は，直線 BG と CE のなす角に等しい。

$$
\begin{aligned}
z_e - z_c &= -iz_b - z_c \\
&= i(iz_c - z_b) \\
&= i(z_g - z_b) \\
&= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z_g - z_b)
\end{aligned}
$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転したものとわかる。

よって，直線 CE と BG のなす角，すなわち直線 CH と GJ のなす角は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

講評

1［小問集合］(やや易）：(1) 順列の確率，(2) 逆関数の導関数，(3) 場合の数からの出題であった。いずれも平易な出題であるが，逆関数の導関数を押さえられていたかが完答の鍵であっただろう。

2［空間図形］（標準）：空間図形からの出題であった。題材はありふれており，定石通り考えていけばよい。ここでの失点はできれば避けたい。

3［図形と方程式］（やや易）：図形と方程式からの出題であった。②までは絶対に落とせない。③は面積の立式を工夫して極力計算を減らしたい。

4［複素数平面］（標準）：複素数平面上における点の回転をテーマとした出題であった。図の設定は参考書などでもよく見かけるものであった。ただ苦手な受験生が多い複素数平面というテーマゆえ，完答できた受験生は少なかったのではないだろうか。

昨年度と同程度の難易度であった。三角関数や積分があった昨年度に比べ計算量は大きく減少し，全体的に差がつきやすい内容になった。1 次突破ボーダーは 55% 程度であろう。